DESPRE EXISTENȚA ȘI UNICITATEA SOLUȚIILOR UNOR CLASE DE ECUAȚII INTEGRALE VOLTERRA ÎN SPAȚIUL FUNCȚIONAL A_c

DE

GH. BANTAȘ

În această Notă se stabilesc unele teoreme de existență și de unicitate în spațiul funcțional A_c definit mai jos, pentru soluțiile unor clase de ecuații integrale Volterra. Tehnica de lucru utilizată aici, se bazează pe metoda elaborată în [2] și pe cea a inegalităților integrale [1].

Fie $\mathbf{R}_a$ semiaxa $[a, \infty)$, $\mathbf{R}^p$ spațiul euclidian real p-dimensional și $\mathcal{C}_c$ spațiul vectorial local convex și separat al funcțiilor continue $x: \mathbf{R}_a \to \mathbf{R}^p$, cu topologia generată de familia numărabilă și suficientă de seminorme

$$|x|_m = \sup_{a \leq t \leq m} \|x(t)\|,$$

unde $m \in \mathbf{N}$ și $\|x(t)\|$ este lungimea euclidiană a vectorului $x(t)$.

În spațiul $\mathcal{C}_c$ considerăm spațiul Banach $\mathcal{C}$ al funcțiilor mărginite pe $\mathbf{R}_a$, a cărui normă este definită prin egalitatea

$$|x|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \geq a} \|x(t)\|$$

și spațiul Banach A_c al funcțiilor absolut continue și cu derivată sumabilă pe $\mathbf{R}_a$, a cărui normă este definită prin egalitatea

$$|x(t)|_{A_c} = \|x(a)\| + \int_a^\infty \|x'(s)\| \, ds. \tag{1}$$

Vom spune că o funcţie este absolut continuă pe $\mathbf{R}_a$, dacă este absolut continuă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbf{R}_a$.

În legătură cu spaţiul A_c vom face următoarele

Observaţii. 1) Spaţiul A_c definit mai sus joacă un rol important în unele probleme de echilibru asimptotic al unor sisteme mecanice descrise de anumite tipuri de ecuaţii funcţionale ([5]).

2) Se constată cu uşurinţă că $A_c \subset \mathcal{E}_l \subset \mathcal{E}$ unde cu $\mathcal{E}_l$ am notat spaţiul Banach al funcţiilor $x \in \mathcal{E}_c$ care au limită finită pentru $t \to \infty$ şi a cărui normă este cea din $\mathcal{E}$.

Această afirmaţie rezultă din (1) care ne spune că integrala improprie $\int_a^\infty x'(s)\, ds$ trebuie să fie convergentă. De aici urmează că funcţia x din A_c aparţine în mod necesar spaţiului $\mathcal{E}_l$.

3) Spaţiul A_c este topologic mai tare decît spaţiul $\mathcal{E}$ care la rîndul său este topologic mai tare decît spaţiul $\mathcal{E}_c$. Acest lucru rezultă din inegalităţile

$$|x(t)|_{\mathcal{E}} \leqslant |x(t)|_{A_c} \quad \text{şi} \quad |x(t)|_m \leqslant |x(t)|_{\mathcal{E}}. \tag{2}$$

Pentru demonstrarea primei inegalităţi considerăm o funcţie $x \in A_c$ şi avem:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(s)\, ds.$$

De aici urmează că,

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(a)\| + \int_a^t \|x'(s)\|\, ds \leqslant \|x(a)\| + \int_a^\infty \|x'(s)\|\, ds = |x(t)|_{A_c}.$$

Din această inegalitate, rezultă în mod evident inegalitatea de demonstrat.

Pentru demonstrarea celei de-a doua inegalităţi considerăm o funcţie $x \in \mathcal{E}$ şi avem:

$$|x(t)|_m = \sup_{a \leqslant t \leqslant m} \|x(t)\| \leqslant \sup_{t \geqslant a} \|x(t)\| = |x(t)|_{\mathcal{E}} \quad \blacksquare$$

Să considerăm acum operatorul integral $T: \mathcal{E}_c \to \mathcal{E}_c$ definit prin egalitatea

$$(Tx)(t) = \int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds, \qquad t \geqslant a, \tag{3}$$

unde K este o matrice pătrată de ordinul p continuă pe mulţimea $\mathcal{T} = \{(t,s) / a \leqslant s \leqslant t < \infty\}$.

Se poate arăta cu uşurinţă că operatorul T este continuu pe spaţiul $\mathcal{E}_c$.

Definiţie. *O pereche de spaţii Banach B_1, B_2 din $\mathcal{E}_c$ se numeşte T-admisibilă dacă $TB_1 \subset B_2$* ([2]).

Propoziţie. *Dacă următoarele condiţii au loc:*

1) $\displaystyle\int_a^\infty \|K(t,t)\|\, dt < \infty$,

2) $\displaystyle\int_a^\infty \int_a^t \|K'_t(t,s)\|\, ds\, dt < \infty$ şi $K'_t(t,s)$ *este continuă pe* $\mathcal{T}$ *atunci avem:*

a) *Perechea de spaţii Banach* $(\mathcal{E}, A_c)$ *este T-admisibilă,*

b) *Operatorul T este continuu pe spaţiul* $\mathcal{E}$ *şi deci*

$$|Tx|_{A_c} \leqslant \mathbf{C}\, |x|_{\mathcal{E}} \qquad (x \in \mathcal{E}), \tag{4}$$

unde $\mathbf{C}$ *este o constantă pozitivă definită prin egalitatea*

$$\mathbf{C} = \int_a^\infty \|K(t,t)\|\, dt + \int_a^\infty \int_a^t \|K'_t(t,s)\|\, ds\, dt.$$

Demonstraţie. a) Fie x o funcţie din $\mathcal{E}$ şi $y = Tx$ imaginea lui x prin T. Din ipotezele admise şi din (3) avem:

$$y'(t) = K(t,t)\, x(t) + \int_a^t K'_t(t,s)\, x(s)\, ds.$$

De aici urmează că

$$\|y'(t)\| \leqslant \|K(t,t)\|\, \|x(t)\| + \int_a^t \|K'_t(t,s)\|\, \|x(s)\|\, ds.$$

Din faptul că $x \in \mathcal{E}$, rezultă existenţa unei constante $M_x > 0$ încît, $\|x(t)\| \leqslant M_x$ pe $\mathbf{R}_a$. Avem:

$$\|y'(t)\| \leqslant M_x \left[\|K(t,t)\| + \int_a^t \|K'_t(t,s)\|\, ds \right].$$

Integrînd în raport cu t obţinem:

$$\int_a^u \| y'(t) \| dt \leqslant M_x \left[\int_a^u \| K(t,t) \| dt + \int_a^u \int_a^t \| K'_t(t,s) \| ds\, dt \right].$$

De aici şi din 2) urmează că $y \in A_c$ şi deci că, $T\mathcal{C} \subset A_c$.

b) Din inegalitatea precedentă rezultă că

$$\int_a^\infty \| y'(s) \| ds \leqslant M_x \left[\int_a^\infty \| K(t,t) \| dt + \int_a^\infty \int_a^t \| K'_t(t,s) \| ds\, dt \right].$$

Luînd aici $M_x = \sup_{t \geqslant a} \| x(t) \|$, obţinem:

$$\int_a^\infty \| y'(s) \| ds \leqslant \mathbf{C} \, | x |_{\mathcal{C}} .$$

De aici şi din faptul că $y(a) = 0$ decurge inegalitatea (4) care ne spune că operatorul T e continuu pe spaţiul $\mathcal{C}$.

Să considerăm o ecuaţie integrală,

$$\text{(E)} \qquad x = (\mathcal{F}_1 + T\mathcal{F}_2)\, x,$$

în care $\mathcal{F}_1 : S \to A_c$ şi $\mathcal{F}_2 : S \to \mathcal{C}$ sînt doi operatori continui pe sfera S de rază ρ şi centru O din spaţiul A_c.

Teoremă. *Dacă ecuaţia* (E) *satisface următoarele condiţii:*

1) *Condiţiile propoziţiei precedente,*

2) $| \mathcal{F}_i x - \mathcal{F}_i y | \leqslant r_i | x - y |_{A_c} \qquad \forall x, y \in S \qquad (i = 1,2)$,

3) $\lambda = 1 - r_1 - \mathbf{C} r_2 > 0$ şi $| \mathcal{F}_1 0 |_{A_c} + \mathbf{C} \, | \mathcal{F}_2 0 |_{\mathcal{C}} \leqslant \lambda \rho$,

atunci ea admite o singură soluţie $x \in S$.

Demonstraţie. Pentru demonstrarea acestei teoreme apelăm la teorema de punct fix a lui Banach ([3], pag. 569) în care luăm $X = S$ şi $U = \mathcal{F}_1 + T\mathcal{F}_2$. Pentru a ne plasa în condiţiile acestei teoreme, va trebui să arătăm că $US \subset S$ şi că operatorul U e un operator contractant.

Fie x un element oarecare din S. Ţinînd seama de definiţia operatorilor $\mathcal{F}_1$ şi $\mathcal{F}_2$ obţinem:

$$(1) \qquad x \in S \Rightarrow \mathcal{F}_1 x \in A_c, \ \mathcal{F}_2 x \in \mathcal{C}.$$

De aici, din condiţia 1) şi din propoziţia precedentă rezultă că,

$$(2) \qquad \mathcal{F}_2 x \in \mathcal{C} \Rightarrow (T\mathcal{F}_2)(x) \in A_c .$$

Din afirmaţiile (1) şi (2) şi din proprietatea de liniaritate a spaţiului A_c decurge relaţia

$$Ux = \mathcal{F}_1 x + (T\mathcal{F}_2)\, x \in A_c$$

care demonstrează că $US \subset A_c$.

Pentru a arăta că $US \subset S$, pornim de la definiţia operatorului U. Avem:

$$x \in S \Rightarrow | Ux |_{A_c} \leqslant | \mathcal{F}_1 x |_{A_c} + | (T\mathcal{F}_2)\, x |_{A_c} = | \mathcal{F}_1 x - \mathcal{F}_1 0 + \mathcal{F}_1 0 |_{A_c} + | (T\mathcal{F}_2)\, x |_{A_c} .$$

De aici, din condiţia 2) şi din propoziţia precedentă obţinem:

$$| Ux |_{A_c} \leqslant r_1 | x |_{A_c} + | \mathcal{F}_1 0 |_{A_c} + \mathbf{C} | \mathcal{F}_2 x |_{\mathcal{C}} \leqslant r_1 | x |_{A_c} + | \mathcal{F}_1 0 |_{A_c} +$$
$$+ \mathbf{C} | \mathcal{F}_2 x - \mathcal{F}_2 0 |_{\mathcal{C}} + \mathbf{C} | \mathcal{F}_2 0 |_{\mathcal{C}} \leqslant r_1 \rho + \mathbf{C} r_2 \rho + | \mathcal{F}_1 0 |_{A_c} +$$
$$+ \mathbf{C} | \mathcal{F}_2 0 |_{\mathcal{C}} .$$

Luînd în considerare şi condiţia 3) obţinem că $| Ux |_{A_c} \leqslant \rho$ şi deci că $US \subset S$.

Pentru a arăta că operatorul U e contractant, pornim de la definiţia operatorului U. Fie x şi y două elemente oarecare din S. Avem:

$$| Ux - Uy |_{A_c} \leqslant | \mathcal{F}_1 x - \mathcal{F}_1 y |_{A_c} + | (T\mathcal{F}_2)\, x - (T\mathcal{F}_2)\, y |_{A_c} =$$
$$= | \mathcal{F}_1 x - \mathcal{F}_1 y |_{A_c} + | T(\mathcal{F}_2 x - \mathcal{F}_2 y) |_{A_c} .$$

De aici, din propoziţia precedentă şi din condiţia 2), obţinem:

$$| Ux - Uy |_{A_c} \leqslant r_1 | x - y |_{A_c} + \mathbf{C} | \mathcal{F}_2 x - \mathcal{F}_2 y |_{\mathcal{C}} \leqslant r_1 | x - y |_{A_c} +$$
$$+ \mathbf{C} r_2 | x - y |_{A_c} = (r_1 + \mathbf{C} r_2) \, | x - y |_{A_c} .$$

De aici şi din condiţia 3) rezultă că operatorul U e contractant.

Condiţiile teoremei lui Banach fiind îndeplinite rezultă că ecuaţia (E) admite o soluţie unică în S.

În continuare vom menţiona cîteva corolare ale acestei teoreme.

Corolarul 1. *Dacă ipotezele 1) — 2) şi prima relaţie din 3) au loc cînd înlocuim pe S cu A_c, atunci ecuaţia* (E) *admite o singură soluţie* $x \in A_c$.

Corolarul 2. *Fie ecuaţia integrală,*

$$\text{(E')} \qquad x(t) = h(t) + \int_a^t K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds ,$$

în care K este o matrice pătrată de ordinul p, continuă pe mulţimea $\mathcal{T}$ iar x, h şi f sînt funcţii p-vectoriale pe $\mathbf{R}_a$, respectiv $\mathbf{R}_a \times \Sigma$, unde Σ este sfera cu centrul în O şi rază ρ din spaţiul euclidian $\mathbf{R}^p$.

Dacă ecuaţia (E′) *satisface condiţiile:*

1) Condiţiile propoziţiei precedente,

2) $h \in A_c$ *şi* $\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq r \| x - y \|$ pentru $\forall\ t \in \mathbf{R}_a$ şi $x, y \in \Sigma$,

3) $\lambda = 1 - \mathbf{C} r_2 > 0$ şi $\mathbf{C} \| f(t,0) \|_{\mathcal{C}} \leq \lambda \rho$,

atunci ea admite o singură soluţie $x \in S$.

Să considerăm acum o ecuaţie integrală de forma,

$$(\mathrm{E}'') \qquad F(t,x) = \int_a^t K(t,s,x(s))\, ds\,,$$

în care x, F şi K sînt funcţii p-vectoriale continue pe $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{R}_a \times \Sigma$ şi respectiv pe $\mathcal{T} \times \Sigma$.

Să presupunem că ecuaţia (E″) admite cel puţin o soluţie $x \in S_c$ (respectiv $\mathcal{C}_c$) unde cu S_c am notat sfera de centru O şi rază ρ din spaţiul $\mathcal{C}$. În aceste ipoteze se pune problema de a găsi condiţii care să asigure apartenenţa soluţiei x la spaţiul A_c. Un răspuns la această problemă ni-l oferă teorema de mai jos. Înainte de expunerea ei vom face unele notaţii şi precizări.

Fie $A = (a_{ij})$ o matrice de tipul $m \times n$. Norma acestei matrice o notăm cu simbolul $\| A \|$ pe care-l definim prin egalitatea

$$\| A \| = \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Cu $| A |$ notăm determinantul matricei A cînd $m = n$.

Fie $F: \mathbf{R}_a \times \Sigma \to \mathbf{R}^p$ o funcţie care admite derivate parţiale de ordinul I în raport cu fiecare din ultimele sale p variabile. Cu $D_x F(t,x)$ notăm matricea corespunzătoare jacobianului funcţiei F în raport cu ultimele p variabile.

Fie W mulţimea funcţiilor $H: [a, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ definite prin egalitatea, $H(t,x) = h(t)\, \omega(x) + r(t)$, în care funcţiile,

$$h: [a, \infty) \to [0, \infty),\ r: [a, \infty) \to [0, \infty) \text{ şi } \omega: [0, \infty) \to (0, \infty)$$

sînt continue şi satisfac condiţiile:

$$\int_a^\infty h(s)\, ds < \infty\,, \quad \int_a^\infty r(s)\, ds < \infty \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \frac{ds}{\omega(s)} = \infty\,.$$

Cu $\Omega(t)$ notăm valoarea integralei $\int_0^t ds / \omega(s)$ şi cu Ω^{-1} reciproca funcţiei Ω.

Teoremă. *Dacă ecuaţia* (E″) *satisface următoarele condiţii:*

1) $| D_x F(t,x) | \neq 0$ pe $\mathbf{R}_a$,

2) *există o funcţie continuă* $A: \mathcal{T} \to [0, \infty)$ *încît,*

$$\| K'_t(t,s,x) \| \leq A(t,s) \text{ pe } \mathcal{T} \times \Sigma,$$

3) *există o funcţie* $H \in W$ *încît pentru* $\forall\ (t,x) \in \mathbf{R}_a \times \Sigma$ *să avem,*

$$\| K(t,t,x) - F'_t(t,x) \| + \int_a^t A(t,s)\, ds \leq H(t, \| x \|)\, D_x^{-1} F(t,x) \|^{-1},$$

atunci orice soluţie $x \in S_c$ *a acestei ecuaţii aparţine lui* A_c.

Demonstraţie. Fie $x \in S_c$ o soluţie a ecuaţiei (E″). Din faptul că x şi K sînt funcţii continue, rezultă că integrala din membrul al doilea al ecuaţiei (E″) este o funcţie derivabilă. Fie $G(t)$ valoarea acestei integrale. Din condiţia 1) şi din teorema de existenţă a funcţiilor implicite rezultă că soluţia x a ecuaţiei

$$F(t,x) - G(t) = 0$$

este o funcţie cu derivată continuă pe axa $\mathbf{R}_a$.

Pentru a arăta că $x \in A_c$, derivăm în raport cu t ambii membri ai ecuaţiei (E″) şi obţinem:

$$D_x F(t,x)\, x'(t) = K(t,t,x) - F'_t(t,x) + \int_a^t K'_t(t,s,x(s))\, ds\,.$$

Înmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu matricea inversă a matricei $D_x F$ obţinem:

$$x'(t) = D_x^{-1} F(t,x) \Big[K(t,t,x) - F'_t(t,x) + \int_a^t K'_t(t,s,x(s))\, ds \Big].$$

Luînd norma ambilor membri ai acestei egalităţi şi aplicînd proprietăţile normei obţinem:

$$\| x'(t) \| \leq \| D_x^{-1} F(t,x) \| \Big[\| K(t,t,x) - F'_t(t,x) \| + \int_a^t \| K'_t(t,s,x) \|\, ds \Big].$$

De aici şi din proprietăţile 2) şi 3) rezultă că,

$$\|x'(t)\| \leqslant h(t)\,\omega(\|x(t)\|) + r(t), \quad (t \geqslant a). \tag{1}$$

Din continuitatea funcţiei ω decurge existenţa a două constante pozitive C_1 şi C_2 încît,

$$0 < C_1 \leqslant \omega(\|x(t)\|) \leqslant C_2, \qquad \forall t \in \mathbf{R}_a.$$

De aici, din (1) şi din faptul că $H \in W$ obţinem relaţia,

$$\int_a^\infty \|x'(s)\|\,ds < \infty,$$

care dovedeşte că $x \in A_c$. ∎

Teoremă. *Dacă ipotezele teoremei precedente au loc cu* $\mathbf{R}^p$ *în locul lui* Σ, *atunci orice soluţie* $x \in \mathcal{E}_c$ *a ecuaţiei* (E″) *aparţine spaţiului* A_c.

Demonstraţie Urmînd raţionamentul făcut în teorema precedentă se ajunge la concluzia că

$$\|x'(t)\| \leqslant h(t)\,\omega(\|x\|) + r(t), \qquad t \geqslant a. \tag{1}$$

Ţinînd seama de faptul că $D^{\pm}\|x(t)\| \leqslant \|x'(t)\|$ ([4]) avem:

$$D^{\pm}\|x(t)\| \leqslant h(t)\,\omega(\|x(t)\|) + r(t) \qquad t \geqslant a. \tag{2}$$

Întrucît x are derivată continuă pe $[a,\infty)$, rezultă că x e o funcţie absolut continuă pe orice segment $[a, b] \subset [a,\infty)$. Deci acelaşi lucru are loc şi pentru funcţia $\|x\|$. De aici urmează că derivata $\|x\|'$ există aproape peste tot pe $[a, b]$, că $\|x\|'$ este o funcţie sumabilă pe $[a, b]$ şi că

$$\int_a^t \|x(s)\|'\,ds = \|x(t)\| - \|x(a)\|. \qquad (t \geqslant a) \tag{3}$$

Integrînd acum ambii membri ai inegalităţii (2) şi ţinînd seama de relaţia (3) şi de definiţia spaţiului W, obţinem:

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(a)\| + \int_a^t r(s)\,ds + \int_a^t h(s)\,\omega(\|x(s)\|)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x(a)\| + \int_a^\infty r(s)\,ds + \int_a^t h(s)\,\omega(\|x(s)\|)\,ds.$$

Punînd $C = \|x(a)\| + \int_a^\infty r(s)\,ds$ avem:

$$\|x(t)\| \leqslant C + \int_a^t h(s)\,\omega(\|x(s)\|)\,ds.$$

Aplicînd aici inegalitatea lui Bihari-Langenhop ([1] pag. 135) obţinem:

$$\|x(t)\| \leqslant \Omega^{-1}\left[\Omega(C) + \int_a^t h(s)\,ds\right].$$

Din această relaţie decurge că $x \in \mathcal{E}$. De aici şi din (1) rezultă ca şi în teorema precedentă că $x \in A_c$. ∎

Corolarul 1. *Dacă ecuaţia,*

$$x(t) = b(t) + \int_a^t K(t,s)\,f(s, x(s))\,ds$$

satisface următoarele condiţii:

1) *are cel puţin o soluţie în* S_c *(resp.* $\mathcal{E}_c$*),*

2) *există o funcţie* g *continuă şi pozitivă pe* $\mathbf{R}_a$ *încît, pentru* $\forall\,(t,x) \in \mathbf{R}_a \times \Sigma$ *(resp.* $\mathbf{R}_a \times \mathbf{R}^p$*) să avem,* $\|f(t,x)\| \leqslant g(t)$,

3) *există o funcţie* $H \in W$ *încît pentru* $\forall\,(t,x) \in \mathbf{R}_a \times \Sigma$ *(resp.* $\mathbf{R}_a \times \mathbf{R}^p$*) să avem*

$$\|K(t,t)\,f(t,x) + b'(t)\| + \int_a^t \|K'_t(t,s)\|\,g(s)\,ds \leqslant H(t, \|x\|),$$

atunci orice soluţie $x \in S_c$ *(resp.* $\mathcal{E}_c$*) a acestei ecuaţii aparţine spaţiului* A_c.

Corolarul 2. *Dacă pentru ecuaţia diferenţială*

$$x'(t) = k(t,x)$$

există o funcţie $H \in W$ *încît pentru* $\forall\,(t,x) \in \mathbf{R}_a \times \mathbf{R}^p$ *să avem*

$$\|k(t,x)\| \leqslant H(t, \|x\|),$$

atunci orice soluţie $x \in \mathcal{E}_c$ *a acestei ecuaţii, aparţine spaţiului* A_c.

Acest corolar constituie o generalizare a unui rezultat din [5].

BIBLIOGRAFIE

1. Beckenbach E. F. and Bellman R. — *Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.
2. Corduneanu C. — *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, Annali di Matematica Pura ed Appl., serie 4, T. 67, 1965, p. 349-363.
3. Natanson I. P. — *Teoria funcţiilor de variabilă reală* (trad. din l. rusă), Ed. tehnică, Bucureşti 1957.
4. Walter W. — *Differential- und Integral-Ungleichungen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 1964.
5. Wintner A. — *An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria*. Amer. J. Math., 68, 1946, p. 451-454.

SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DES SOLUTIONS DE CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA DANS L'ESPACE FONCTIONNEL A_c

Résumé

On donne quelques théorèmes d'existence et d'unicité pour les solutions de certaines classes d'équations intégrales de type Volterra dans l'espace de Banach A_c des fonctions absolument continues qui possèdent des dérivées sommables sur le demiaxe $\mathbf{R}_+ = [a, \infty)$.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ANALYTIQUES

PAR

DORIN CIUMAŞU

1. **Introduction.** Il y a quelques années, on a donné un grand nombre de généralisations des théorèmes de Cauchy et de Kowalewsky [2, 3, 4, 7, 8, 10]. En utilisant diverses structures topologiques dans un anneau „de séries de puissances", on donnera dans ce travail une méthode fonctionnelle pour la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution pour des systèmes analytiques, sur un anneau. On remarque que la généralité de la méthode employée permet d'obtenir des théorèmes similaires pour des systèmes analytiques, sur un espace de Banach.

Les notions auxiliaires qu'on utilise dans la suite se trouvent traitées dans [1, 5, 6, 9, 11].

Notations. Soit $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$, N le monoïde additif des entiers positifs et $I = N^{\mathcal{J}}$ le monoïde produit. Dans l'ensemble I on considérera les relations suivantes comme définissant un ordre partiel: Si $m = (m_i)_{i \in \mathcal{J}}$, $m' = (m'_i)_{i \in \mathcal{J}} \in I$ alors:

a) $m \leqslant m'$ si $m_i \leqslant m'_i$ $(i \in \mathcal{J})$ et

b) $m < m'$ si $m \leqslant m'$ $m \neq m'$.

Si $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ alors on notera $|m|_{\mathcal{J}'} = \sum_{i \in \mathcal{J}'} m_i$ Si $m, m' \in I$ alors $m - m' = (m_i - m'_i)$, $m_i - m'_i = 0$ quand $m_i \leqslant m'_i$.

Soit R^*_+ l'ensemble des nombres réels strictement positifs et $\mathcal{J} = (R^*_+)^n$ l'ensemble produit. Pour $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathcal{J}}$, $\beta = (\beta_i)_{i \in \mathcal{J}} \in \mathcal{J}$ on notera: $\alpha \leqslant \beta$ si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ $(i \in \mathcal{J})$, et $\alpha \ll \beta$ si $\alpha_i < \beta_i$ $(i \in \mathcal{J})$.