BIBLIOGRAFIE

1. Beckenbach E. F. and Bellman R. — *Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.
2. Corduneanu C. — *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, Annali di Matematica Pura ed Appl., serie 4, T. 67, 1965, p. 349-363.
3. Natanson I. P. — *Teoria funcţiilor de variabilă reală* (trad. din l. rusă), Ed. tehnică, Bucureşti 1957.
4. Walter W. — *Differential- und Integral-Ungleichungen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 1964.
5. Wintner A. — *An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria*. Amer. J. Math., 68, 1946, p. 451-454.

SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DES SOLUTIONS DE CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA DANS L'ESPACE FONCTIONNEL A_c

Résumé

On donne quelques théorèmes d'existence et d'unicité pour les solutions de certaines classes d'équations intégrales de type Volterra dans l'espace de Banach A_c des fonctions absolument continues qui possèdent des dérivées sommables sur le demiaxe $\mathbf{R}_+ = [a, \infty)$.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ANALYTIQUES

PAR

DORIN CIUMAŞU

1. Introduction. Il y a quelques années, on a donné un grand nombre de généralisations des théorèmes de Cauchy et de Kowalewsky [2, 3, 4, 7, 8, 10]. En utilisant diverses structures topologiques dans un anneau „de séries de puissances", on donnera dans ce travail une méthode fonctionnelle pour la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution pour des systèmes analytiques, sur un anneau. On remarque que la généralité de la méthode employée permet d'obtenir des théorèmes similaires pour des systèmes analytiques, sur un espace de Banach.

Les notions auxiliaires qu'on utilise dans la suite se trouvent traitées dans [1, 5, 6, 9, 11].

Notations. Soit $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$, N le monoïde additif des entiers positifs et $I = N^{\mathcal{J}}$ le monoïde produit. Dans l'ensemble I on considérera les relations suivantes comme définissant un ordre partiel: Si $m = (m_i)_{i \in \mathcal{J}}$, $m' = (m'_i)_{i \in \mathcal{J}} \in I$ alors:

a) $m \leqslant m'$ si $m_i \leqslant m'_i$ $(i \in \mathcal{J})$ et

b) $m < m'$ si $m \leqslant m'$ $m \neq m'$.

Si $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ alors on notera $|m|_{\mathcal{J}'} = \sum_{i \in \mathcal{J}'} m_i$. Si $m, m' \in I$ alors $m - m' = (m_i - m'_i)$, $m_i - m'_i = 0$ quand $m_i \leqslant m'_i$.

Soit R^*_+ l'ensemble des nombres réels strictement positifs et $\mathcal{J} = (R^*_+)^n$ l'ensemble produit. Pour $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathcal{J}}$, $\beta = (\beta_i)_{i \in \mathcal{J}} \in \mathcal{J}$ on notera: $\alpha \leqslant \beta$ si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ $(i \in \mathcal{J})$, et $\alpha \ll \beta$ si $\alpha_i < \beta_i$ $(i \in \mathcal{J})$.

Par A on notera un anneau d'intégrité, commutatif, muni de la topologie définie par une valeur absolue complète non discrète (notée $|.|$) et par $F = A[[X_i]]_{i\in\mathcal{J}}$, l'anneau des séries formelles à n indeterminées, à coefficients dans A, et par $S = A\{X_i\}_{i\in\mathcal{J}} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} S_\alpha$, $S_\alpha = \{u \in F, \|u\|_\alpha < \infty\}$, $\|u\|_\alpha = \sum_{m\in I} \|u_m\| \alpha^m$, $u = (u_m)_{m\in I} \in F$, l'anneau des séries convergentes. Si p_m: $F \to A$, $(m \in I)$, sont les projections canoniques, alors *l'ordre d'une série formelle* est défini par $\omega(u) = \min_{p_m(u)\neq 0} |m|$ si $u \neq 0$ ($|m| = \sum_{i\in\mathcal{J}} |m_i|$) et $\omega(u) = +\infty$ si $u = 0$.

On notera $\omega_k(u) = q$, $q \in N$, $k \in \mathcal{J}$, si $p_m(u) = 0$, pour tout $m = (m_i)_{i\in\mathcal{J}} \in I$, avec $m_k < q$. *Alors l'ordre strict d'une série formelle est défini par:* $\Omega(u) = m$, $m = (m_i)_{i\in\mathcal{J}} \in I$ *si* $\omega_i(u) = m_i$ $(i \in \mathcal{J})$.

L'anneau F est un anneau d'intégrité et les ensembles $\mathfrak{M}_i^k = \{u \in F, \omega_i(u) \geqslant k\}$ $(i \in \mathcal{J})$, $\mathfrak{M}^k = \{u \in F, \omega(u) \geqslant k\}$, sont des idéaux dans F.

Dans F on considérera la $\mathfrak{M}_i$-topologie, la $\mathfrak{M}$-topologie et la topologie faible (topologie produit) de F. La $\mathfrak{M}_i$-topologie de F est strictement plus fine que la $\mathfrak{M}$-topologie de F. Elles coïncident si et seulement si $n = 1$. Muni d'une de ces topologies, F est un anneau topologique complet.

Dans S on considérera la topologie canonique, c'est-à-dire la topologie limite inductive de $S = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} s_\alpha$.

Si G est un ouvert dans A^n, on dira que l'application u: $G \to A$ est une application analytique sur G, s'il existe un $u_a \in S$ pour tout $a \in G$, tel que $u(x) = u_a(x - a)$, pour tout x d'un voisinage du point a.

2. Equations différentielles dans le cas formel. Préliminaires

La dérivation partielle d'ordre r $(r \in I)$ dans F est l'application D^r: $F \to F$, définie, par

$$p_m(D^r u) = \frac{(m+r)!}{m!} p_{m+r}(u),$$

$$u \in F,\ m = (m_i)_{i\in\mathcal{J}} \in I,\ m! = m_1!\, m_2! \dots m_n!$$

Proposition 1. *Pour tout* $u \in F$ *et tout* $s \in I$ *nous avons*

$$\omega_{\mathcal{J}'}(D^r u) \geqslant \omega_{\mathcal{J}'}(u) - |r|_{\mathcal{J}'},\quad \Omega_{\mathcal{J}'}(D^s u) \geqslant \Omega_{\mathcal{J}'}(u) - s_{\mathcal{J}'},\quad (\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}).$$

Pour tout $v \in F$ *il existe une série formelle unique* $u \in F$, *telle que* $\Omega(u) = r$, $D^r u = v$. Si $\Omega(v) = s$, *alors* $\Omega(u) = r + s$.

La proposition résulte immédiatement de la définition précédente et de la définition de l'ordre d'une série formelle.

Si $F_X = A[[X_i]]_{i\in\mathcal{J}}$, $F_Y = A[[Y_i]]_{i\in\mathcal{J}_1}$, alors pour tout $v = (v_i)_{i\in\mathcal{J}}$ $v_i \in F_Y$ $\omega(v_i) \geqslant 1$ $(i \in \mathcal{J})$, et pour tout $u = (u_m)_{m\in I} \in F_X$, la substitution régulière

$$u(V) = \sum_{(m_1 \dots m_n \in I)} u_{(m_1, m_2, \dots m_n)} v_1^{m_1} v_2^{m_2} \dots v_n^{m_n} = \sum_{m\in I} u_m V^m \in F_Y$$

est définie.

Proposition 2. *Pour tout* $u \in F_X$ *et tout* $V = (v_i)_{i\in\mathcal{J}}$, $W = (w_i)_{i\in\mathcal{J}}$, $v_i, w_i \in F_Y$, $\omega(v_i) \geqslant 1$, $\omega(w_i) \geqslant 1$ $(i \in \mathcal{J})$, nous avons

$$\omega(u(V) - u(W)) \geqslant \omega(V - W) = \inf_i \omega(v_i - w_i).$$

Évidemment l'affirmation est vraie pour l'ordre strict aussi.

Il en résulte la continuité de l'application $F_Y^n \to F_Y$ définie par $V \to u(V)$, $\omega(V) \geqslant 1$, $u \in F_X$ fixé (F_Y^n l'anneau produit).

Sistèmes d'équations aux dérivées partielles. Soit $\mathcal{J}_1 = \{1, 2, \dots p\}$ $\mathcal{J}_1(i) = \{1, 2, \dots, q(i)\}$, $q(i) \in N$ et pour tout $i \in \mathcal{J}_1$, $f_i \in A[[X_j, Z_k]]_{j\in\mathcal{J}, k\in\mathcal{J}_1(i)}$

On considère le système d'équations aux dérivées partielles

$$D^{r(i)} u_i = f_i(X, D^{s(i)} u) \qquad (i \in \mathcal{J}_1), \tag{1}$$

avec „les conditions initiales"

$$\Omega(u_i) = r(i),\ (i \in \mathcal{J}_1), \tag{2}$$

$r(i) \in I$ $(i \in \mathcal{J}_1)$, $D^{s(i)} u = \{D^{s(i,j)} u_j\}$ un certain ensemble fini ayant $q(i)$ éléments, $s(i, j) \in I$.

On suppose que

(I) *il existe un sous-ensemble* $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ *tel que* $|r(i)|_{\mathcal{J}'} > |s(j, i)|_{\mathcal{J}'}$ *pour tout* i, j.

Il est clair que dans ce cas la substitution qui apparait dans le membre droit du système (1) est définie pour tout $u_i \in A[[X_j]]_{j\in\mathcal{J}}$ qui satisfait aux conditions (2)

Théorème 1. *Si la condition* (I) *est satisfaite, alors il existe un élément* $U = (u_i)_{i\in\mathcal{J}_1}$ *unique en* F_X^p, *solution du problème* (1), (2).

Démonstration. De l'hypothèse (I) il resulte que

$$d = \inf_{i,j} \{|r(j)|_{\mathcal{J}'} - |s(i, j)|_{\mathcal{J}'}\} \geqslant 1.$$

Utilisons la méthode des approximations successives. Soit $\{u_i^{(k)}\}_{k\in N}$ $(i\in \mathcal{J}_1)$, la suite des séries formelles définie par

$$D^{r(i)}u_i^{(k+1)} = f_i(X, D^{S(i)}u^{(k)}) \tag{3}$$

$$\Omega(u_i^{(k+1)}) = r(i);\ i\in \mathcal{J}_1,\ k\geqslant 0 \tag{4}$$

et $u_i^{(0)} = 0,\ i\in \mathcal{J}_1$.

Démontrons par induction que

$$\omega_{\mathcal{J}'}(u_j^{(k+1)} - u_j^{(k)}) \geqslant kd + |r(j)|_{\mathcal{J}'},\ j\in \mathcal{J}_1,\ k\geqslant 0. \tag{5}$$

Pour $k=0$ cette relation devient $\omega_{\mathcal{J}'}(u_j^{(1)}) \geqslant |r(j)|_{\mathcal{J}'}$, d'après la condition (4) évidemment vraie. En supposant que cette relation a lieu pour tous les indices jusqu'à un k fixé, de la prop. 1, il résulte que

$$\omega_{\mathcal{J}'}(D^{s(i,j)}(u_j^{(k+1)} - u_j^{(k)}) \geqslant \omega_{\mathcal{J}'}(u_j^{(k+1)} - u_j^{(k)}) - |s(i,j)|_{\mathcal{J}'} \geqslant k.d + |r(j)|_{\mathcal{J}'}$$
$$- |s(i,j)|_{\mathcal{J}'} \geqslant (k+1)\,d$$

et donc en utilisant les relations (3) et la proposition 2,

$$\omega_{\mathcal{J}'}(D^{r(i)}(u_i^{(k+2)} - u_i^{(k+1)})) = \omega_{\mathcal{J}'}(f_i(X, D^{S(i)}u^{(k+1)}) - f_i(X, D^{S(i)}u^{(k)}) \geqslant$$
$$\inf_j\ \omega_{\mathcal{J}'}(D^{S(i,j)}(u_j^{(k+1)} - u_j^{(k)})) \geqslant (k+1)\,d$$

de façon que

$$\omega_{\mathcal{J}'}(u_i^{(k+2)} - u_i^{(k+1)}) \geqslant (k+1)\,d + |r(i)|_{\mathcal{J}'}$$

pour tout $i\in \mathcal{J}_1$, et donc la relation (5) est démontrée.

Ce résultat montre que

$$\omega_{\mathcal{J}'}(u_i^{(k+q)} - u_i^{(k)}) \geqslant k\,d + |r(i)|_{\mathcal{J}'},\ k\geqslant 0,\ q\geqslant 1. \tag{6}$$

Parce que $d\geqslant 1$, il résulte que $\{u_i^{(k)}\}_{k\in N}$, $(i\in \mathcal{J}_1)$, est une suite Cauchy dans la $\mathfrak{M}$-topologie de F. De la complétitude de F il résulte l'existence d'un élément $U = (u_i)_{i\in \mathcal{J}_1}\in F^p$, tel que $\lim_{k\to\infty} u_i^{(k)} = u_i$ $(i\in \mathcal{J}_1)$, dans la $\mathfrak{M}$-topologie de F et donc dans la topologie faible de F. De la continuité des applications de dérivation partielle et de substitution dans ces topologies il résulte que les $(u_i)_{i\in \mathcal{J}_1}$ satisfont à (1).

Pour la démonstration de l'unicité on considère encore la suite itérative $\{\bar{u}_i^{(k)}\}_{k\in N}$ $(i\in \mathcal{J}_1)$ définie par des relations similaires à (3) avec $\bar{u}_i^{(0)}$ $(i\in \mathcal{J}_1)$ arbitraire, $\Omega(\bar{u}_i^{(0)}) = r(i)$, $(i\in \mathcal{J}_1)$. Comme précédemment on démontrera la relation

$$\omega_{\mathcal{J}'}(u_i^{(k)} - \bar{u}_i^{(k)}) \geqslant kd + |r(i)|_{\mathcal{J}'},\ (i\in \mathcal{J}_1,\ k\geqslant 0_1).$$

Parce que $\lim u_i^{(k)} = u_i$ $(i\in \mathcal{J}_1)$, il résulte que

$$\omega_{\mathcal{J}'}(u_i - \bar{u}_i^{(k)}) \geqslant kd + |r(i)|_{\mathcal{J}'},\ i\in \mathcal{J}_1,\ k\geqslant 0,$$

c'est-à-dire $\lim \bar{u}_i^{(k)} = u_i$ $(i\in \mathcal{J}_1)$.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Remarques, 1) Il est clair que le théorème 1 s'applique sans modification quand $\mathcal{J}_1$ est un ensemble arbitraire d'indices.

2) En particulier, si $\mathcal{J}' = \{k\}$, $(k\in \mathcal{J})$, ou $\mathcal{J}' = \mathcal{J}$, on a une condition forte, ou faible, pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (1), (2), dans F.

3) On déduit de la relation (6) que

$$\omega_{\mathcal{J}'}(u_i - u_i^{(k)}) \geqslant kd + |r(i)|_{\mathcal{J}'},\ k\geqslant 0,$$

c'est-à-dire la solution exacte u_i et la solution approximative $u_i^{(k)}$ coïncident jusqu'au terme de degré $kd + |r(i)|_{\mathcal{J}'}$.

4) La condition (I) s'exprime encore de la façon suivante : (I'). Il existe un sous-ensemble $\mathcal{J}'\subset \mathcal{J}$ tel que si la suite $\{d_{\mathcal{J}'}^{(k)}(i)\}_{k\in N}$, est définie par

$$d_{\mathcal{J}'}^{(k+1)}(i) = \inf_j\ \{d_{\mathcal{J}'}^{(k)}(i) + r_{\mathcal{J}'}(j) - s_{\mathcal{J}'}(j,i)\},\ k\geqslant 0,$$
$$d_{\mathcal{J}'}^{(0)}(i) = 0\ (i\in \mathcal{J}_1),\ \text{alors}\ d_{\mathcal{J}'}^{(k)}(i) < d_{\mathcal{J}'}^{(k+1)}(i)\ (i\in \mathcal{J}_1).$$

3. Equations differentielles dans le cas analytique

Proposition 3. *Pour toutu*$\in S_\alpha$, $\Omega(u) = r$, *et tout* $s\in I$, $s\leqslant r$, *nous avons*

$$\|D^s u\|_\alpha \leqslant \alpha^{r-s}\|D^r u\|_\alpha\ \ (\alpha^r = \alpha_1^{r_1}\cdot\alpha_2^{r_2}\dots\alpha_n^{r_n})$$

Démonstration. Soit $u = (u_m)_{m\in I}\in S_\alpha$, $\Omega(u) = r$. Alors

$$\|D^s u\|_\alpha = \sum_{m\in I} \frac{m!}{(m-s)!} |u_m| \alpha^{m-s} = \alpha^{r-s} \sum_{m\in I} \frac{m!}{(m-s)!} |u_m| \alpha^{m-r} \leqslant$$

$$\alpha^{r-s} \sum_{m\in I} \frac{m!}{(m-r)!} |u_m| \alpha^{m-r} = \alpha^{r-s} \| D^r u\|_\alpha .$$

En particulier

$$\|u\|_\alpha \leqslant \alpha^r \|D^r u\|_\alpha \quad (r \in I, \Omega(u) = r). \tag{7}$$

Il résulte que pour tout $v \in S$ il existe une série unique $u \in S_\alpha$ telle que $\Omega(u) = r$, $D^r u = v$.

On considère le système d'équations aux dérivées partielles (1), avec les conditions (2).

Supposons que

(II) $s(j,i) \leqslant r(i)$, *pour tout* $i, j \in \mathcal{J}_1$

(III) f_i: $A^{n+q(i)} \to A$, $(i \in \mathcal{J}_1)$, *sont des fonctions analytiques dans un certain voisinage de l'origine de* $A^{n+q(i)}$.

Théorème 2. *Étant donné le système* (1), (2), *avec les conditions* (I), (II), (III), *alors il existe une famille unique de fonctions* $(u_i)_{i\in\mathcal{J}_1}, u_i$: $A^n \to A$, *analytiques dans un voisinage de l'origine de* A^n, *solution du problème* (1), (2).

Démonstration. Nous utiliserons la méthode des approximations successives. Soit $\{u_i^{(k)}\}_{k\in N}$ $(i \in \mathcal{J}_1)$ la suite définie par (3), (4), D'après le théorème I il résulte que $\lim_{k\to\infty} u_i^{(k)} = u_i$ $(i \in \mathcal{J}_1)$, dans la $\mathfrak{M}$-topologie de F, donc aussi dans la topologie faible.

De l'hypothèse (III) il résulte qu'il existe un $(\alpha, \beta(i)) \in \mathcal{J}_{n+q(i)}$, $(i \in \mathcal{J}_1)$, tel que

$$\|f_i\|_{\alpha,\beta(i)} \leqslant M_i, \quad (i \in \mathcal{J}_1).$$

Si on suppose que p est fini, alors sans restreindre la généralité du problème on peut choisir toujours $\alpha, \beta(i)$ et M_i, tels que

$$\alpha^{r(i)-s(j,i)} M_i \leqslant \beta_i(j), \quad i,j \in \mathcal{J}_1. \tag{8}$$

On démontrera par induction que

$$\|D^{r(i)} u_i^{(k)}\|_\alpha \leqslant M_i, \quad k \in N, \ i \in \mathcal{J}_1. \tag{9}$$

Évidemment la relation (9) est satisfaite pour $k = 0$.

En général, d'après la proposition 3, et la relation (8) il résulte

$$\|D^{s(j,i)} u_i^{(k)}\|_\alpha \leqslant \alpha^{r(i)-s(j,i)} M_i \leqslant \beta_i(j).$$

Alors $D^{r(j)} u_j^{(k+1)} \in S_\alpha$, et donc

$$\|D^{r(j)} u_j^{(k+1)}\|_\alpha \leqslant M_j, \quad (i \in \mathcal{J}_1)$$

(th. 4,3 de [5], p.42) et ainsi la relation (9) est démontrée. D'après (7) cela revient à

$$\|u_i^{(k)}\|_\alpha \leqslant \alpha^{r(i)} M_i, \quad k \in N, \ i \in \mathcal{J}_1.$$

Cela prouve que la suite $\{u_i^{(k)}\}_{k\in N}$ est bornée dans S_α. Étant convergente dans la topologie faible de F, à un élément $(u_i)_{i\in\mathcal{J}_1}$, il résulte que $u_i \in S_\alpha$ $(i \in \mathcal{J}_1)$, et pour tout $\gamma \ll \alpha$, $\lim_{k\to\infty} u_i^{(k)} = u_i$ $(i \in \mathcal{J}_1)$ dans la topologie canonique de S_γ (th. 4,2 de [5], p.40).

De la continuité des applications de dérivation partielle et de substitution il résulte que les $(u_i)_{i\in\mathcal{J}_1}$ satisfont à (1).

D'autre part, il est clair que les u_i $(i \in \mathcal{J}_1)$ définissent des applications u_i: $A^n \to A$, analytiques dans un certain voisinage de l'origine de A^n, des solutions de (1), (2).

Remarques. 1) Si p est infini alors le théorème est applicable aux systèmes dont on peut déterminer $\alpha, \beta(i)$ et M_i, tels que la relation (8) soit satisfaite. Cette condition est satisfaite, si on suppose que les fonctions f_i sont également bornées et que toute fonction u_i intervient seulement dans un nombre fini d'équations.

2) S'il existe $n' < n$ tel que $r_k(i) = 0$ pour tout $k > n'$, alors du th. 2 il résulte que la solution du système est une fonction analytique des paramètres $X_{n'+1}, X_{n'+2}, \ldots, X_n$. En particulier il en résulte que la solution est une fonction analytique des données initiales.

3) Si on considère le problème (1), (2) sur un corps K, alors les dérivées qui interviennent sont des dérivées partielles usuelles. Si $A = R$ ou $A = C$, le théorème reste valable. Remarquons aussi le cas d'un anneau matriciel et le cas d'un anneau (ou d'une algèbre normée) de fonctions.

4) Soit E un espace de Banach sur le corps K, $F_1 = \prod_{m\in I} E_m$, $(E_m = E)$ $(m \in I)$, l'espace produit, φ: $E \times E \to E$ une application bilinéaire continue. Alors le couple $F = (F_1, \varphi)$ peut être identifié avec un anneau de séries formelles avec la multiplication définie par

$$u.v = \Big(\sum_{m'+m''=m}^{\varphi} (u_{m'}, v_{m''})\Big)_{m\in I}, \quad u = (u_m)_{m\in I}, \ v = (v_m)_{m\in I}.$$

Ainsi le système (1), (2) peut être considéré sur un espace de Banach, le théorème 2 étant valable aussi dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Algèbre*, Chap. 4,§5, Hermann, Paris, 1959.
2. Friedmann A. — *A new proof and generalization of the Cauchy-Kovalewski theorem* Trans. Amer. Math. Soc., t. 98 (1961), pp. 1—20.
3. Gårding L. — *Une variante de la méthode de majoration de Cauchy*. Acta Math., t. 114. (1965), pp. 143—158.
4. Haimovici A. — *Sur la résolution de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles qui généralisent les systèmes de Cauchy-Kowalewski*. Publ. Math., t. 9 (1962), pp. 197—212.
5. Jurchescu M. — *Teoria locală a funcţiilor de mai multe variabile complexe*. Ed. Acad. R. S. România, 1965, pp. 11—67.
6. Jurchescu M. — *On the canonical topology of an analytic module*. Bull. Soc. Math. de France, t. 93 (1965), pp. 129—153.
7. Lednev N.A. — *A new method for solving partial differential equations*. Mat. Sb., t. 22 (64) (1964), pp. 205—259.
8. Persson J. — *New proof and generalizations of two theorems by Lednev for Goursat problems*. Math. Annalen, t. 178 (1968), pp. 184—208.
9. Radu N. — *Inele locale*. Vol. I, II. Ed. Acad. R. S. România, 1968, 1970. Cap. VI; § 2; Cap. X, § 1.
10. Rosenbloom P.C. — *The majorant method*. Proc. Symp. Pure Math., t. IV, Part Diff. Eq. A.M.S., Providence R.I. 1961.
11. Zariski O., Samuel P. — *Commutative algebra*. Vol. II. Princeton, 1960.

ASUPRA ECUAŢIILOR CU DERIVATE PARŢIALE ANALITICE

Rezumat

Sînt considerate sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale de forma (1) (2). Se dau teoreme de existenţă şi unicitate în inelul seriilor formale $F = A[[X_i]]_{1 \leq i \leq n}$ (teorema 1), în inelul seriilor convergente $S = A\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ şi implicit în clasa funcţiilor analitice pe un inel (respectiv corp) (teorema 2). De asemenea se indică o posibilitate de tratare a unor astfel de probleme în spaţii Banach, generalizare care va fi aprofundată într-o lucrare ulterioară.

OPERATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS FORTEMENT PARTIELLEMENT PSEUDO-LOCAUX

PAR

T. JUCAN

Dans [1] Robert J. Elliott a étudié les opérateurs différentiels à peu près hypoelliptiques. Pour généraliser cette notion aux opérateurs pseudo-différentiels nous avons étudié les conditions auxquelles doit satisfaire le symbole $a(x, \xi)$ de sorte que l'opérateur pseudo-différentiel qui lui correspond soit un opérateur pseudo-différentiel partiellement fortement pseudo-local (à peu près pseudo-local).

Notations. Dans ce qui suit on va employer les notations suivantes:

Par $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ on a noté des points de R^n. On va séparer x et ξ en deux groupes $x = (x', x'')$ et $\xi = (\xi', \xi'')$ où $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $x'' = (x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)$; $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ et $\xi'' = (\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_n)$ donc $R^n = R^p \times R^{n-p}$. Soit $f(x, \xi)$ une fonction de $2n$ variables. On note par D les dérivées par rapport aux premières n variables et par ∂ les dérivées par rapport aux dernières n variables.

Soit Ω un ouvert de R^n.

$\mathcal{E}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables définies dans Ω et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions qui appartiennent à $\mathcal{E}(\Omega)$ à support compact. Par $\mathcal{S}(\Omega)$ on désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables telles que:

$\sup_{x \in \Omega} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty$, pour tous α et β.

$\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{S}'(\Omega)$ sont les duals de $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{S}(\Omega)$ dans les topologies usuelles.

Par $\mathcal{S}$ on désigne l'espace $\mathcal{S}(R^n)$. Pour $u \in \mathcal{S}$ on note $\tilde{u}(\xi)$ la transformée Fourier de $u(x)$.

Dans l'espace $\mathcal{S}(\Omega)$ nous introduisons la norme $\|u\|^2_{s,t} = \int (1 + |\xi'|^2)^s \times (1 + |\xi''|^2)^t |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi$ où t et s sont réels.