3. Gheorghiev G. — *Sur les prolongements réguliers des espaces fibrés et les groupes de Lie associés*, ibid., 1968, *266*, A 65–68.
4. Jevtušik L. E. — *Diferencial'nyje svjaznosti i infinitesimal'nyje preobrazovanija prodolzennoj psevdogrupy*, Trudy Geometr. Sem., II, 1969, 119–150.
5. Kolář I. — *Geometric objects of submanifolds of a space with fundamental Lie pseudogroup*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 1970, *11*, 227–234.
6. Kolář I. — *Canonical forms on the prolongations of principal fibre bundles*, Rev. Roumaine math. Pures Appl., 1971, 16, 1091–1106.
7. Laptev G. F. — *Teoretiko-gruppovoj metod differencial'no-geometriceskich issledovanij*, Tr. 3-go Vses. matem. s'ezda. t. 3, AN SSSR, 1958, 409–418.
8. Szybiak A. — *Covariant differentiation of geometric objects*, *Dissertationes Mathematicae*, LVI, Warszawa 1967.
9. Virsik J. — *A generalized point of view to higher order connections on fibre bundles*, Czechoslovak Math. J., 1969, *19*, 110–142.

DESPRE PRELUNGIRILE CÎMPURILOR DE OBIECTE GEOMETRICE

Rezumat

Scopul lucrării este de a descrie un algoritm natural pentru prelungirile cîmpurilor de obiecte geometrice. Acest algoritm este bazat pe lucrările lui Cartan, pe unele cercetări ale lui G. F. Laptev și pe noțiunea de formă canonică definită pe prelungirea unui spațiu fibrat principal.

LE PLONGEMENT NATUREL ET NON HOLONOME DE L'ESPACE PROJECTIF SEMIANTIQUATERNIONIQUE

PAR

EFTIMIE GRECU

On considère le problème du plongement naturel et non holonome de l'espace projectif semiantiquaternionique à n dimensions $P_n(e, \varepsilon)$ et on trouve sa métrique naturelle en montrant que cette métrique coïncide avec la métrique d'une variété non holonome V^{4n}_{4n+3} située sur une hypersphère S_{4n+3} de l'espace semieuclidien $E^{n+1,\,2n+2}_{4n+4}$ et définie par un système de trois équations pfaffiennes.

Introduction. Selon un résultat de Mannoury [1], on sait que l'espace projectif complexe à n dimensions $P_n(i)$ peut être considéré comme une variété d'un espace euclidien à $(n+1)^2$ dimensions. D'autre part [2] on sait que la métrique naturelle de $P_n(i)$ coïncide avec la métrique d'un espace non holonome V^{2n}_{2n+1} situé sur une hypersphère S_{2n+1} de l'espace euclidien E_{2n+2}. On obtient ainsi ce qu'on appelle ([3], p. 367) un plongement non holonome de l'espace $P_n(i)$, obtenu à l'aide d'une équation de Pfaff et d'une équation complètement intégrable.

Des propriétés analogues sont aussi valables pour l'espace projectif quaternionique $P_n(i, j)$. Dans ce cas, le plongement naturel a lieu dans un espace euclidien à $(n+1)(2n+1)$ dimensions et le plongement non holonome est obtenu à l'aide d'un système de quatre équations pfaffiennes dont une complètement intégrable, la métrique de l'espace $P_n(i, j)$ étant égale à la métrique d'une variété non holonome V^{4n}_{4n+3} située sur une hypersphère S_{4n+3} de l'espace euclidien E_{4n+4} [4].

Le but de cet article est de voir de quelle manière ces considérations peuvent être élargies au cas de l'espace projectif sur l'algèbre des semiantiquaternions.

1. Le plongement naturel de l'espace projectif semiantiquaternionique. Dans l'exposé suivant on considérera le problème du plongement naturel de l'espace projectif semiantiquaternionique à n dimensions $P_n(e, \varepsilon)$ et on déterminera sa métrique naturelle.

Soit l'algèbre des semiantiquaternions $A_4(e_1, e_2, e_3, e_4)$ sur le corps des nombres réels. C'est une algèbre de rang quatre, associative, à élément unité, non commutative, à diviseur de zéro, ayant la tableau de multiplication de Cayley des éléments de la base ([5], p. 226).

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	$-e_4$	0	0
e_4	e_4	$-e_3$	0	0

Si nous notons

$$e_1 = 1, \quad e_2 = e, \quad e_3 = \varepsilon, \quad e_4 = \zeta,$$

nous avons donc les relations

$$e^2 = 1 = \varepsilon^2 = \zeta^2 = 0, \quad e\varepsilon = -\varepsilon e = \zeta, \quad e\zeta = -\zeta e = \varepsilon, \quad \varepsilon\zeta = \zeta\varepsilon = 0.$$

L'élément e est un élément involutif et ε, ζ sont des éléments nilpotents. Un élément de l'algèbre a donc la forme :

$$x = a + eb + \varepsilon c + \zeta d,$$

où a, b, c, d sont des nombres réels, le conjugué de x étant l'élément

$$\bar{x} = a - eb - \varepsilon c - \zeta d.$$

Si la seminorme de x est définie par la relation

$$N(x) = \| x \| = \sqrt{x\bar{x}},$$

alors $N(x) = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Si nous considérons encore l'élément de l'algèbre

$$y = a' + eb' + \varepsilon c' + \zeta d',$$

alors il est facile de montrer qu'on obtient les formules

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}, \quad N(xy) = N(x)\,N(y).$$

L'espace projectif semiantiquaternionique à n dimensions $P_n(e, \varepsilon)$, associé à l'algèbre des samiantiquaternions est l'espace dont les points sont définis à l'aide de $(n+1)$ coordonnées semiantiquaternioniques homogènes $y_0, \ldots, y_{n+1}$.

On va montrer maintenant que l'espace $P_n(e, \varepsilon)$ admet un plongement topologique différentiable dans un espace semieuclidien.

On sait ([6], p. 44) que l'espace semieuclidien à n dimensions, à indice l et défaut d, noté $E_n^{l,d}$ est un espace dont les points et les vecteurs satisfont aux mêmes axiomes que l'espace euclidien, excepté l'axiome relatif au carré scalaire d'un vecteur qui est remplacé par l'axiome :

Le carré scalaire d'un vecteur x de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ est une forme quadratique dégénérée de ses coordonnées, à indice l et défaut d; donc, par un choix convenable de la base, cette forme quadratique peut être réduite à la forme canonique

$$(x, x) = -(x^1)^2 - \ldots - (x^l)^2 + (x^{l+1})^2 + \ldots + (x^{n-d})^2.$$

Pour $l = 0$, quand cette forme quadratique est demidéfinie, on obtient l'espace semieuclidien à n dimensions à défaut d, noté $E_n^{0,d}$. Les espaces $E_n^{0,d}$ ont été considérés pour la première fois par Sommerville [7].

Considérons l'espace semieuclidien $E_N^{p,q}$ $(X_h, X_{hk}, Y_{hk}, U_{hk}, V_{hk})$ $[N = (n+1)(2n+1)$, $p = n(n+1)/2$, $q = n(n+1)]$, dont la métrique a la forme

$$ds^2 = dX_h^2 + dX_{hk}^2 - dY_{hk}^2 \quad (h, k = 0, \ldots, n; \quad h < k), \tag{1}$$

où l'on fait la somme par rapport aux indices h, k. Soit dans l'espace $E_N^{p,q}$ la variété L définie par les formules

$$X_h = \frac{1}{\sqrt{2}} \| y_h \|, \quad X_{hk} + eY_{hk} + \varepsilon U_{hk} + \zeta V_{hk} = y_h y_k, \tag{2}$$

où les coordonnées y_h satisfont à la condition de normalisation

$$\| y_0 \|^2 + \ldots + \| y_n \|^2 = 1, \tag{3}$$

relation qui reste invariante quand nous multiplions y_h par un facteur de seminorme égale à 1. De (2) et (3) il résulte

$$X_0 + \ldots + X_n = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{4}$$

$$X_h^2 + X_{hk}^2 - Y_{hk}^2 = \frac{1}{2} \quad \text{(sommer par rapport à } h, k). \tag{5}$$

formules qui montrent que la variété L se trouve sur la variété V_{N-2} d'intersection de l'hypersphère (5) et de l'hyperplan (4).

Il est facile de montrer que les formules (2) établissent une correspondance topologique entre l'espace projectif $P_n(e, \varepsilon)$ et L.

Considérons maintenant les points de $P_n(e, \varepsilon)$ pour lesquels $\| y_0 \| \neq 0$ et prenons, pour coordonnées de ces points, les coordonnées non homogènes z_r données par les relations

$$y_h = z_r\, y_0 \,. \tag{6}$$

Si l'on tient compte de (2), (3), on obtient les formules

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{z}\,, \quad X_r = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\| z_r \|^2}{z}\,; \tag{7}$$

$$X_{0s} + eY_{0s} + \varepsilon U_{0s} + \zeta V_{0s} = \frac{\bar{z}_s}{z}\,, \quad X_{rs} + eY_{rs} + \varepsilon U_{rs} + \zeta V_{rs} = \frac{z_r \bar{z}_s}{z}\,,$$

où nous avons noté

$$z = 1 + \| z_r \|^2 \quad \text{(sommer par rapport à } r\text{)}, \ (r, s = 1, \ldots, n\,;\ r < s). \tag{7'}$$

La métrique (1) de l'espace $E_N^{p,q}$ peut être écrite aussi sous la forme :

$$ds^2 = dX_0^2 + dX_r^2 + dX_{0s}^2 - dY_{0s}^2 + dX_{rs}^2 - dY_{rs}^2\,, \tag{1'}$$
(sommer par rapport à r et s)

et par la différentiation des formules (7) on obtient

$$dX_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{dz}{z^2}\,, \quad dX_r = \frac{1}{\sqrt{2}\,z^2}\cdot\left[2z\,\mathrm{Re}\,(z_r\, d\bar{z}_r) - \| z_r \|^2\, dz\right]$$

$$dX_{0s} + ed\,Y_{0s} + \varepsilon dU_{0s} + \zeta dV_{0s} = z^{-2}\ (z d\bar{z}_s - \bar{z}_s\, dz).$$

$$dX_{rs} + edY_{rs} + \varepsilon dV_{rs} + \zeta dV_{rs} = z^{-2}\cdot\left[z\,(z_r d\bar{z}_s + dz_r \bar{z}_s) - z_r \bar{z}_s\, dz\right]$$
(ne pas sommer)

et la métrique (1′) devient

$$ds^2 = \frac{1}{2z^4}\cdot\{2\,[\mathrm{Re}\,(z_r d\bar{z}_r)^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_r d\bar{z}_r z_s d\bar{z}_s) + \| dz_s \|^2 + \| z_r \|^2 \| dz_r \|^2 +$$

$$\| z_r \|^2 \| dz_s \|^2 + \| z_s \|^2 \cdot \| dz_r \|^2]z^2 - 4\,[\mathrm{Re}\,(z_s d\bar{z}_s) + \| z_r \|^2\,\mathrm{Re}\,(z_r d\bar{z}_r) +$$

$$+ \| z_s \|^2\,\mathrm{Re}\,(z_r d\bar{z}_r) + \| z_r \|^2\,\mathrm{Re}\,(z_s d\bar{z}_s)]z dz + (1 + \| z_r \|^4 + 2\,\| z_s \|^2 +$$

$$+ 2\,\| z_r \|^2 \| z_s \|^2) dz^2\}. \ \text{(sommer par rapport à } r \text{ et } s\text{)}.$$

Si nous notons

$$A = \| dz_r \|^2\,, \quad B = \| \bar{z}_r\, dz_r \|^2 \ \text{(sommer d'après } r\text{)}$$

et si nous tenons compte de (7′), nous obtenons les formules

$$dz = 2\,\mathrm{Re}\,(z_r\, d\bar{z}_r)\,, \quad (z - 1)^2 = \| z_r \|^4 + 2\,\| z_r \|^2 \| z_s \|^2,$$

$$(z - 1)\, dz = 2\,[\| z_r \|^2\,\mathrm{Re}\,(z_r d\bar{z}_r) + \| z_r \|^2\,\mathrm{Re}\,(z_s d\bar{z}_s) + \| z_s \|^2\,\mathrm{Re}\,(z_s dz_r)],$$

$$dz^2 - 2B = 2\,[\mathrm{Re}\,(z_r d\bar{z}_r)^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{z}_r\, dz_r \bar{z}_s\, dz_s),$$

et la métrique de l'espace projectif $P_n(e, \varepsilon)$ devient

$$ds^2 = \frac{A}{z} - \frac{B}{z^2}\,,$$

qui s'écrit d'ailleurs sous la forme

$$ds^2 = \frac{\| dz_r \|^2}{1 + \| z_r \|^2} - \frac{\| \bar{z}_r dz_r \|^2}{(1 + \| z_r \|^2)^2}\,. \tag{8}$$

On peut donc énoncer la théorème suivant :

Théorème. *Les formules* (2) *réalisent un plongement topologique différentiable de l'espace projectif semiantiquaternionique* $P_n(e, \varepsilon)$ *dans l'espace semi-euclidien* $E_N^{p,q}$ *et ce plongement conduit à la métrique naturelle* (8) *de* $P_n(e, \varepsilon)$.

Il faut observer maintenant que la métrique (8) a été obtenue dans l'hypothèse qu'il y a $\| y_0 \| \neq 0$, donc elle est valable dans le voisinage de l'espace $P_n(e, \varepsilon)$ ou $z_1, \ldots, z_n$ sont des coordonnées non homogènes. Si nous considérons le voisinage où il y a $\| y_1 \| \neq 0$ et si nous considérons les coordonnées $z'_1, \ldots, z'_n$ données par les relations

$$y_0 = z'_1\, y_1\,, \quad y_2 = z'_2\, y_1, \ldots, y_n = z'_n\, y_1,$$

alors si nous effectuons des calculs analogues, nous obtenons la métrique

$$ds^2 = \frac{\| dz'_r \|^2}{1 + \| z'_r \|^2} - \frac{\| \bar{z}'_r\, dz'_r \|^2}{(1 + \| z'_r \|^2)^2}\,.$$

La métrique (8) est donc invariante par rapport à une transformation projective ayant la forme

$$z'_1 = z_1^{-1}\,, \quad z'_2 = z_2 z_1^{-1}, \ldots, z'_n = z_n z_1^{-1}\,,$$

ce qui peut être vérifié aussi par un calcul direct.

Si l'on introduit maintenant les coordonnées réelles $x^1, \ldots x^{4n}$ données par les relations

$$z_r = x^{4r-3} + ex^{4r-2} + \varepsilon x^{4r-1} + \zeta x^{4r} \quad (r = 1, \ldots, n),$$

alors on peut voir facilement que la métrique (8) devient

$$ds^2 = \frac{\varepsilon_\alpha\,(dx^{4r-\alpha})^2}{1 + x} - \frac{(\varepsilon_\alpha x^{4r-\alpha}\ dx^{4r-\alpha})^2 - W^2}{(1 + x)^2} \tag{8'}$$

où nous avons noté

$$x = \varepsilon_\alpha (x^{4r-\alpha})^2, \quad W = [x^{4r-3}\, x^{4r-2}], \quad \varepsilon_\alpha = \begin{cases} 0, \text{ pour } = 0, 1 \\ -1, \text{ pour } = 2 \\ +1, \text{ pour } = 3, \end{cases}$$

d'où le

Théorème : *L'espace projectif semiantiquaternionique $P_n(e, \varepsilon)$ est une variété différentiable qui peut être recouverte par $n+1$ voisinages, chaque voisinage contenant les points dont l'une des coordonnées $y_0 \ldots y_n$ a la seminorme non nulle ; dans le voisinage dont, $\| y_0 \| \neq 0$, l'expression locale de la métrique naturelle est* (8) *et dans les coordonnées réelles $x^1 \ldots x^{4n}$ elle est* (8').

2. Le plongement non holonome de l'espace projectif semiantiquaternionique. Dans ce qui suit, on va démontrer que la métrique naturelle (8) de l'espace projectif semiantiquaternionique $P_n(e, \varepsilon)$ coïncide avec la métrique d'une variété non holonome V^{4n}_{4n+3} située sur une hypersphère S_{4n+3} de l'espace semieuclidien $E^{n+1,\, 2n+2}_{4n+4}$.

C'est pourquoi on va introduire les coordonnées réelles $v^1 \ldots v^{4n+4}$ par les relations

$$y_h = v^{4h+1} + e v^{4h+2} + \varepsilon v^{4h+3} + \zeta v^{4h+4}, \quad (h = 0 \ldots n).$$

Dans ce cas la condition de normalisation (3) doit être écrite sous la forme

$$\varepsilon_\alpha (v^{4h+4-\alpha})^2 = 1 \tag{3'}$$

et cette équation définit dans l'espace semieuclidien dont la métrique a la forme

$$ds^2 = \varepsilon_\alpha (dv^{4h+4-\alpha})^2 \tag{9}$$

une hypersphère S_{4n+3}.

Considérons maintenant la variété non holonome V^{4n}_{4n+3} située sur l'hypersphère S_{4n+3} et définie par l'équation symplectique

$$\bar{y}_h\, d\, y_h = 0, \quad \text{(sommer par rapport à } h\text{)}, \tag{10}$$

qui dans les variables réelles $v^1 \ldots v^{4n+4}$ s'écrit sous la forme

$$d\omega = [v^{4h+1}\, v^{4h+2}] = 0, \quad d\omega_1 = [v^{4h+1}\, v^{4h+3}] - [v^{4h+2} v^{4h+4}] = 0, \tag{11}$$

$$d\omega_3 = [v^{4h+1}\, v^{4h+4}] - [v^{4h+2}\, v^{4h+3}] = 0$$

si l'on considère que sur l'hypersphère S_{4n+3} il y a la relation

$$\varepsilon_\alpha\, v^{4h+4-\alpha}\, dv^{4h+4-\alpha} = 0 \quad \text{(sommer par rapport à } h \text{ et } \alpha\text{)}. \tag{12}$$

Compte tenu que les variables réelles $v^1 \ldots v^{4n+4}$ sont liées par les relations (3'), (11), il résulte que la métrique (9) qui peut être écrite encore

$$ds^2 = \| dy_h \|^2 \quad \text{(sommer par raport à } h\text{)} \tag{9'}$$

est un métrique en $4n$ variables indépendantes et elle représente la métrique du sous-espace non holonome V^{4n}_{4n+3} défini par le système de Pfaff (10) sur l'hypersphère S_{4n+3} de l'espace $E^{n+1,\, 2n+2}_{4n+4}$.

Si nous considérons

$$y_h = \rho_h\, \sigma_h \; (\rho_h = \| y_h \|, \quad \| \sigma_h \| = 1),$$

alors les formules (3), (9'), (10') deviennent respectivement

$$\rho_0^2 + \rho_r^2 = 1, \tag{3''}$$

$$ds^2 = d\rho_h^2 + \rho_h^2 \| d\sigma_h \|^2, \quad \text{(sommer)} \tag{9''}$$

$$\rho_h^2\, \sigma_h\, d\sigma_h = 0. \tag{10'}$$

Si nous procédons au changement de variables

$$\sigma_0 = \tau_0, \quad \sigma_r = \tau_r\, \tau_0 \quad (\| \tau_r \| = 1),$$

alors il est facile de montrer que les formules (9''), (10') peuvent être écrites encore sous la forme :

$$ds^2 = d\rho_0^2 + d\rho_r^2 + \rho_r^2 \| d\tau_r \|^2 - \| \rho_r^2\, \tau_r\, d\tau_r \|^2, \tag{9'''}$$

$$\tau_0\, d\tau_0 + \rho_r^2\, d\, \tau_r\, \tau_r = 0. \tag{10''}$$

Considérons maintenant la projection centrale de l'hypersphère S_n de l'espace euclidien $E_{n+1}(\rho_0 \ldots \rho_n)$ sur l'hyperplan tangent (dont nous désignons par u_r les coordonnées) au pôle Nord $N(\rho_h = \delta^0_h)$. On obtient facilement les relations

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \rho_r = \frac{u_r}{\sqrt{u}}, \quad d\rho_0^2 + d\rho_r^2 = \frac{du_r^2}{u} - \frac{(u_r\, du_r)^2}{u^2}, \quad (u = 1 + u_r^2)$$

et la métrique (9''') devient

$$ds^2 = \frac{du_r^2 + u_r^2 \| d\tau_r \|^2}{u} - \frac{(u_r\, du_r)^2 + \| u_r^2\, \bar{\tau}_r\, d\tau_r \|^2}{u^2}.$$

Si nous passons finalement aux coordonnées

$$z_r = u_r \tau_r,$$

alors on peut montrer facilement que cette métrique s'écrit, sous la forme

$$ds^2 = \frac{\| dz_r \|^2}{1 + \| z_r \|^2} - \frac{\| \bar{z}_r\, dz_r \|^2}{(1 + \| z_r \|^2)^2}$$

qui est identique à la métrique naturelle (8) de l'espace projectif $P_n(e, \varepsilon)$.

On peut donc énoncer le

Théorème. *La métrique naturelle de l'espace projectif semiantiquaternionique $P_n(e, \varepsilon)$ peut être considérée comme la métrique d'une variété non holonome V^{4n}_{4n+3} définie sur l'hypersphère S_{4n+3} de l'espace semieuclidien $E^{n+1,2n+2}_{4n+4}$ par un système de trois équations pfaffiennes.*

On obtient donc ce qui s'appelle [2] un plongement non holonome de l'espace projectif semiantiquaternionique $P_n(e, \varepsilon)$ dans l'espace $E^{n+1,2n+2}_{4n+4}$, obtenu à l'aide du système de Pfaff (11) et de l'équation completement intégrable (12).

BIBLIOGRAPHIE

1. Mannoury G. — *Surfaces-images.* Nieuw Archief voor Wiskunde (2), 4 (1898), 112–129.
2. Vrănceanu Gh. — *Varietà differenziabili e imersioni degli spazi proiettivi.* Rendi, conti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. vol. XXXIII, 1963 p. 1–17.
3. Vrănceanu Gh. — *Lecții de geometrie diferențială.* vol. II, Editura didactică și pedagogică, Buc., 1964.
4. Teleman C. — *Sur certains espaces symétriques.* Bulletin Scientifique, Acad. R.P.R., t. VII, 1955, p. 987–1002.
5. Creangă I., Haimovici C. — *Algebră liniară.* Editura de stat didactică și pedagogică, Buc., 1962.
6. Rozenfeld B. A. — *Neevklidovi gheometrii.* Moscva, 1955.
7. Sommerville D. M. Y. — *Classification of geometries with projective metric.* Proc. Edinburg Math. Soc., 28, 1910, 2⁵–41.

SCUFUNDAREA NATURALĂ ȘI NEOLONOMĂ A SPAȚIULUI PROIECTIV SEMIANTICUATERNIONIC

Rezumat

Se consideră problema scufundării naturale și neolonome a spațiului proiectiv semianticuaternionic cu n dimensiuni $P_n(e, \varepsilon)$ și se găsește metrica sa naturală, arătîndu-se că această metrică coincide cu metrica unei varietăți neolonome V^{4n}_{4n+3}, situată pe o hipersferă S_{4n+3} din spațiul semieuclidian $E^{n+1,2n+2}_{4n+4}$ și definită de un sistem de trei ecuații Pfaff.

ON Φ-TRANSFORMATIONS

BY

CONSTANTIN N. UDRIȘTE

Communicated at the Jubilee Scientific Session of the Al. I. Cuza-University Iași 20–25 august 1970

§ 0. Introduction. Sasaki [5, p. 21–2] proved that the set of all automorphisms of an almost cocomplex (or almost contact) compact manifold is a Lie group. On the other hand, Tanno [5, p. 25–1] showed that this property is valid for the group of all Φ-transformations over a contact manifold. But it seems still open the problem of finding the conditions under what a subset of all Φ-transformations over an almost cocomplex compact manifold is a Lie group. The Lemma 2.2 and the condition (I) gives an answer to this problem by the same method of proof as Sasaki's. The other results in § 2 and § 3 are consequences of this fact.

Sasaki [5, p. 23–2] proved that every $(2m+1)$-dimensional Lie group admits a left invariant almost cocomplex structure. Analogously, in § 4 we prove that a $(4n+3)$-dimensional Lie group admits a left invariant almost coquaternion structure.

Throughout this paper, all differentiable manifolds and mappings are understood to be of class C^∞.

§ 1. Almost cocomplex structures and almost coquaternion structures. 1. Let M^{2m+1} be a differentiable manifold of dimension $2m+1$. *A* (Φ, ξ, η) *-structure* or an *almost contact structure* or an *almost cocomplex structure* on M^{2m+1} is, by definition, a triple (Φ, ξ, η) where Φ is a tensor field of type (1, 1), ξ is a vector field and η is a 1-form on M^{2m+1} such that

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi^2 = -\mathrm{id} + \xi \otimes \eta. \tag{1}$$

The relations (1) imply