NORMAREA GRUPULUI COMPLET DE SPINORI

DE

AGNETA VESCAN

Să considerăm un spaţiu euclidian complex R_n şi fie C_n algebra spinorilor din acest spaţiu. (Vezi [6], [7], [8]). Această algebră este şi un spaţiu vectorial de dimensiune 2^n, numit spaţiu spinorial (notat cu S_{2^n}). Algebra C_n pentru $n = 2h$ este izomorfă, iar pentru $n = 2h + 1$ este homomorfă cu o algebră completă de matrice M_{2^h}. Algebra de matrice M_{2^h} corespunde algebrei $L(S_{2^h})$ a operatorilor liniari, într-o bază dată, care aplică spaţiul spinorial S_{2^h} în el însuşi. Subgrupului multiplicativ G al tuturor spinorilor inversabili îi corespunde grupul matricelor nesingulare M_G din M_{2^h}.

Un spinor $\varphi \in C_n$ poate fi scris descompus după multivectorii de bază în felul următor:

$$\varphi = \varphi^0 + \sum \varphi^{i_1} e_{i_1} + \sum \varphi^{i_1, i_2} \underset{(2)}{e}_{i_1, i_2} + \dots + \varphi^{12\dots n} \underset{(n)}{e}_{12\dots n},$$

unde sumele se extind la toate combinările numerelor $1, 2, \dots, n$ luate cîte k (k fiind numărul de indici). Matricea corespunzătoare spinorului φ este

$$M_\varphi = \varphi^0 I + \sum \varphi^{i_1} E_{i_1} + \sum \varphi^{i_1, i_2} E_{i_1} E_{i_2} + \dots + \varphi^{12\dots n} E_1 E_2 \dots E_n,$$

E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) fiind matricele operatorilor liniari $\hat{E}_i$, în baza e_j' ($j = 1, 2, \dots, h$) din R_h. Operatorii liniari $\hat{E}_i$ corespund vectorilor bazei e_i ($1, 2, \dots, n$) din R_n, iar I e matricea unitate.

Dacă $\varphi \in G$, adică este un spinor inversabil atunci $M_\varphi \neq 0$.

Definiţie. *Fie, prin definiţie, numărul complex* $\sqrt[m]{|M_\varphi|^2}$, *notată prin* $\|\varphi\|$ *norma spinorului* $\varphi \in G$.

Evident norma unui spinor este independentă de algebra bazei din spaţiul spinorial S_{2h}, depinzînd numai de spinorul φ. Se mai observă că $\sqrt[m]{|M_\varphi|^2}$ se înmulţeşte cu λ^2 dacă spinorul φ se înmulţeşte cu λ. Într-adevăr avem

$$\sqrt[m]{|M_{\lambda\varphi}|^2} = \sqrt[m]{|\lambda M_\varphi|^2} = \sqrt[m]{\lambda^{2m}|M_\varphi|^2} = \lambda^2 \sqrt[m]{|M_\varphi|^2}.$$

Teoremă. *Norma unui spinor este un homomorfism al grupului spinorilor inversabili, G, în grupul multiplicativ $C^* = C - \{0\}$ al corpului complex.*

Demonstraţie. Observăm că $\varphi \to \|\varphi\|$ este o aplicaţie a lui G în C^*. Trebuie să arătăm că ea păstrează înmulţirea. Fie φ şi ψ doi spinori din G şi M_φ, M_ψ matricele lor corespunzătoare; avem

$$\sqrt[m]{|M_\varphi M_\psi|^2} = \sqrt[m]{|M_\varphi|^2}\sqrt[m]{|M_\psi|^2}$$

deci

$$\|\varphi\psi\| = \|\varphi\|\,\|\psi\|.$$

Observaţii: 1. Norma spinorului unitate $\varphi = 1$ este 1;

2. Nucleul homomorfismului este mulţimea spinorilor care au norma 1: $\sqrt[m]{|M_\varphi|^2} = 1$.

3. În cazul $n = 2h$, condiţia $\|\varphi\| \neq 0$ este necesară şi suficientă ca φ să fie inversabil, iar pentru $n = 2h + 1$, ea e numai suficientă.

În continuare vom arăta că această definiţie, într-un caz particular coincide cu norma spinorială, definită pentru grupul ortogonal de M. Kneser şi J. Dieudonné şi generalizată de H. Zassenhaus (vezi [2], [3], [4]).

Pentru aceasta, vom considera în spaţiul R_n algebra operatorilor liniari $L(R_n)$. Se ştie că operatorii liniari inversabili din $L(R_n)$ formează un subgrup multiplicativ. Acele elemente $\hat{R}$ din acest subgrup care păstrează forma fundamentală din spaţiul R_n formează grupul ortogonal complex. Grupul ortogonal este un subgrup în grupul operatorilor liniari inversabili; îl vom nota prin $L_R(R_n)$. Matricea unui operator ortogonal complex $\hat{R}$ satisface relaţia $RR^T = I$, iar $|R| = \pm 1$. Grupul ortogonal complex mai este numit, prin generalizare, şi grupul rotaţiilor. Dacă $R = 1$, spunem că avem o rotaţie proprie, iar dacă $R = -1$ avem o rotaţie improprie. (Vezi [1]).

Se ştie, de asemenea, că orice rotaţie este un produs de simetrii. Dacă rotaţia R ese dată de k simetrii relative la hiperplanele perpendiculare pe vectorii neizotropi $a_1, a_2, \ldots, a_k$, atunci rotaţia $\hat{R}$ aplicată uni vector $x \in R_n$ îl va duce în vectorul $y = \hat{R}x$. Acest vector poate fi scris sub forma

$$y = (-1)^k a_k \ldots a_2 a_1 x (a_k \ldots a_2 a_1)^{-1}, \tag{1}$$

unde produsul se efectuează după regula înmulţirii spinorilor (vezi [6]). Rezultă deci că produsul $\nu = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1$ este un spinor particular, numit şi versor. Se poate demonstra că versorii formează grup G_ν în raport cu înmulţirea spinorilor. Versorii în care k este par sînt şi spinori pari; ei formează un subgrup în G_ν. Formula (1) poate fi scrisă $y = (-1)^k \nu x \nu^{-1}$ şi se poate extinde la cazul cînd în locul vectorului x avem un spinor oarecare $\varphi \in C_n$; se obţine $\psi = (-1)^k \nu\varphi\nu^{-1}$. Transformarea aceasta pe care o putem numi şi rotaţie a algebrei spinorilor este un automorfism al acestei algebre.

În cazul $n = 2h$ versorul ν corespunzător unei rotaţii este definit cu aproximaţia unui factor numeric. Dacă introducem o relaţie ρ în G_ν astfel $\nu_1 \rho \nu_2$ dacă şi numai dacă $\nu_1 = \lambda\nu_2$, atunci se arată că ρ este o relaţie de echivalenţă şi grupul rotaţiilor $L_R(R_n)$ va fi izomorf cu grupul cît al lui G_ν în raport cu această relaţie de echivalenţă, G_ν/ρ. Dacă $n = 2h + 1$ grupul rotaţiilor proprii este izomorf cu grupul multiplicativ al versorilor pari, iar cele improprii corespund la aceiaşi versori ca şi cele proprii. În ambele cazuri versorii pot fi normaţi cu ajutorul expresiei

$$\nu\tilde{\nu}^* = (-1)^k (a_1)^2 (a_2)^2 \ldots (a_k)^2. \tag{2}$$

Dacă ν se înmulţeşte cu un scalar λ, atunci (2) se înmulţeşte cu λ^2. Luînd pentru λ^2 inversul numărului (2) obţinem $\nu\tilde{\nu}^* = 1$, iar pentru λ avem numai două valori care diferă prin semn. Se arată uşor că versorii normaţi formează grup.

Trecînd acum la reprezentarea matricială a spinorilor, versorului $\nu = a_k \ldots a_2 a_1$ îi va corespunde o matrice de forma $V = A_k \ldots A_2 A_1$, A_i fiind matricele corespunzătoare vectorilor a_i consideraţi ca spinori particulari. Condiţia de normare pentru $n = 2h$ devine $VE'V^T = E'$, iar în cazul $n = 2h + 1$ avem două condiţii

$$VCV^T = C \quad \text{şi} \quad VE'V^T = E'.$$

(Nu vom preciza semnificaţia matricelor nesingulare E' şi C, deoarece nu vom avea explicit nevoie de ele). Dacă nu normăm versorii chiar la unitate (reală sau imaginară), atunci membrul al doilea al acestor relaţii se mai înmulţeşte cu numărul complex

$$u'(\nu) = (-1)^k (a_1)^2 (a_2)^2 \ldots (a_k)^2 = (-1)^k u(\nu).$$

Teoremă. *Determinantul matricei corespunzătoare unui spinor care se reduce la un vector este o putere a pătratului spinorial al acelui vector.*

Demonstraţie. Din relaţiile

$$VE'V^T = u'(\nu)E' \quad \text{pentru } n = 2h$$

şi

$$VCV^T = u'(\nu)C; \quad VE'V^T = u'(\nu)E' \quad \text{pentru } n = 2h + 1$$

rezultă

$$|V|^2 = [(-1)^k u(\nu)]^m = [u(\nu)]^m \quad \text{cu } m = 2^k,$$

deci

$$|V| = [u(\nu)]^{m/2} = [(a_1)^2 (a_2)^2 \dots (a_k)^2]^{2^{k-1}}.$$

Dacă versorul ν se reduce la un vector: $\nu = a$, atunci vom avea: $|V| = (a^2)^{2^{k-1}}$. Pe baza definiţiei date mai înainte, norma unui versor ν va fi

$$\|\nu\| = \sqrt[m]{|V|^2} = u(\nu) = (a_1)^2 (a_2)^2 \dots (a_k)^2,$$

ceea ce nu este altceva decît norma spinorială, definită de autorii amintiţi mai sus, în cazul unui corp de bază oarecare.

Este interesant de observat că dacă $\nu = a$, atunci norma lui este

$$\|a\| = \sqrt[m]{|V|^2} = \sqrt[m]{a^{2m}} = (a)^2.$$

Vom mai cerceta cazul particular al spaţiului R_2 cu algebra spinorială C_2. Un spinor din C_2 se scrie

$$\varphi = \varphi^0 + \underset{(2)}{\varphi^{12} e_{12}} + \varphi^1 e_1 + \varphi^2 e_2.$$

Trecînd la baza 1, i, j, k obţinem cuaternionii complecşi:

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi^{1'} i + \varphi^{2'} j + \varphi^{3'} k.$$

Matricea corespunzătoare primei forme este

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^0 + i\varphi^{12} & \varphi^1 - i\varphi^2 \\ \varphi^1 + i\varphi^2 & \varphi^0 - i\varphi^{12} \end{pmatrix}$$

cu determinantul

$$|M_\varphi| = (\varphi^0)^2 + (\varphi^{12})^2 - (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2,$$

iar matricea corespunzătoare formei a doua este

$$M'_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^0 - i\varphi^{3'} & i\varphi^{1'} + \varphi^{2'} \\ i\varphi^{1'} - \varphi^{2'} & \varphi^0 + i\varphi^{3'} \end{pmatrix}$$

cu determinant

$$M'_\varphi = (\varphi^0)^2 + (\varphi^{3'})^2 + (\varphi^{1'})^2 + (\varphi^{2'})^2.$$

Norma lui φ este deci $\|\varphi\| = \sqrt[m]{|M'_\varphi|^2} = |M'_\varphi|$ şi, după cum se vede, ea coincide cu norma cunoscută a unui cuaternion complex. Dacă componentele lui φ sînt numere reale, obţinem cuaternionii reali şi norma lor cunoscută.

Matricele multidimensionale dau şi ele o reprezentare a grupului G al spinorilor; de aceea ne vom ocupa acum cu ele.

Fie $A_1, A_2, \dots, A_p$ p matrice de ordin m. Într-o lucrare precedentă [9], am format cu ajutorul lor o clasă specială de matrice multidimensionale, în felul următor:

$$\left(a^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) = \left(\underset{(1)}{a^{k_1}_{i_1}} \underset{(2)}{a^{k_2}_{i_2}} \dots \underset{(p)}{a^{k_p}_{i_p}}\right),$$

unde $i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_p = 1, 2, \dots, m$; deci obţinem $(m^2)^p = m^{2p}$ numere pe care le aşezăm în punctele întregi ale unui cub de dimensiune $2p$. În lucrarea amintită am definit produsul acestor matrice şi am arătat că dacă două matrice generalizate multidimensionale $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ sînt date respectiv de matricele bidimensionale $A_1, A_2, \dots, A_p$ şi $B_1, B_2, \dots, B_p$, atunci $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ va fi dat de produsele $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_p B_p$. Am definit produsul lui $\mathfrak{A}$ cu un scalar precum şi matricea unitate generalizată ca fiind dată de matricea bidimensională unitate de ordin m luată de p ori. $\mathfrak{A}$ va avea invers dacă $A_1, A_2, \dots, A_p$ sînt nesingulare, iar $\mathfrak{A}^{-1}$ se obţine din $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A^{-1}$.

Definiţie. *Fie determinantul matricei generalizate numărul*

$$|\mathfrak{A}| = (|A_1| |A_2| \dots |A_p|)^m.$$

Teoremă. *Determinantul produsului $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ este egal cu produsul determinanţilor.*

Demonstraţie. Într-adevăr, avem

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = (|A_1 B_1| |A_2 B_2| \dots |A_p B_p|)^m =$$

$$= (|A_1| |A_2| \dots |A_p|)^m (|B_1| |B_2| \dots |B_p|)^m = |\mathfrak{A}| |\mathfrak{B}|.$$

Valoarea dezvoltată a determinantului $\mathfrak{A}$ va fi

$$|\mathfrak{A}| = \sum (-1)^{k_1} \underset{(1)}{a^{k_1}_{1}} \underset{(1)}{a^{k_1}_{2}} \dots \underset{(1)}{a^{k_1}_{m}}{}^{m}) \left(\sum (-1)^{k_2} \underset{(2)}{a^{k_2}_{1}} \underset{(2)}{a^{k_2}_{2}} \dots \underset{(2)}{a^{k_2}_{m}}{}^{m}\right)$$

$$\dots \left(\sum (-1)^{k_p} \underset{(p)}{a^{k_p}_{1}} \underset{(p)}{a^{k_p}_{2}} \dots \underset{(p)}{a^{k_p}_{m}}{}^{m}\right)^m =$$

$$= \Big[\sum (-1)^{k_1 + k_2 + \dots + k_p} \underset{(1)}{a^{k_1}_{1}} \underset{(2)}{a^{k_2}_{1}} \dots \underset{(p)}{a^{k_p}_{1}} \underset{(1)}{a^{k_1}_{2}} \underset{(2)}{a^{k_2}_{2}} \dots \underset{(p)}{a^{k_p}_{2}} \dots$$

$$\dots \underset{(1)}{a^{k_1}_{m}} \underset{(2)}{a^{k_2}_{m}} \dots \underset{(p)}{a^{k_p}_{m}}\Big]^m =$$

$$= \left[\sum (-1)^{k_1 + k_2 + \dots + k_p} a^{k_1}_{1} {}^{k_2} {}_{1} \dots {}^{k_p}_{1} a^{k_1}_{2} {}^{k_2}_{2} \dots {}^{k_p}_{2} a^{k_1}_{m} {}^{k_2}_{m} \dots {}^{k_p}_{m}\right\}^m.$$

Proprietăţile determinantului definit sînt asemănătoare cu proprietăţile determinanţilor bidimensionali. Acestea sînt:

1. $\mathcal{A}$ are $(m!)^p$ termeni.

2. Dacă schimbăm între ei indicii i_j cu k_j (toţi sau numai o parte din ei), atunci în determinanţii A_j se schimbă liniile cu coloanele, iar determinantul $|\mathcal{A}|$ nu se schimbă.

3. $|\mathcal{A}| = 0$ dacă şi numai dacă unul sau mai mulţi determinanţi A_j sînt nuli.

Dăm alte cîteva proprietăţi ale lui $|\mathcal{A}|$ fără a intra în amănunte de demonstraţii:

4. Dacă elementele unei feţe de dimensiune $2p-1$ sînt nule, atunci $|\mathcal{A}| = 0$, dar dacă o faţă de dimensiune mai mică decît $2p-1$ este formată numai din 0, atunci $|\mathcal{A}|$ poate fi zero sau diferit de zero.

5. Dacă în matricea $\mathcal{A}$ elementele unei feţe de dimensiune $2p-1$ sînt egale cu elementele corespunzătoare de pe o altă faţă $2p-1$ dimensională, atunci $|\mathcal{A}| = 0$; dar, dacă dimensiunea feţelor este mai mică decît $2p-1$, atunci $|\mathcal{A}|$ poate fi zero sau diferit de zero.

6. Dacă în matricea $\mathcal{A}$ elementele unei feţe sînt înmulţite cu o constantă c, atunci $|\mathcal{A}|$ se înmulţeşte sau cu c^m sau cu c^{m^2}.

7. Dacă într-o faţă de dimensiune $2p-1$ toate elementele sînt combinaţii liniare ale elementelor corespunzătoare din alte feţe de aceeaşi dimensiune şi din aceeaşi direcţie, atunci $|\mathcal{A}| = 0$.

Putem să mai definim complementi algebrici şi să dezvoltăm determinantul matricei $\mathcal{A}$ cu ajutorul lor. Ştim că

$$|\mathcal{A}| = (|A_1|\,|A_2| \dots |A^p|)^m =$$

$$= \left(\sum_{j_1=1}^{m} a^{j_1}_{(1)^{i_1}} A^{j_1}_{(1)^{i_1}} \sum_{j_2=1}^{m} a^{j_2}_{(2)^{i_2}} A^{j_2}_{(2)^{i_2}} \dots \sum_{j_p=1}^{m} a^{j_p}_{(p)^{i_p}} A^{j_p}_{(p)^{i_p}} \right)^m ,$$

unde $A^{j}_{(k)^{i}}$ sînt complementii algebrici din matricea A_k. Avem

$$|\mathcal{A}| = \left(\sum_{j_1, \dots, j_p=1}^{m} a^{j_1}_{(1)^{i_1}} A^{j_1}_{(1)^{i_1}} a^{j_2}_{(2)^{i_2}} A^{j_2}_{(2)^{i_2}} \dots a^{j_p}_{(p)^{i_p}} A^{j_p}_{(p)^{i_p}} \right)^m$$

$$= \left(\sum_{j_1, \dots, j_p=1}^{m} a^{j_1}_{(1)^{i_1}} a^{j_2}_{(2)^{i_2}} \dots a^{j_p}_{(p)^{i_p}} A^{j_1}_{(1)^{i_1}} A^{j_2}_{(2)^{i_2}} \dots A^{j_p}_{(p)^{i_p}} \right)^m$$

şi putem scrie

$$|\mathcal{A}| = (|A_1|\,|A_2| \dots |A_p|)^{m-1} \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^{m} a^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} A^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} .$$

Definiţie. Complementul algebric al elementului $a^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ este prin definiţie

$$A^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} = (|A_1|\,|A_2| \dots |A_p|)^{m-1} A^{k_1}_{(1)^{i_1}} A^{k_2}_{(2)^{i_2}} \dots A^{k_p}_{(p)^{i_p}} .$$

Teoremă. *Inversul matricei generalizate* $\mathcal{A}$, *dacă există, este egal cu*

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \mathcal{A}^* .$$

Demonstraţie. Avem

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{(-1)k_1}_{(1)^{i_1}} & a^{(-1)k_2}_{(2)^{i_2}} & \dots & a^{(-1)k_p}_{p^{i_p}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a^{*k_1}_{(1)^{i_1}}}{|A_1|} & \dfrac{a^{*k_2}_{(2)^{i_2}}}{|A_2|} & \dots & \dfrac{a^{*k_p}_{(p)^{i_p}}}{|A_p|} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A_1|\,|A_2| \dots |A_p|} \left(A^{i_1}_{(1)^{k_1}} A^{i_2}_{(2)^{k_2}} \dots A^{i_p}_{(p)^{k_p}} \right) = \frac{\left(A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k_1 k_2 \dots k_p} \right)}{(|A_1|\,|A_2| \dots |A_p|)^m} ;$$

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \mathcal{A}^* .$$

Observăm că $\mathcal{A}$ va avea invers dacă $|\mathcal{A}| \neq 0$, condiţie asemănătoare celei cunoscute în cazul unei matrice bidimensionale. Vom spune că $\mathcal{A}$ este singular dacă $|\mathcal{A}| = 0$.

În cazul particular cînd $A_1 = A_2 = \dots = A_p = A$, adică matricea generalizată $\mathcal{A}$ este dată de aceeaşi matrice luată de p ori, vom mai putea construi o reprezentare a grupului spinorilor G din algebra C_n.

Teoremă. *Pentru* $n = 2h$ *grupul spinorilor inversabili* G *este izomorf, iar pentru* $n = 2h+1$ *este homomorf, cu un grup multiplicativ de matrice multidimensionale.*

Demonstraţie. Fie φ un spinor din G şi fie M_φ matricea corespunzătoare. Să formăm cu ajutorul matricei M o matrice multidimensională:

$$\mathfrak{M}_\varphi = \left(a^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} \right) = \left(a^{k_1}_{i_1} a^{k_2}_{i_2} \dots a^{k_p}_{i_p} \right) ,$$

unde a^{k}_{i} sînt elementele matricei M_φ.

Corespondenţa astfel stabilită între grupul de matrice M_G şi mulţimea de matrice multidimensionale, $\{\mathfrak{M}\}_{\varphi \in G}$, este un izomorfism, deoarece evident este o aplicaţie bijectivă. Trebuie să arătăm că ea păstrează produsul. Ştim însă că produsul $\mathfrak{M}_\varphi \mathfrak{M}_\psi$ este dat de produsul $M_\varphi M_\psi$ luat de p ori.

Consecinţă. Aplicaţia compusă: $\varphi \to M_\varphi \to \mathfrak{M}_\varphi$ pentru $n = 2h$ este tot un izomorfism, iar pentru $n = 2h+1$ un homomorfism.

Observaţii: 1. Matricea $\mathfrak{M}_\varphi$ este nesingulară.

2. Matricele $\mathfrak{M}_\varphi$ astfel obţinute intervin la transformarea liniară a spintensorilor din spaţiul spinorial S_{2h} şi anume:

$$^{k_1 k_2 \dots k_p} = a^{k_1}_{i_1} a^{k_2}_{i_2} \dots a^{k_p}_{i_p} \varphi^{i_1 i_2 \dots i_p} = a^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} \varphi^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

deci $\mathfrak{M}_\varphi$ corespund operatorilor liniari inversabili din spaţiul liniar al spin-tensorilor de p ori contravarianţi (într-o bază dată).

Revenim, din nou, la norma unui spinor φ din G. Am avut

$$\|\varphi\| = \sqrt[m]{|M_\varphi|^2}, \quad \text{iar} \quad |\mathfrak{A}| = |M_\varphi|^{p^m}$$

de unde

$$|M_\varphi| = |\mathfrak{A}|^{1/p^m},$$

deci norma lui φ poate fi definită şi ca fiind egală cu

$$\|\varphi\| = |\mathfrak{A}|^{2/p^{m^2}}.$$

În cazul subgrupului versorilor norma va fi

$$u(\nu) = |\mathfrak{V}|^{2/p^{m^2}}.$$

Observaţie. Numărul $|\mathfrak{A}|^{2/p^{m^2}}$ poate constitui norma matricei multidimensionale $\mathfrak{A}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Raşevski P. K. — *Teoria spinorov.* U.M.N., T.X., (64), 1955.
2. Dieudonné J. — *La géométrie des groupes classiques.* Edit. Springer, 1955.
3. Kneser N. — *Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern.* J. Reine und Angew. Math. T. 196, (1956), pp. 213–220.
4. Zassenhaus H. — *On the Spinor norm.* Archiv d. Math. W. XII, (1962), p. 434.
5. Boerner B. — *Darstellungen von Gruppen.* Berlin, 1955.
6. Vescan A. — *Algebra spinorilor.* An. şt. Univ. Iaşi, T. X, 2, (1964), pp. 269–280.
7. Vescan A — *Contribuţiuni la studiul proprietăţilor algebrice ale spinorilor.* An. şt. Univ. Iaşi, S. I. a. Mat. T. XI, (1965), pp. 1–11.
8. Vescan A. — *Noi proprietăţi ale algebrei spinorilor.* An. şt. Univ. Iaşi, S. I. a Mat. T. XII, (1966), pp. 11–17.
9. Vescan A. — *O clasă de matrice multidimensionale.* An. şt. Univ. Iaşi, S. I. a. Mat. T. XIII, (1967), pp. 267–272.

LA NORME DANS LE GROUPE COMPLET DES SPINEURS

Resumé

Dans un espace vectoriel euclidien de dimension n, R_n, soit C_n l'algèbre des spineurs. Cette algèbre est aussi un espace vectoriel S_{2^n}, qui s'appelle espace spinoriel. Pour $n = 2h$, C_n est isomorphe et pour $n = 2h+1$ homomorphe avec une algèbre complète de matrices d'ordre 2^h, M_{2^h}, qui représente (dans une base donnée) les applications linéaires de l'espace

spinoriel S_{2^h}. L'image du groupe G des spineurs inversables est le groupe multiplicatif M_G des matrices régulierès.

Soit, par définition, la norme d'un spineur $\varphi \in G$ le nombre complexe $\sqrt[m]{|M_\varphi|^2}$ (avec $m = 2^h$).

Nous démontrons que la norme des spineurs est un homomrphisme du groupe G dans le groupe multiplicatif $C^* = C - \{0\}$ du corps complexe.

Dans le cas du sous-groupe des spineurs, qui sont les produits spinoriels des vecteurs (ommés verseurs) la définition donnée coïncide avec la définition de la norme spinorielle donnée par M. Kneser et J. Dieudonné et généralisée par H. Zassenhaus pour un corps de base arbitraire.

Ensuite nous donnons la définition du déterminant d'une matrice généralisée et nous cherchons les propriétés de celui-ci. Enfin, nous exprimons la norme d'un spineur à l'aide des déterminants d'une clase spécialle des matrices généralisées.