$$\underset{a}{\eta}_{0\varepsilon}\underset{b}{\xi}^{\varepsilon} = \delta_{ab}.$$

This being said, we have

$$\underset{a}{\eta}_{i}(\underset{b}{\xi}) = \underset{b}{\xi}^{\varepsilon}\underset{a}{\eta}_{0}(X_{\varepsilon}) = \underset{a}{\eta}_{0\varepsilon}\underset{b}{\xi}^{\varepsilon} = \delta_{ab}.$$

On the other hand, we get

$$\underset{a}{\Phi}^{2}X = \underset{a}{\Phi}(X^{\varepsilon}\underset{a}{\Phi}_{0}X_{\varepsilon}) = X^{\varepsilon}\underset{a}{\Phi}^{2}_{0}X_{\varepsilon} = X^{\varepsilon}(-X_{\varepsilon} + \underset{a}{\eta}_{0}(X_{\varepsilon})\underset{a}{\xi}_{0}) = -X + \underset{a}{\eta}_{i}(X)\underset{a}{\xi}.$$

$$\underset{a}{\Phi}\underset{b}{\Phi}X - \underset{b}{\eta}_{i}(X)\underset{a}{\xi} = \underset{a}{\Phi}(X^{\varepsilon}\underset{b}{\Phi}_{0}X_{\varepsilon}) - X^{\varepsilon}\underset{b}{\eta}_{0}(X_{\varepsilon})\underset{a}{\xi} =$$

$$= X^{\varepsilon}(\underset{a}{\Phi}_{0}\underset{b}{\Phi}_{0}X_{\varepsilon}) - X^{\varepsilon}\underset{b}{\eta}_{0}(X_{\varepsilon})\underset{a}{\xi} = X^{\varepsilon}(\underset{a}{\Phi}_{0}\underset{b}{\Phi}_{0} - \underset{a}{\xi}_{0}\otimes\underset{b}{\eta}_{0})(X_{\varepsilon}) = \underset{c}{\Phi}X.$$

$$-\underset{b}{\Phi}\underset{a}{\Phi}X + \underset{a}{\eta}_{i}(X)\underset{b}{\xi} = \underset{c}{\Phi}X,$$

for any cyclic permutation $\{a, b, c\}$ of $\{1, 2, 3\}$.
From the construction $(\underset{a}{\Phi}, \underset{a}{\xi}, \underset{a}{\eta})$, $a = 1, 2, 3$, is left invariant.

REFERENCES

1. Bochner, S. — *Tensor fields with finite bases*, Ann. of Math. (2) *53* (1951), 400—411.
2. Bouzon, J. — *Structures presque-cocomplexes*, Thèse, Paris 1965.
3. Kobayashi, S. and Nomizu, K. — *Foundations of differential geometry*, I, Interscience, New York 1963.
4. Palais, R. S. — *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc. *22* (1957).
5. Sasaki, S. — *Almost contact manifolds*, Math. Inst. Tôhoku Univ. Part II (1967).
6. Udrişte, C. — *Almost coquaternion structures*, Communication présentée au IV-ème Congrès des Mathématiciens d'Expression Latine et Commémoration d'Élie Cartan, Bucarest, 17—24 Septembre 1969.
7. Udrişte, C. — *Structures presque coquaternioniennes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. de la R.S.R., Tome *13*, 61,4, 1969, 487—507.

ASUPRA Φ-TRANSFORMĂRILOR

Rezumat

In §1 se dau unele definiții și rezultate referitoare la structurile aproape cocomplexă și respectiv aproape cocuaternionică. În § 2 se stabilește că o anumită submulțime a tuturor Φ-transformărilor peste o varietate compactă aproape cocomplexă M^{2n+1} este un grup Lie și deci o anumită submulțime a tuturor $(\overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi})$-transformărilor peste o varietate compactă aproape cocuaternionică M^{4n+3} este un grup Lie. Prin urmare, automorfismele lui M^{2n+1} [5, p. 21—2] și ale lui M^{4n+3} formează respectiv grupuri Lie (§3). În §4 se arată că un grup Lie cu $4n+3$ dimensiuni admite o structură aproape cocuaternionică invariantă la stînga.

QUELQUES REMARQUES SUR L'ESPACE FIBRÉ TANGENT D'UNE VARIÉTÉ COSYMPLECTIQUE

PAR

STERE IANUS

Communication présentée à la session jubilaire „A. Myller" Août 20—25, 1970

Les structures cosymplectiques ont été considérées par P. Libermann [7], A. Lichnerowicz [8], G. Reeb [11] et C. Barros [1]. Au sens des structures presque de contact, elles ont été étudiées par D. Blair [2], S. Goldberg et K. Yano [5], K. Ogiue [10] et d'autres. Les connexions compatibles aux structures cosymplectiques ont été déterminées par R. Miron et V. Oproiu [9].

1. Soit une variété différentiables [1]) a $2n+1$ dimensions. Si le groupe structurel de l'espace fibré tangent TM de la variété M est réductible au groupe $U(n)\times 1$ on dit que la variété M est presque de contact (au sens de Sasaki [13]). Sur une variété presque de contact il existe un champ de tenseurs φ de type (1, 1), un champ de vecteurs ξ et une 1-forme η tels que

$$\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \tag{1.1}$$
$$\varphi\xi = 0, \qquad \eta\varphi = 0.$$

Nous pouvons trouver d'une manière naturelle une métrique de Riemann sur M telle que

$$g(X, Y) = g(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\,\eta(Y), \qquad X, Y\in\mathcal{X}(M), \tag{1.2}$$

où $\mathcal{X}(M)$ est le module des champs de vecteurs de la variété M. Alors, on

[1]) Les variétés différentiables envisagées seront toujours supposées de classe C^{∞}, ainsi que les tenseurs introduits sur elles.

dit que M est une variété métrique presque de contact et nous la notons par $M(\varphi, \xi, \eta, g)$.

On définit une 2-forme Φ, nommée la forme fondamentale de la variété $M(\varphi, \xi, \eta, g)$, par la formule suivante

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y), \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{1.3}$$

Une variété presque cosymplectique est une variété métrique de contact où la forme fondametale Φ et la forme de contact η sont fermées.

$$d\Phi = 0, \qquad d\eta = 0. \tag{1.4}$$

Nous disons que la variété presque de contact M est normale si nous avons

$$N_\varphi + d\eta \otimes \xi = 0, \tag{1.5}$$

où N_φ est le tenseur de Nijenhuis de φ. Si la variété presque cosymplectiques M est normale, elle est nommée cosymplectique.

Nous designons par $T_x(M)$ l'espace tangent au point x de M, TM l'espace fibré tangent de la variété M à projection π et TTM l'espace fibré tangent de la variété TM. Soit ∇ une connexion sur M et K l'application de connexion, $K : TTM \to TM$, qui est définie par la formule [4]

$$KY_*(X_x) = \nabla_{X_x} Y \qquad \forall X_x \in T_x M, \qquad Y \in \mathcal{X}(M) \tag{1.6}$$

où Y_* est la différentielle du champ de vecteurs Y considérée comme une section du fibré TM. Le lift vertical X^v et le lift horizontal X^h d'un champ de vecteurs X sont deux champs de vecteurs sur TM qui sont définis de manière que :

$$\begin{aligned} &\pi_* X^v = 0, \qquad KX^v = X, \\ &\pi_* X^h = X, \qquad KX^h = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Si f est une fonction sur M, $f^v = f \circ \pi$ est une fonction sur TM nommée le lift vertical de la fonction f.

Enfin, pour finir cette section, nous donnons quelques formules de la théorie du prolongement des champs de tenseurs de la variété TM qui sont nécessaires par la suite.

$$\begin{aligned} &\eta^v(X^v) = \eta^h(X^h) = 0, \\ &\eta^v(X^h) = \eta^h(X^v) = \eta(X)^v, \qquad \forall X \in \mathcal{X}(M), \\ &\varphi^h(X^v) = \varphi(X)^v \qquad \varphi^h(X^h) = (\varphi X)^h. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pour d'autres propriétés voir [16].

2. Nous considérons sur l'espace fibré tangent TM de la variété presque cosymplectique $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ les champs de tenseurs φ^h, ξ^v, ξ^h, η^v, η^h.

Proposition 2.1. *Les champs de tenseurs φ^h, ξ^v, ξ^h, η^v, η^h vérfient les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} &(\varphi^h)^2 = -I + \eta^v \otimes \xi^h + \eta^h \otimes \xi^v, \\ &\eta^v(\xi^h) = \eta^h(\xi^v) = 1, \qquad \eta^v(\xi^v) = \eta^h(\xi^h) = 0, \\ &\varphi^h \xi^v = \varphi^h \xi^h = 0, \qquad \eta^v \varphi^h = \eta^h \varphi^h = 0, \\ &(\varphi^h)^3 + \varphi^h = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Démonstration. Les propriétés (2.1) découlent immédiatement des relations (1.1) et (1.8).

Avec MM. S. Goldberg et K. Yano [5] nous dirons que l'espace tangent TM d'une variété presque cosymplectique M possède une f-structure $(\varphi^h, \xi^v, \xi^h, \eta^v, \eta^h)$ à repères complémentaires. On sait que la variété TM possède une métrique naturelle G [12] telle que

$$G(A, B) = g(\pi_* A, \pi_* B) \circ \pi + g(KA, KB) \circ \pi, \qquad A, B \in \mathcal{X}(TM), \tag{2.2}$$

où l'application de connexion K est associée à la connexion Riemannienne ∇ de la métrique g.

Proposition 2.2. *La f-structure $(\varphi^h, \xi^v, \xi^h, \eta^v, \eta^h)$ de la variété TM est une structure métrique, c'est-à-dire*

$$G(A, B) = G(\varphi^h A, \varphi^h B) + \eta^v(A)\, \eta^v(B) + \eta^h(A)\, \eta^h(B). \tag{2.3}$$

Démonstration. On sait que le lift vertical et le lift horizontal définissent sur la variété TM deux distributions complémentaires. Il résulte que nous avons les cas suivants :

a) $A = X^v$, $B = Y^v$.

D'après les formules (2.2), (1.7) et (1.8) il résulte

$$g(X, Y) = g(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\, \eta(Y), \qquad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

b) $A = X^h$, $B = Y^h$. Ce cas est analogue au premier cas.

c) $A = X^v$, $B = Y^h$. Ce cas est trivial.

Théorème 2.3. *Soit $M(f, \xi, \eta, g)$ une variété cosymplectique. Alors la f-structure $(\varphi^h, \xi^v, \xi^h, \eta^v, \eta^h, G)$ de la variété TM est normale.*

Démonstration. Dans le cas cosymplectique $\nabla\varphi = 0$ et $\nabla\eta = 0$, par conséquent nous avons $N_{\varphi^h} = (N_\varphi)^h$, $d\eta^h = (d\eta)^h$ et $d\eta^v = (d\eta)^h$. D'autre part la structure cosymplectique est normale et alors nous avons $N_{\varphi^h} + d\eta^v \otimes \xi^h + d\eta^h \otimes \xi^v = 0$.

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 2.4. [4]. *Pour toute paire de champs de vecteurs X et Y sur M, on a*

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &[X^v, Y^v] = 0, && \pi_*[X^h, Y^h] = [X, Y], \\ &[X^h, Y^v] = (\nabla_X Y)^v, && K[X^h, Y^h]_Z = R(X, Y)Z, \end{aligned}$$

où R est la courbure associée à ∇.

Nous désignons par $\widetilde{\Phi}$ la forme fondamentale de la f-structure de TM telle que :

$$(2.5)\qquad \widetilde{\Phi}(A, B) = G(A, \varphi^h B).$$

Théorème 2.5. *La forme fondamentale $\widetilde{\Phi}$ de la f-structure $(\varphi^h, \xi^v, \xi^h, \eta^v, \eta^h, G)$ sur la variété TM est fermée si et seulement si M est localement euclidienne.*

Démonstration. On connait la formule,

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} 3d\widetilde{\Phi}(A, B, C) = {} & A\widetilde{\Phi}(B, C) + B\widetilde{\Phi}(C, A) + C\widetilde{\Phi}(A, B) - \\ & - \widetilde{\Phi}([A, B], C) - \widetilde{\Phi}([B, C], A) - \widetilde{\Phi}([C, A], B). \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.5) on obtient :

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} 3d\,\widetilde{\Phi}(A, B, C) = {} & AG(B, \varphi^h C) + BG(C, \varphi^h A) + CG(A, \varphi^h B) - \\ & - G([A, B], \varphi^h C) - G([B, C], \varphi^h A) - G([C, A], \varphi^h B). \end{aligned}$$

Dans le cas $A = X^v$, $B = Y^v$ et $C = Z^v$ la relation (2.7) est banale. Maintenant, nous considérons le cas $A = X^v$, $B = Y^v$, $C = Z^h$, on obtient:

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} 3d\widetilde{\Phi}(X^v, Y^v, Z^h) &= Z^h G(X^v, (\varphi Y)^v) + G((\nabla_Z Y)^v, (\varphi X)^v) - G((\nabla_Z X)^v, (\varphi Y)^v) = \\ &= Zg(X, \varphi Y) + g(\nabla_Z Y, \varphi X) - g(\nabla_Z X, \varphi Y). \end{aligned}$$

La formule suivante est bien connue

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

et dans notre cas

$$(2.9)\qquad Zg(X, \varphi Y) = g(\nabla_Z X, \varphi Y) + g(X, \nabla_Z \varphi Y).$$

D'autre part $\nabla\varphi = 0$, donc nous avons :

$$\nabla_Z \varphi Y = \varphi \nabla_Z Y.$$

Alors, on a

$$(2.10)\qquad g(X, \nabla_Z \varphi Y) = g(X, \varphi \nabla_Z Y) = -g(\varphi X, \nabla_Z Y);$$

compte tenu de (2.9) et (2.10), de la relation (2.8) on obtient

$$d\widetilde{\Phi}(X^v, Y^v, Z^h) = 0 \qquad \forall\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

D'une manière analogue on obtient $3d\widetilde{\Phi}(X^v, Y^h, Z^h)_U = -g(R(Y, Z)\,U, \varphi X) = 0$.

Remarque. La f-structure $(\varphi^h, \xi^v, \xi^h, \eta^v, \eta^h, G)$ est une C-structure au sens de Blair [3].

3. Nous notons avec $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les distributions de la variété TM qui sont associées aux champs de tenseurs projecteurs $-(\varphi^h)^2$ et $\eta^v \otimes \xi^h + \eta^h \otimes \xi^v$.

Si la variété M est supposée cosymplectique, les distributions $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont intégrales parce que la f-structure associée sur TM est normale [6].

Soit N une variété intégrale de la distributions $\mathcal{L}$ et $\tau : N \to TM$ l'immersion. Nous désignons par φ^h l'endomorphisme induit par φ^h sur l'espace tangent de la variété N :

$$(3.1)\qquad B\varphi^h X = \varphi^h BX, \qquad X \in \mathcal{X}(N)$$

où $B = \tau_*$.

Alors il résulte facilement que φ^h est une structure presque complexe sur la variété N. La metrique G induit sur la variété N une métrique G par la formule suivante

$$(3.2)\qquad G(X, Y) = G(BX, BY).$$

Compte tenu des formules (3.2), (2.3) et (2.1)

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} G(\varphi^h X, \varphi^h Y) &= G(B\varphi^h X, B\varphi^h Y) = G(\varphi^h BX, \varphi^h BY) = \\ &= G(BX, BY) - \eta^v(BX)\,\eta^v(BY) - \eta^h(BX)\,\eta^h(BY) = \\ &= G(BX, BY) = G(X, Y) : \end{aligned}$$

donc, la métrique G est Hermitienne.

Dans la suite, la connexion Riemanienne de la métrique G est désignée par $\widetilde{\nabla}$ et la connexion induite sur N par ∇^*.

Les équations Gauss s'écrivent

$$(3.4)\qquad \widetilde{\nabla}_{BX} BY = B\overset{*}{\underset{X}{\nabla}} Y + h(X, Y)\,\xi^v + K(X, Y)\,\xi^h,$$

où h et K sont les tenseurs fondamentaux. Alors, nous avons

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{BX} B\varphi^h Y &= B\overset{*}{\underset{X}{\nabla}} \varphi^h Y + h(X, \varphi^h Y)\,\xi^v + K(X, \varphi^h Y)\,\xi^h = \\ &= B(\overset{*}{\underset{X}{\nabla}} \varphi^h)\,Y + B\varphi^h(\overset{*}{\underset{X}{\nabla}} Y) + h(X, \varphi^h Y)\xi^v + K(X, \varphi^h Y)\,\xi^h. \end{aligned}$$

Compte tenu de $\tilde{\nabla}\varphi^h = 0$ et des relations (2.1) on a

$$\tilde{\nabla}_{BX} B\varphi^h Y = \tilde{\nabla}_{BX}\varphi^h BY = \varphi^h \tilde{\nabla}_{BX} BY = \varphi^h B \overset{*}{\nabla}_X Y. \tag{3.6}$$

Des équations (3.5) et (3.6) on obtient

$$\overset{*}{\nabla}_X \varphi^h = 0, \qquad h = 0, \qquad k = 0. \tag{3.7}$$

Nous avons le

Théorème 3.1. *Soit une variété cosymplectique localement euclidienne de dimension $2n+1$. Alors, l'espace tangent TM possède deux distributions complémentaires intégrables $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, de dimension $4n$ et 2. Les variétés intégrales des distributions $\mathcal{L}$ sont Kähleriennes et totalement géodésiques.*

BIBLIOGRAPHIE

1. de Barros, C. — *Sur la géométrie différentielle des formes différentielles extérieures quadratiques.* Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale Bologna, 1967.
2. Blair, D. — *The theory of quassi-Sasakian structures,* J. Differential Geometry 1(1967) 331—345.
3. Blair, D. — *Geometry of manifolds with structural group* (a paraitre).
4. Dombrowski, P. — *On the geometry of the tangent bundle,* J. Reine und Angew. Math., *210* (1962) 73—88.
5. Goldberg, S., K.Yano — *Integrability of almost cosymplectic structures.* Pacific J. of Math. *31, 2* (1969) 373—382.
6. Isihara, S. K Yano — *On integrability condition of a f-structure.* Quart. J. Math. Oxford (2) *15* (1964) 217—222.
7. Libermann, P. — *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact,* Coll. de Geom. Diff., CBRM, Louvain, 1959, 37—59.
8. Lichnerowicz, A. — *Théorèmes de réductivité sur des algèbres d'automorphismes,* Rend. Mat e Appl., Serie V, *22* (1963) 197—244.
9. Miron, R., Oproiu, V. — *Connexions compatibles aux structures presque cosymplectiques ou conformes presque cosymplectiques.* C. R. Acad. Sci. Paris, *269* (1969) 451—454.
10. Ogiue K. — *G-structures defined by tensor fields,* Kodai Math. Sem. Rep. *20* (1968) 54—75.
11. Reeb, G. — *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques,* Acad. Royale de Belgiques, Mémoire *29* (1952) 1—64.
12. Sasaki, S. — *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds* Tôhoku. Math. J., *10* (1958) 338—354.
13. Sasaki, S. — *Almost contact manifolds,* Tôhoku University, 1965.
14. Vrânceanu, G. — *Leçons de Géométrie Différentielle,* 2. Gauthier Villars, Paris, 1964.
15. Yano, K. — *On a structure defined by a tensor field of type (1,1) satisfying,* Tensor, N. S. *14* (1963) 99—109.
16. Yano, K., S., Isihara — *Horizontal lift of tensor field and connection to tangent bundles.* J. Math. Mech. Vol. *16,9* (1967) 1015—1030.

OBSERVAȚII ASUPRA SPAȚIULUI FIBRAT TANGENT AL UNEI VARIETĂȚI COSIMPLECTICE

Rezumat

O varietate cosymplectică este o varietate aproape de contact normală avînd forma de contact și forma fundamentală închise [2]. Utilizînd teoria prelungirii cîmpurilor de tensori (liftul orizontal) la spațiul fibrat tangent se construiește o f-structură cu repere complementare în sensul lui K. Yano pe varietatea TM a fibratului tangent. Această f-structură este normală, metrică în raport cu metrica naturală a lui TM și are forma fundamentală închisă. Se arată că subvarietățile integrale ale distribuției de codimensiune doi sînt Kähleriene.