ASUPRA ECUAŢIEI MATRICEALE $\mathbf{PAP}^T = \mathbf{B}$ ÎN ALGEBRA BOOLE $\mathcal{B}_2$ ŞI UNELE APLICAŢII ÎN TEORIA GRAFURILOR

Rezumat

În această Notă este rezolvată ecuaţia $\mathbf{PAP}^T = \mathbf{B}$, cu matricea necunoscută $\mathbf{P}$, unde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sînt matrice cu elemente din $\mathcal{B}_2$, iar $\mathbf{P}$ este o matrice de permutări. Abordarea acestei chestiuni, în esenţă combinatorială, se face prin procedee booleene, rezolvîndu-se simultan problema izomorfismului grafurilor.

EINE ANWENDUNG DER α-ZERLEGBAREN GRAPHEN IN DER INFORMATIONSTHEORIE

VON

E. OLARU

1. Graphentheoretische Betrachtungen. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir endliche ungerichtete Graphen $G = (X, U)$, die weder Schlingen noch mehrfache Kanten enthalten. Dabei bezeichnet X die Knotenpunktmenge und U die Kantenmenge von G. Verbindet die Kante u die Knotenpunkte x und y, so schreiben wir $u = (x, y)\ (= (y, x))$. Wir wollen die Tatsache, dass die Knotenpunkte x und y durch eine Kante in G verbunden (bzw. nicht verbunden) sind, auch durch die Bezeichnung $x \rho y$ (bzw. $x \bar{\rho} y$) ausdrücken.

Ein Graph G' heisst *Teilgraph* des Graphen G, wenn jeder Knoetenpunkt von G' auch Knotenpunkt von G ist und zwei Knotenpunkte von G' genau dann in G' durch eine Kante verbunden sind, wenn sie es auch in G sind. Ist $X' \subseteq X$ die Knotenpunktmenge von G', so nennen wir G' auch den durch die Knotenpunktmenge X' *aufgespannten Teilgraphen* von G, und wir bezeichnen ihn mit $[X']_G$. Ein vollständiger Teilgraph von G heisst eine *Clique* von G.

Eine Teilmenge $S' \subset X$ heisst eine Menge *unabhängiger Knotenpunkte* (in Bezug auf G), wenn gilt: $[S']_G = (S', \emptyset)$, d. h. wenn für je zwei Knotenpunkte $x', y' \in S'$ gilt: $x' \bar{\rho} y'$. Die maximale Anzahl der unabhängigen Knotenpunkte des Graphen G heisst die (innere) Stabilitätszahl von G, und wir bezeichnen sie mit $\alpha(G)$. Eine Menge S von in G unabhängigen Knotenpunkten mit genau $\alpha(G)$ Elementen wollen wir ein Stabilitätssystem von G nennen.

Eine Zerlegung $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ der Knotenpunktmenge X des Graphen G mit folgenden Eigenschaften:

$$\text{(I)}\quad X=\bigcup_{i=1}^{k} X_i,\ X_i \neq \emptyset,\ X_i \cap X_j = \emptyset\ (i \neq j;\ i,j = 1,2,\dots,k),$$

$$\text{(II)}\quad \text{die Graphen } [X_i]_G \text{ sind Cliquen } (i = 1,2,\dots,k),$$

wollen wir eine *k-Zerlegung* von G nennen. Die minimale Anzahl $\nu(G)$ der Mengen, aus denen eine k-Zerlegung bestehen kann, heisse die *Cliquenüberdeckungszahl* von G. Offensichtlich gilt $\nu(G) \geqslant \alpha(G)$. Ein Graph mit $\nu(G) = \alpha(G)$ heißt *α-zerlegbar*.

Wir nennen den Graphen $G^* = (X^*, U^*)$ einen Kreis L_k $(k \geqslant 3)$, wenn man die Knotenpunkte von G derart als Folge $x_1, x_2, \dots, x_k$ anordnen kann dass

$$U^* = \{(x_i, x_{i+1})\}_{i=1,2,\dots,k}\ (x_{k+1} = x_1).$$

Die Anzahl k der Knotenpunkte (=Anzahl der Kanten) heisst die *Länge* des Kreises, und man nennt den Kreis gerade oder ungerade, je nachdem ob k eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die über L_k gemachten Aussagen wollen wir durch die Gleichung $L_k = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$ ausdrücken.

Zwei Graphen $G_1 = (X_1, U_1)$ und $G_2 = (X_2, U_2)$ seien gegeben. Das *quasi-kartesiche Produkt* der Graphen G_1 und G_2 ist der Graph, $G_1 \otimes G_2$ dessen Knotenpunktmenge die Menge aller Paare (x_1, x_2), $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ ist, und in dem zwei Knotenpunkte (x_1, x_2) und (x_1', x_2') genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie eine der drei folgenden Bedingungen befriedigen:

1. $x_1 = x_1'$ und $(x_2, x_2') \in U_2$;
2. $(x_1, x_1') \in U_1$ und $x_2 = x'_2$;
3. $(x_1, x_1') \in U_1$ und $(x_2, x_2') \in U_2$.

In der Informationstheorie spielt folgende Aufgabe eine wichtige Rolle. (Vgl. C.E. Shannon [8], C. Berge [1], (s, 37-40) O. Ore [7] (s. 220-223) (Im 2. Abschnitt dieser Arbeit werden wir dieses Problem näher betrachten.)

Ein Graph G sei gegeben, und man bilde die Graphenfolge $\{G^p\}$ mit $G^1 = G$, $G^p = G^{p-1} \otimes G$ für $p = 2,3,\dots$ Es ist $\alpha(G^p)$ $(p \geqslant 2)$ zu bestimmen.

Es gilt folgende Ungleichung

$$\alpha(G_1 \otimes G_2) \geqslant \alpha(G_1)\,\alpha(G_2), \tag{1}$$

denn sind S_1 ein Stabilitätssystem von G_1 und S_2 ein Stabilitätssystem von G_2, so bildet $S_1 \times S_2$ offenbar eine Menge unabhängiger Knotenpunkte des Graphen $G_1 \otimes G_2$. Es ist $|S_1 \times S_2| = \alpha(G_1)\,\alpha(G_2)$, da $|S_1| = \alpha(G_1)$, $|S_2| = \alpha(G_2)$ gilt.

Es lässt sich leicht folgendes zeigen:

Bemerkung. *Für jeden ungeraden Kreis L_{2k+1} $(k \geqslant 2)$ gilt*

$$\alpha(L^2_{2k+1}) > [\alpha(L_{2k+1})]^2.$$

Beweis. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}$ $(k \geqslant 2)$ die Knotenpunkte des Kreises L_{2k+1}, so dass

$$L_{2k+1} = (x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}, x_1).$$

Im Graphen L^2_{2k+1} betrachten wir die Menge

$$M = \begin{cases} M_0 \cup \left(\bigcup_{r=1}^{k/2} M_r\right) & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ M_0 \cup \left(\bigcup_{r=1}^{(k-1)/2} M_r\right) \cup M_{(k+1)/2} & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

wobei

$$M_0 = \{(x_1, x_1)\},$$

$$M_r = \{(x_{2k-2r+3}, x_i), (x_j, x_{2k-2r+3}), (x_{2r}, x_j), (x_i, x_{2r})\},$$

$$i = 2r+2,\ 2r+4, \dots, 2k-2r+2,$$

$$j = 2r+1,\ 2r+3, \dots, 2k-2r+1,$$

$$r = \begin{cases} 1, \dots, \dfrac{k}{2} & \text{(für } k \text{ gerade),} \\ 1, \dots, \dfrac{k-1}{2} & \text{(für } k \text{ ungerade),} \end{cases}$$

$$M_{(k+1)/2} = \{(x_{k+1}, x_{k+2})\}\ (k \text{ ungerade}).$$

Die Menge M besteht im Graphen L^2_{2k+1} nur aus unabhängigen Knotenpunkten, da für je zwei Knotenpunkte, (x_p, x_q) und $(x_{p'}, x_{q'})$ von M mindestens eine der Ungleichungen $|p - p'| \geqslant 2$, $q - q'| \geqslant 2$ erfüllt ist. Das bedeutet, dass in dem Graphen L_{2k+1} mindestens eine der Beziehungen $x_p \bar{\rho} x_{p'}, x_q \bar{\rho} x_{q'}$, gilt, und aus der Definition des Produktes folgt $(x_p, x_q) \bar{\rho} (x_p', x_q')$ im Graphen L^2_{2k+1}. Ausserdem gilt:

$$|M| = \begin{cases} 1 + 4\sum_{r=1}^{k/2} (k - 2r + 1) = 1 + k^2 & \text{(für } k \text{ gerade),} \\ 2 + 4\sum_{r=1}^{(k-1)/2} (k - 2r + 1) = 1 + k^2 & \text{(für } k \text{ ungerade),} \end{cases}$$

und wir folgern:

$$\alpha(L^2_{2k+1}) \geqslant k^2 + 1 > [\alpha(L_{2k+1})]^2,$$

da offenbar $\alpha(L_{2k+1}) = k$ ist. Diese Bemerkung beweist die Existenz derartiger Graphen G mit $\alpha(G^p) > [\alpha(G)]^p$ $(p \geqslant 2)$.

Wir beweisen weiter folgender

Satz. *Es besteht stets die Ungleichung*

$$\alpha(G_1 \otimes G_2) \leqslant \min\{\alpha(G_1)\,\nu(G_2), \nu(G_1)\,\alpha(G_2)\}. \tag{2}$$

Beweis. Es sei $\{X_1^1, X_1^2, \ldots, X_1^\nu\}$ eine ν-Zerlegung des Graphen G_1. Dann gilt offensichtlich

$$(X_1^i \times X_2) \cap (X_1^j \times X_2) = \emptyset \quad (i \neq j;\, i,j = 1,2,\ldots,\nu) \text{ und}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\nu} (X_1^i \times X_2) = X_1 \times X_2.$$

Da der Graph $[X_1^i]_{G_1}$ eine Clique ist, ergibt sich

$$\alpha([X_1^i \times X_2]_{G_1 \otimes G_2}) = \alpha(G_2) \quad (i = 1,2,\ldots,\nu).$$

Ausserdem gilt

$$\alpha(G_1 \otimes G_2) \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \alpha([X_1^i \times X_2]_{G_1 \otimes G_2}) = \nu(G_1)\,\alpha(G_2).$$

Ebenso schliessen wir

$$\alpha(G_1 \otimes G_2) \leqslant \nu(G_2)\,\alpha(G_1).$$

Daraus folgt (2).

Folgerung. *Ist der Graph G α-zerlegbar, so gilt $\alpha(G \otimes H) = \alpha(G)\,\alpha(H)$ für jeden Graphen H* (Satz von Shannon). (Man setze $G = G_1, H = G_2$ und beachte (1) und (2).)

C. E. Shannon hat ursprünglich seinen Satz folgendermassen formuliert (vgl. [1] S. 37—40 und [8]):

Wenn eine Abbildung σ der Knotenpunktmenge X eines Graphen G in X so existiert, dass sie folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1) *Aus $x \neq y$ und $x \rho y$ $(x, y \in X)$ folgt $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ und $\sigma(x) \rho \sigma(y)$;*

2) *$\sigma(X)$ ist eine Menge unabhängiger Knotenpunkte, dann gilt $\alpha(G \otimes H) = \alpha(G)\,\alpha(H)$ für jeden Graphen H.*

Man kann aber leicht feststellen, dass eine Abbildung mit den Eigenschaften 1) und 2) genau dann existiert, wenn $\nu(G) = \alpha(G)$ ist: Gilt nämlich $\nu(G) = \alpha(G)$, so sei $\{X_1, X_2, \ldots, X_\alpha\}$ eine Überdeckung des Graphen G mit $\alpha(= \alpha(G))$ paarweise knotenpunktfremden Cliquen, und $\{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha\}$ bezeichne ein Stabilitätssystem von G, wobei wir die Knotenpunkte des Stabilitätssystems so numeriert haben, dass $x_i \in X_i$ $(i = 1,2,\ldots,\alpha)$ gilt. (Das ist ja für jedes Stabilitätssystem möglich, da die Graphen $[X_i]_G$

$(i = 1,2,\ldots,\alpha)$ Cliquen sind.) Die Abbildung $\sigma(X_i) = x_i$ $(i = 1,2,\ldots,\alpha)$ erfüllt die Bedingungen 1) und 2).

Umgekehrt, sei σ eine Abbildung, die 1) und 2) befriedigt. Besteht die Menge S nur aus unabhängigen Knotenpunkten, so ist $\sigma(S)$ ebenfalls eine Menge unabhängiger Knotenpunkte, und es ist $|\sigma(S)| = |S|$, d.h. es folgt $|\sigma(X)| = \alpha(G)$. Ausserdem ist $[\sigma^{-1}(y)]_G$ für jedes $y \in \sigma(X)$ eine Clique. Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_\alpha$ die Elemente der Menge $\sigma(X)$. Die Mengen

$$X_1 = \sigma^{-1}(y_1),$$

$$X_i = \sigma^{-1}(y_i) - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} (X_j \cap \sigma^{-1}(y_i))\right) \quad (i = 2,3,\ldots,\alpha),$$

bilden eine α-Zerlegung des Graphen G, und folglich gilt $\nu(G) = \alpha(G)$.

Aus der Folgerung des Satzes ergibt sich besonders folgendes: Besitzt ein Graph die Eigenschaft $\nu(G) = \alpha(G)$, so gilt $\alpha(G^p) = [\alpha(G)]^p$ $(p \geqslant 1)$.

2. Anwendung i der Informationstheorie. Im 1. Abschnitt dieser Arbeit haben wir behauptet, dass die Bestimmung der Stabilitätszahl des Graphen G^m $(m \geqslant 2)$ eine wichtige Bedeutung in der Informationstheorie findet.

Wir wollen im folgenden diesen Gegenstand näher behandeln. Ein Nachrichtenübertragungssystem besteht schematich aus mehreren Teilen (siehe Abb. 1)

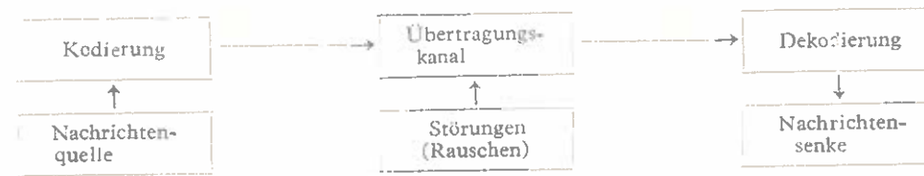

Abb. 1

Wir interessieren uns insbesondere für den Übertragungskanal. Als Kanal bezeichnet man einen Mechanismus, der Signale überträgt. Um den Begriff des Kanals mathematisch beschreiben zu können, braucht man vor allem zwei Mengen (die im Allgemeinen voneinander verschieden sein können) von Signalen (Informationsträgern), nämlich eine Menge S von Eingangssignalen, die dieser Kanal überhaupt aufnehmen kann, und eine Menge S' von Signalen, die der betrachtete Kanal abgeben kann. Die Mengen S und S', die wir immer als endlich voraussetzen werden, werden auch als Eingangs- bzw. Ausgangsalphabet bezeichnet, und die Elemente von S und S' werden Buchstaben genannt. Wenn jeder eintretende Buchstabe $s \in S$ am Ausgang einen eindeutig bestimmten Buchstaben $s' = s'(s) \in S'$ ergibt, dann nennt man den Kanal ungestört.

Im Allgemeinen bewirkt der Einfluss von Störungen, dass wir beim Eintritt ein und desselben Buchstaben $s \in S$ in verschiedenen Fällen am Ausgang des Kanals verschiedene Buchstaben $s' \in S'$ erhalten. Da die Störungen naturgemäss als zufällige Erscheinungen zu betrachten sind, und da gerade sie bei einem eintretenden Buchstaben $s \in S$ das Auftreten des einen oder anderen Buchstaben $s' \in S'$ am Ausgang des Kanals bedingen, kann man von der Wahrscheinlichkeit sprechen, dass man am Ausgang des Kanals den Buchstaben $s' \in S'$ erhält, unter der Bedingung, dass der Buchstabe $s \in S$ eingegeben wurde; wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit $w_s(s')$.

Wir betrachten im Folgenden nur solche Kanäle, bei denen die Wahrscheinlichkeit, dass man einen bestimmten Buchstaben s' am Ausgang des Kanals erhält, unter der Bedingung, dass am Eingang des Kanals ein Bestimmter Buchstabe s eingespeist wurde, nur von s abhängt. Ein solcher Kanal wird als *Kanal ohne Gedächtnis* bezeichnet.

Ein Kanal ohne Gedächtnis ist dann durch folgende drei Bestimmungstücke gegeben:

1. das Eingangsalphabet $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$,
2. das Ausgangsalphabet $S' = \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_q\}$,
3. die Übergangsmatrix $(w_i(j))_{p \times q}$, wobei $w_i(j) = w_{s_i}(s'_j)$.

(Dabei ist $\sum_{j=1}^{q} w_i(j) = 1$, denn einer der q verschiedenen Ausgangsbuchstaben s'_j muss bei Einspeisung des Buchstaben s_i am Ausgang des Kanals auftreten.)

Es ist in den meisten Fällen erforderlich, an Stelle der Übertragung einzelner Buchstaben die Übertragung von Blöcken von m aufeinanderfolgender Buchstaben zu betrachten. Die Übertragung m aufeinanderfolgender Buchstaben durch den gegebenen gedächtnislosen Kanal ist gleichbedeutend mit der Übertragung eines Blockes von m Buchstaben durch einen wie folgt erweiterten Kanal:

An Stelle der p verschiedenen Eingangsbuchstaben treten die p^m verschiedenen möglichen geordneten Kombinationen zu Blöcken von je m Buchstaben; das gleiche gilt für die q verschiedene Ausgangsbuchstaben. Die den Kanal ohne Gedächtnis beschreibende Matrix wird infolge der Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Übergänge für den erweiterten Kanal zu einer Matrix mit p^m Zeilen und q^m Spalten, deren Elemente die Produkte der Übergangswahrscheinlichkeiten der kombinierten Einzelbuchstaben sind. Es gilt also

$$w_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(j_1, j_2, \ldots, j_m) = \prod_{r=1}^{m} w_{i_r}(j_r). \tag{3}$$

Einen erweiterten Kanal, der Blöcke von m Buchstaben überträgt, wollen wir auch einen *m-Kanal* nennen.

Es sei nun ein m-Kanal gegeben; U bzw. V bezeichnen die Menge aller Eingangs- bzw. Ausgangsblöcke. Zu jedem Eingangsblock $u \in U$ betrachten wir die Menge

$$V_u = \{v \mid v \in V \text{ und } w_u(v) > 0\}.$$

Zwei Blöcke $u, u' \in U$ heissen *unterscheidbar*, wenn die zugeordneten Mengen V_u und $V_{u'}$ disjunkt sind.

Es ist in der Informationstheorie von grosser Bedeutung, eine maximale Familie von unterscheidbaren Blöcken zu finden oder wenigstens die Anzahl der Elemente einer solchen Familie zu bestimmen. Ist nämlich eine Familie von unterscheidbaren Blöcken bekannt, so werden wir bei der Aussendung eines Blöckes u dieser Familie mit Sicherheit am Ausgang des Kanals einen Block v erhalten, der zu V_u gehört. Da aber die den einer unterscheidbaren Familie angehörenden Blöcke entsprechenden Mengen paarweise disjunkt sind, lässt sich bei bekanntem v eindeutig die Menge V_u bestimmen, und folglich können wir auch den gesendeten Block u bestimmen. Wenn man also bei der Sendung von Signalen nur Blöcke einer unterscheidbaren Familie benutzt, kann man trotz Störungen die gesendeten Signale eindeutig bestimmen. Es ist also eine fehlerfreie Übertragung möglich.

Natürlich hängt die Antwort auf die Frage, ob man einen zu übertragenden Text in Blöcken u einer unterscheidbaren Familie kodieren kann, von der Anzahl solcher Blöcke ab, und offenbar muss man für eine effektive fehlerfreie Kodierung auch die unterscheidbaren Blöcke kennen.

Einem gegebenen m-Kanal kann man einen Graphen G_m folgendermassen zuordnen: Die Knotenpunktmenge des zugeordneten Graphen G_m ist die Menge U der Eingangsblöcke des m-Kanals, und zwei verschiedene Knotenpunkte $u, u' \in U$ werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die Blöcke u und u' nicht unterscheidbar sind, d.h. wenn $V_u \cap V_{u'} \neq \emptyset$ ist. Eine Familie von unterscheidbaren Blöcken des m-Kanals entspricht offenbar einer Menge unabhängigen Knotenpunkte des zugeordneten Graphen G_m und umgekehrt. Eine maximale Familie von unterscheidbaren Blöcken entspricht dann einem Stabilitätssystem des Graphen G_m; die maximale Anzahl der unterscheidbaren Blöcke des betrachteten m-Kanals ist also $\alpha(G_m)$. Der Graph G_m weist in den meisten Fällen eine komplizierte Struktur auf, und es erhebt sich die Frage, ob man die Stabilitätszahl des Graphen G_m durch numerische Charakteristiken des Graphen G ausdrücken kann, wobei G denjenigen Graphen bezeichnet, der dem zugehörigen 1-Kanal zugeordnet ist.

Ist der betrachtete Kanal gedächtnislos, so lässt sich G_m als quasi-kartesisches Produkt von m Exemplaren des Graphen G ausdrücken, d.h. es gilt

$$G_m = G^m = G \otimes G \otimes \ldots \otimes G.$$

Zum Beweis zeigen wir, dass

$$G_m = G_r \otimes G_t \quad (r + t = m;\ r, t \geq 1) \text{ gilt.}$$

Die Knotenpunktmenge von G_m stimmt definitionsgemäss mit der Knotenpunktmenge des Graphen $G_r \otimes G_t$ überein. Wir nehmen zuerst an, dass zwei verschiedene Knotenpunkte u und u' des Graphen G_m in G_m (durch eine Kante) verbunden sind, d.h. dass es mindestens einen Ausgangsblock $v \in V$ gibt, so dass

$$w_u(v) > 0,\ w_{u'}(v) > 0. \tag{4}$$

gilt. Sind $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_m}$ die aufeinanderfolgenden Buchstaben des Blockes u, so schreiben wir $u = u_m = [s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_m}]$. Es gilt dann

$$u = u_m = [u_r, u_t],$$

wobei $u_r = [s_{i_1}, \ldots, s_{i_r}]$, $u_t = [s_{i_{r+1}}, \ldots, s_{i_m}]$.

Analog haben wir

$$u' = u'_m = [u'_r, u'_t] \text{ und } v = v_m = [v_r, v_t].$$

Aus (3) ergibt sich

$$w_u(v) = w_{u_r}(v_r)\, w_{u_t}(v_t),$$

$$w_{u'}(v) = w_{u'_r}(v_r)\, w_{u'_t}(v_t),$$

und aus (4) folgt

$$\left| \begin{array}{l} w_{u_r}(v_r) > 0,\ w_{u'_r}(v_r) > 0, \\ w_{u_t}(v_t) > 0,\ w_{u'_t}(v_t) > 0. \end{array} \right. \tag{5}$$

Es können nun folgende Fälle eintreten:

1. $u_r = u'_r$; dann ist $u_t \neq u'_t$ (denn die beiden betrachteten Blöcke u und u' sind voneinander verschieden), und wegen (5) sind die Knotenpunkte u_t und u'_t in G_t verbunden.

2. $u_r \neq u'_r$ und $u_t \neq u'_t$; die Knotenpunkte u_r und u'_r bzw. u_t und u'_t sind gemäss (5) in G_r bzw. in G_t durch eine Kante verbunden.

3. $u_r \neq u'_r$ und $u_t = u'_t$; die Knotenpunkte u_r und u'_r sind gemäss (5) in G_r verbunden.

Damit ist gezeigt: Sind zwei verschiedene Knotenpunkte u, u' des Graphen G_m in G_m verbunden, so befriedigen die Knotenpunkte u_r, u'_r des Graphen G_r und u_t, u'_t des Graphen G_t eine der drei Bedingungen 1., 2., 3., des quasi-kartesischen Produkts, und folglich sind die Knotenpunkte u und u' im Graphen $G_r \otimes G_t$ durch eine Kante verbunden.

Wir nehmen nun an dass die Knotenpunkte u und u' in dem Graphen $G_r \otimes G_t$ durch eine Kante verbunden sind, d.h. dass die Knotenpunkte u_r, u'_r des Graphen G_r und die Knotenpunkte u_t, u'_t des Graphen G_t eine der in der Definition des quasi-kartesischen Produkts verlangten Bedingungen erfüllen, und wir zeigen, dass die Knotenpunkte u und u' auch in dem Graphen G_m verbunden sind.

Wir haben also folgende drei Fälle zu betrachten:

1. $u_r = u'_r$, u_t und u'_t sind in G_t verbunden, d.h. es gibt einen Ausgangsblock v_t des t-Kanals, so dass

$$w_{u_t}(v_t) > 0,\ w_{u'_t}(v_t) > 0 \text{ gilt} \tag{6}$$

Da $\sum_{j=1}^{q} w_{s_i}(s'_j) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ gilt, ergibt sich zu jedem Eingangsbuchstaben s_i die Existenz mindestens eines Ausgangsbuchstaben s'_j derart, dass

$$w_{s_i}(s'_j) > 0 \text{ gilt.}$$

Es seien dann $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}$ die aufeinanderfolgenden Buchstaben des Blockes $u_r\ (= u'_r)$, und $s'_{j_1}, s'_{j_2}, \ldots, s'_{j_r}$ solche Ausgangsbuchstaben, so dass

$$w_{s_{i_k}}(s'_{j_k}) > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \text{ gilt.} \tag{7}$$

Es seien

$$v_r = [s'_{j_1}, s'_{j_2}, \ldots, s'_{j_r}] \text{ und } v = [v_r, v_t].$$

Dann gilt wegen (3), (6) und (7)

$$w_u(v) > 0,\ w_{u'}(v) > 0,$$

d.h. die Knotenpunkte u und u' sind in G_m verbunden.

2. Die Knotenpunkte u_r, u'_r bzw. u_t, u'_t sind in G_r bzw. in G_t verbunden, d.h. dass mindestens ein Ausgangsblock v_r bzw. v_t existiert, so dass gilt

$$w_{u_r}(v_r) > 0,\ w_{u'_r}(v_r) > 0,$$

$$w_{u_t}(v_t) > 0,\ w_{u'_t}(v_t) > 0.$$

Daraus folgt wegen (3) $w_u(v) > 0$, $w_{u'}(v) > 0$ mit $v = [v_r, v_t]$; die Knotenpunkte u und u' sind also in G_m verbunden.

3. Die Knotenpunkte u_r und u'_r sind in G_r verbunden und es gilt $u_t = u'_t$. Dieser Fall ist dem 1. Falle analog. Damit ist gezeigt, dass $G_m = G^m$ gilt. Es gilt, wie wir im 1. Abschnitt dieser Arbeit bemerkt haben,

$$\alpha(G^m) \geqslant [\alpha(G)]^m, \tag{8}$$

und gemäss Bemerkung gibt es solche Graphen G mit $\alpha(G^m) > [\alpha(G)]^m$ $(m \geqslant 2)$. Die Beziehung (8) zeigt insbesondere, dass für genügend grosses m die Anzahl der unterscheidbaren Blöcke von m Buchstaben eines nicht total gestörten Kanals (d.h. $\alpha(G) > 1$) ohne Gedächtnis genug gross ist, so dass man einen zu übertragenden Text in solchen Blöcken kodieren und fehlerfrei übertragen kann.

Aus (2) folgt

$$\alpha(G^m) \leqslant [\nu(G)]^m. \tag{9}$$

C.E. Shannon definierte in seiner Arbeit [8] als fehlerfreie Durchlasskapazität eines gedächtnislosen Kanals folgende Zahl

$$C_0 = \sup_{m \in N} \frac{1}{m} \log \alpha(G^m),$$

und C. Berge [1] nannte die Zahl

$$\theta(G) = \sup_{m \in N} \sqrt[m]{\alpha(G^m)} = e^{C_0} \tag{10}$$

die *Kapazität* des Graphen G. (N bezeichnet dabei die Menge der natürlichen Zahlen.) J. Ljubic [4] zeigte, dass

$$\theta(G) = \lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{\alpha(G^m)} \text{ und damit } C^0 = \lim_{m \to \infty} \left\{ \frac{1}{m} \log \alpha(G^m) \right\} \text{ gilt.}$$

Bekanntlich ist die Bestimmung der fehlerfreien Durchlasskapazität eine Kanals eine schwierige, aber sehr wichtige Aufgabe der Informationstheorie.

Aus (8), (9) und (10) folgt

$$\alpha(G) \leqslant \theta(G) \leqslant \nu(G),$$

und für Graphen G mit $\nu(G) = \alpha(G)$ ergibt sich

$$\theta(G) = \alpha(G) \text{ und } C_0 = \log \alpha(G).$$

Es lässt sich also für einen gedächtnislosen Kanal, für den der zugeordnete Graph α-zerlegbar ist, die fehlerfreie Durchlasskapazität ohne Mühe bestimmen.

α-zerlegbare Graphen sind von einer Reihe Graphentheoretiker untersucht worden; diese Autoren geben verschiedene hinreichende Bedingungen dafür, dass ein Graph α-zerlegbar ist (vgl. [2] (S. 155-166), [3], [5], [6]).

LITERATURVERZEICHNIS

1. Berge, C. — *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1958.
2. Berge, C. — *Some Classes of Perfect Graphs. Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press, London and New York 1967.
3. Gallai, T. — *Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 7(1962), 3–36.
4. Ljubic, J. — *A remark on a problem of Berge* (russ.), Sibirsk. Mat. Z. 5 (1964), 961–962.
5. Olaru, E. — *Über die Überdeckung von Graphen mit Cliquen*, Wiss. Z. TH Ilmenau 15 (1969) H. 4/5, 115–121.
6. Olaru, E. — *Beiträge zur Theorie der perfekten Graphen*, (Im Druck).
7. Ore, O. — *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. (1962).
8. Shannon, C.E. — *The Zero-error Capacity of a Noisy Channel*, Trans. 1956 Symp. Inform. Theory, IRE IT–2, 8–12.

O APLICAȚIE A GRAFURILOR α-DECOMPOZABILE ÎN TEORIA INFORMAȚIEI

Rezumat

În lucrarea de față se consideră grafuri $G = (X, U)$ finite, neorientate, fără bucle și fără muchii multiple. Cu X s-a notat mulțimea vîrfurilor iar cu U mulțimea muchiilor grafului G. O partiție $\{X_1, \ldots, X_k\}$ a mulțimii vîrfurilor X, cu proprietatea că fiecare subgraf secționat de mulțimea X_i $(i = 1, \ldots, k)$ în graful G este complet (o clică), se numește o k-descompunere a grafului G. Numărul minim $\nu(G)$ de mulțimi din care poate consta o k-descompunere a grafului G se numește numărul de acoperire cu clici al lui G. În general are loc relația $\nu(G) \geqslant \alpha(G)$ $\alpha(G)$ este numărul de stabilitate (internă) al lui G). Dacă $\nu(G) = \alpha(G)$, atunci G se numește α-decompozabil. În teoria informației un rol important îl joacă determinarea numărului $\alpha(G \otimes G \otimes \ldots \otimes G) = \alpha(G^p)$ $(p \geqslant 2)$, unde $G_1 \otimes G_2$ este produsul cvasicartezian al grafurilor G_1 și G_2. Are loc inegalitatea $\alpha(G_1 \otimes G_2) \geqslant \alpha(G_1)\, \alpha(G_2)$. În lucrare se arată că pentru orice cerc L_{2k+1} $(k \geqslant 2, 2k+1$ fiind lungimea cercului) are loc $\alpha(L^2_{2k+1}) > [\alpha(L_{2k+1})]^2$. Mai departe se demonstrează că $\alpha(G_1 \otimes G_2) \leqslant \min[\alpha(G_1)\, \nu(G_2), \nu(G_1)\, \alpha(G_2)]$, care are drept consecință o teoremă a lui Shannon. De aici se deduce că pentru grafuri α-decompozabile are loc relația $\alpha(G^p) = [\alpha(G)]^p$, de unde rezultă aplicarea grafurilor α-decompozabile în probleme de codificare fără eroare în decodificare. Acest ultim fapt este analizat în al doilea paragraf al lucrării.