TOPOGENE ORDNUNGEN UND NACHBARSCHAFTSSTRUKTUREN

VON

PETER HAMBURG

(Craiova)

In den letzten zwei Jahrzehnten wurden wichtige Fortschritte gemacht, um für drei grundlegende Zweige der allgemeinen Topologie: die Theorie der topologischen, der uniformen und der Nachbarschaftsräume eine gemeinsame Methode und Terminologie auszuarbeiten. Der Übergang von der einen Struktur zu der anderen war vorher etwas gekünstelt. Der Theorie der syntopogenen Räume gelang es eine natürliche Synthese aufzubauen, in der auch die Übergänge einfache Standardoperationen sind. Herr Á. Császár übernimmt in [3] als Grundmethode für diese Theorie eine der zahlreichen Methoden der Nachbarschaftsstrukturen, und zwar die von Ju. M. Smirnov in [8] verwendete „$\ll$" Relation, die, verallgemeinert, zum Begriff der topogenen Ordnung führte.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir zeigen, dass diese Vereinheitlichung nicht nur mittels der topogenen Ordnungen möglich ist, sondern sie kann auch mittels anderer, zur Bestimmung der Nachbarschaftsstruktur verwendbaren Relationen gewährleistet werden. Wir entwickeln hier diesen Gedankengang für Smirnov's Nachbarschaftsrelation δ (oder deren Negation ρ), für die Nachbarschaftsabbildung und den Kernoperator von Banaschewski und Maranda [2].

Um den Zusammenhang zwischen den neuen und der ursprünglichen $<$-Relation mit grösserer Genauigkeit abstufen zu können, werden wir für die Relation $<$ eine von den von Á. Császár eingeführten verschiedene Axiomatisierung wählen, die aber mit jener gleichwertig ist. In dem ersten Teil untersuchen wir die Abhängigkeit, bzw. die Unabhängigkeit dieser Axiome. Es zeigt sich, dass die in der Literatur gebräuchlichen Axiomsysteme für Nachbarschaftsstrukturen abhängig sind. Wir führen ein neues Axiom

ein, das für Nachbarschaftsordnungen, deren Dichte und Symmetrie sichert. Im zweiten Teil ordnen wir jeder $<$-Relation eineindeutig eine $\rho_<$-Relation und eine Abbildung $\sigma_<$ zu. Diese Zuordnung ermöglicht eine äquivalente Übersetzung jedes Axioms in der neuen Terminologie. Ausserdem sind einige in der Literatur öfter auftretende Axiome in das hier erörterte System eingeschaltet. Im dritten Teil beschäftigen wir uns mit dem mit Σ bezeichneten Kernoperator. Eigentlich könnte man diesen auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen, jedoch scheint es uns natürlicher ihn nur unter solchen Bedingungen in Betracht zu nehmen unter denen dessen Einschränkung Σ' auf $F(X)$ nur Werte aus $F(X)$ annimmt. In [2] wird gezeigt, dass es so geschieht mit den Nachbarschaftsstrukturen. Unsere Ergebnisse (die Sätze 22—24) zeigen, dass dies auch für viel allgemeinere Ordnungen wahr ist, und zwar schon wenn $<$ eine $\cap$-topogene Ordnung ist. Wir finden eine eineindeutige Zuordnung zwischen diesen Ordnungen und den Abbildungen $\Sigma' : F(X) \to F(X)$ die vier gegebenen Axiomen genügen. Jedem zusätzlichen Axiom $[<_i]$ entspricht je eine Bedingung $[\Sigma'_i]$.

Die Axiome $[<_i]$. Es sei X eine Menge. Sind A und B disjunkt, so schreiben wir $A * B$. Für $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ heisst $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$, dass es ein $A \in \mathfrak{A}$ und ein $B \in \mathfrak{B}$ gibt mit $A * B$. Wenn $A \in \mathfrak{P}(X)$, dann bezeichnet $\bar{A}$ die Menge $\{B \in \mathfrak{P}(X) : A \subset B\}$. Eine topogene Ordnung ist bekanntlich eine besondere binäre Relation $<$ in $\mathfrak{P}(X)$. Wir betrachten ein nicht-leeres Element $<$ aus $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}[\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)]$ und schreiben anstatt $(A, B) \in <$ auch $A < B$ und anstatt $A < B \,\&\, B < C$ auch $A < B < C$. Wir unterwerfen $<$ folgenden Bedingungen:

$$[<'_1] \quad \forall_{A \in \mathfrak{P}(X)} \; \emptyset < A$$

$$[<''_1] \quad \forall_{A \in \mathfrak{P}(X)} \; A < X$$

$$[<_2] \quad A < B \quad \Rightarrow A \subset B.$$

$$[<'_3] \; B < C \subset D \quad \Rightarrow B < D,$$

$$[<''_3] \; A \subset B < C \quad \Rightarrow A < C,$$

$$[<'_4] \; A < B_1 \,\&\, A < B_2 \quad \Rightarrow A < B_1 \cap B_2,$$

$$[<''_4] \; A_1 < B \,\&\, A_2 < B \quad \Rightarrow A_1 \cup A_2 < B,$$

$$[\bar{<}'_4] \; \forall_{i \in I} \; A < B_i \quad \Rightarrow A < \bigcap \{B_i : i \in I\},$$

$$[\bar{<}''_4] \; \forall_{i \in I} \; A_i < B \quad \Rightarrow \bigcup \{A_i : i \in I\} < B,$$

$$[<_5] \; A < B \quad \Rightarrow X - B < X - A,$$

$$[<_6] \; A < B \Rightarrow \exists_{C \in \mathfrak{P}(X)} \; A < C < B.$$

$[<_i]$ wird irgendeine der obigen Bedingungen bezeichnen, ungeachtet davon ob es bestrichelt ist oder nicht. Die Eigenschaften $[<'_i]$ und $[<''_i]$ heissen komplementär. Wenn die Relation $<$ der Bedingung $[<'_i]$ genügt, so erfüllt $<^c = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) : X - B < X - A\}$ das Axiom $[<''_i]$.

Die gegebenen Axiome sind nicht alle unabhängig. Sind $[<_j]$ und $[<_k]$ miteinander gleichwertig in der Anwesenheit des Axioms $[<_i]$, also wenn

$$[<_i] \,\&\, [<_j] \Leftrightarrow [<_i] \,\&\, [<_k]$$

dann hat $[<_i]$ die Rolle eines Katalysators und wir schreiben

$$[<_j] \Leftrightarrow [<_k] \quad (\mathrm{Kat}\,[<_i]).$$

Mittels dieser Bezeichnung können wir vorerst leicht feststellen, dass

1. Satz. *Zwischen den Axiomen* $[<_i]$ *bestehen folgende Beziehungen:*

a) $[\bar{<}'_4] \Rightarrow [<_4]$

b) $[\bar{<}''_4] \Rightarrow [<''_4]$

c) $[<'_1] \Leftrightarrow [<''_1]$ (Kat $[<_5]$)

d) $[<'_3] \Leftrightarrow [<''_3]$ (Kat $[<_5]$)

e) $[<'_4] \Leftrightarrow [<''_4]$ (Kat $[<_5]$)

Weniger offensichtlich ist die folgende Behauptung:

2. Satz. *Ist* $< \in \mathfrak{P}$ *nicht-leer, so folgt aus* $[<'_3], [<''_4], [<_5]$ *und* $[<_6]$ *die Bedingung* $[<_1]$.

Beweis. Da $<$ nicht-leer ist, gibt es $U, V \in \mathfrak{P}(X)$ mit $U < V$; aus $V \subset X$ folgt nach $[<'_3]$, dass $U < X$ ist und nach $[<_6]$ gibt es ein $W \in \mathfrak{P}(X)$ für das $U < W < V$ erfüllt ist. Daraus folgt nach $[<_5]$ $X - W < X - U$. Aber $W < X$ und aus $[<''_4]$ folgt $X < X$, also auch $\emptyset < \emptyset$, und endlich $\emptyset < A$ für jedes $A \in \mathfrak{P}(X)$, da $\emptyset \subset A$ ist. $\ast$

Die in den vorigen Sätzen enthaltenen und die daraus ableitbaren Beziehungen erschöpfen alle Beziehungen zwischen den gegebenen Axiomen $[<_i]$. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes:

3. Satz. *Die folgenden Axiomsysteme sind unabhängig:*

(a) $\{[<_2], [<'_3], [<'_4], [<_5], [<_6]\}$,

(b) $\{[<'_1], [<_2], [<'_4], [<_5], [<_6]\}$,

(c) $\{[<_1'], [<_2], [<_3'], [<_5], [<_6]\}$,

(d) $\{[<_1'], [<_1''], [<_2], [<_3'], [<_3''], [<_4'], [\overline{<_4'}], [<_6]\}$,

(e) $\{[<_1'], [<_2], [<_3'], [<_4'], [<_5]\}$,

(f) $\{[<_2], [<_3'], [<_4'], [<_7]\}$.

Tauscht man irgendwelches dieser Axiome mit seinem Komplementär aus, oder $[<_4']$ *mit* $[\overline{<_4'}]$ *oder auch* $[<_4'']$ *mit* $[\overline{<_4''}]$, *so bleibt das System unabhängig. Aus* $[<_4']$ *bzw.* $[<_4'']$ *folgt* $[\overline{<_4'}]$ *bzw.* $[<_4'']$ *auch in Gegenwart aller anderen Axiome nicht.* (Für $[<_7]$ siehe den Satz 4).

Der Beweis folgt aus folgenden Beispielen.

Wir Bezeichnen mit $X=\{a,b\}$; $X_1=\{a,b,c\}$; $A=\{a\}$; $B=\{b\}$; $C=\{c\}$; $A_1=\{b,c\}$; $B_1=\{a,c\}$; $C_1=\{a,b\}$ und führen folgende Relationen in $\mathfrak{P}(X)$ ein:

$$<_1=\{(A,A),\ (B,B)\}$$

$$<_2=\mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(X)$$

$$<_3=\{\emptyset\}\times\mathfrak{P}(X)\cup\mathfrak{P}(X)\times\{X\}\cup\{(A,A)\}$$

$$<_4=\{(\emptyset,A),\ (\emptyset,B),\ (\emptyset,X),\ (A,X),\ (B,X),\ (A,A),\ (B,B)\}$$

$$<_5=\{(\emptyset,X),\ (A,X),\ (B,X),\ (X,X)\}$$

$$<_6=\{(\emptyset,X)\}.$$

In $\mathfrak{P}(X_1)$ definieren wir

$$<_7=\{\emptyset\}\times\mathfrak{P}(X_1)\cup\mathfrak{P}(X_1)\times\{X_1\}\cup\{(A,A)\}$$

$$<_8=<_7\cup\{(A_1,A_1)\}$$

$$<_9=\{(U,V)\in\mathfrak{P}(X_1)\times\mathfrak{P}(X_1):U\subset V\}-\{(C,C),\ (C_1,C_1)\}$$

$$<_{10}=<_9\cup\{(C,C)\}$$

$$<_{11}=\emptyset\times\mathfrak{P}(X_1)\cup\mathfrak{P}(X_1)\times\{X_1\}\cup\{(A,B_1),(B,A_1)\}.$$

Es sei nun X_2 eine unendliche Menge — zum Beispiel R — und $\mathfrak{L}$ ein $\bigcup$-vollständiger, aber $\bigcap$-unvollständiger Unterverband von $\mathfrak{P}(X_2)$ — z.B. die Menge aller euklidisch offenen Mengen — und bestimmen $<_{12}$ durch

$$A<_{12}B \Leftrightarrow \exists\, L\in\mathfrak{L}: A\subset L\subset B.$$

Die folgende Tafel zeigt die von den gegebenen Relationen erfüllten (+) bzw. unerfüllten (—) Bedingungen:

Relation \ Eigenschaft	$[<_1']$	$[<_1'']$	$[<_2]$	$[<_3']$	$[<_3'']$	$[<_4']$	$[<_4'']$	$[\overline{<_4'}]$	$[\overline{<_4''}]$	$[<_5]$	$[<_6]$	$[<_7]$
$<_1$	—	—	+	—	—	+	+	+	+	+	+	—
$<_2$	+	+	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$<_3$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	+	—
$<_4$	—	—	+	+	+	—	—	—	—	+	+	+
$<_5$	—	+	+	—	+	+	+	+	+	—	+	—
$<_5^c$	+	—	+	+	+	+	+	+	+	—	+	—
$<_6$	—	—	+	+	+	+	+	+	+	+	—	—
$<_7$	+	+	+	—	+	+	+	+	+	—	+	—
$<_7^c$	+	+	+	+	—	+	+	+	+	—	+	—
$<_8$	+	+	+	—	—	+	+	+	+	+	+	+
$<_9$	+	+	+	+	+	—	—	—	—	+	+	+
$<_{10}$	+	+	+	+	+	—	+	—	+	—	+	—
$<_{10}^c$	+	+	+	+	+	+	—	+	—	—	+	—
$<_{11}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	—
$<_{12}$	—	+	+	+	+	+	+	—	+	—	+	—
$<_{12}^c$	+	+	+	+	+	+	+	+	—	—	+	—

Császár benützt neben $[<_4']$ und $[<_4'']$ auch die folgenden Eigenschaften:

$$[<_4^0]\quad A_1<B_1\ \&\ A_2<B_2\Rightarrow A_1\cap A_2<B_1\cap B_2$$

$$[<_4^{00}]\quad A_1<B_1\ \&\ A_2<B_2\Rightarrow A_1\cup A_2<B_1\cup B_2$$

(siehe [3] S. 29 (Q)). Man überzeugt sich leicht, dass

$$[<_4^0]\Leftrightarrow[<_4']\ \&\ [<_3'']\ (\mathrm{Kat}\,[<_1'])$$

$$[<_4^{00}]\Leftrightarrow[<_4'']\ \&\ [<_3']\ (\mathrm{Kat}\,[<_1'']).$$

Siehe hierauf bezüglich auch [6], S. 645.

Die wichtigsten, durch Kombination der Bedingungen $[<_i]$ erhaltenen Begriffe — siehe auch [3] — sind die folgenden:

Eine nicht-leere binäre Relation $<$ aus $\mathfrak{P}(X)$ heisst *perfekt*, wenn sie $[\overline{<_4'}]$ erfüllt. Ist $[<_5]$ bzw. $[<_6]$ erfüllt, so ist $<$ *symmetrisch*, bzw, *dicht*. Eine *halbtopogene Ordnung* ist durch $[<_1']$, $[<_1'']$, $[<_2]$, $[<_3']$, $[<_3'']$ gekennzeichnet. Genügt $<$ ausserdem den Bedingungen $[<_4']$ und $[<_4'']$, so ist es eine *topogene Ordnung*. Eine perfekte und dichte topogene Ordnung heisst eine *topologische Ordnung*, eine symmetrische und dichte topogene Ordnung ist eine *Nachbarschaftsordnung*.

Aus dem Satze 3 sieht man, dass alle obigen Definitionen bis um die letzte mit einem System unabhängiger Axiome gegeben sind. Das ist

nicht mehr wahr, wenn auch die Eigenschaft $[<_5]$ verlangt wird. Bei der Definition der Nachbarschaftsstrukturen werden z. B. die Axiome $[<_1']$, $[<_1'']$, $[<_3'']$, $[<_4'']$ überflüssig, wie es der Satz 1 und 2 zeigt; ausserdem können die Bedingungen $[<_5]$ und $[<_6]$ mit einer einzigen ersetzt werden:

4. Satz. *Eine binäre Relation $<$ aus $\mathfrak{P}(X)$ ist eine Nachbarschaftsordnung genau dann, wenn sie nicht-leer ist und folgenden Bedingungen genügt:* $[<_2]$, $[<_3']$, $[<_4']$ *und*

$$[<_7] \quad B < C \cdot A \Rightarrow \exists\, A', B' \in \mathfrak{P}(X) : B < B' \cdot A' > A.$$

Beweis. 1). Es sei $<$ eine Nachbarschaftsordnung und $B < C \cdot A$. Dann ist $A \subset X - C$ und nach $[<_5]$ folgt $X - C < X - B$ aus $B < C$, also da $[<_3']$ vorausgesetzt wurde, $A < X - B$. Wegen $[<_6]$ gibt es ein $A' \in \mathfrak{P}(X)$ mit $A < A' < X - B$. Wenn wir $X - A'$ mit B' bezeichnen, so ist $A' \cdot B'$ und wegen $[<_5]$, folgt aus $X - B' < X - B$ auch $B < B'$. Es ist also $B < B' \cdot A' > A$.

2). Wir nehmen jetzt an, dass die Relation $<$ die Bedingungen $[<_2]$, $[<_3']$, $[<_4']$ und $[<_7]$ erfüllt und zeigen zuerst, dass auch $[<_5]$ gilt:

a). Ist $A < B$, so folgt aus $B \cdot X - B$ nach $[<_7]$, dass es zwei Mengen A', B' gibt mit $A < A' \cdot B' > X - B$. Dann ist $B' \subset X - A'$ und aus $A < A'$ folgt wegen $[<_2]$ dass $A \subset A'$ und $X - A' \subset X - A$ ist. Wir haben also $X - B < B' \subset X - A$ und dann ist $X - B < X - A$ wegen $[<_3']$.

b). Im Besitze von $[<_5]$ folgt nach dem 1. Satze auch $[<_3'']$ und $[<_4'']$. Es bleibt $[<_6]$ zu zeigen. Es sei dazu $A < B$. Wie auch bei a). finden wir $A', B' \in \mathfrak{P}(X)$ mit $A < A' \cdot B' > X - B$, woraus nach $[<_5]$ $X - B' < B$ folgt. Andererseits ist $A' \subset X - B'$ und wegen $[<_3'']$ $A' < B$. Wir haben damit $A < A' < B$ erhalten.

Die Eigenschaften $[<_1']$ und $[<_1'']$ folgen nun aus dem 2. bzw. 1. Satze.

Bemerkenswert ist dass bisher anscheinend noch in keiner Arbeit ein unabhängiges Axiomsystem für die Nachbarschaftsordnungen verwendet wurde — siehe z. B. [1], [3], [4], [8], [9].

Aus den Sätzen 3. und 4. folgt aber:

5. Satz. *Die beiden folgenden Axiomsysteme für Nachbarschaftsordnungen sind unabhängig:*

$$\text{(a)} \quad \{[<_2], [<_3'] \; [<_4'], [<_5], [<_6]\},$$

$$\text{(f)} \quad \{[<_2], [<_3'], [<_4'], [<_7]\}.$$

Die Relation ρ. Die Abbildung σ. In der Theorie der Nachbarschaftsräume gibt es ausser der Nachbarschaftsordnung $<$ auch andere Verfahren um die Nachbarschaftsstruktur zu bestimmen. Chronologisch

das erste war die Nachbarschaftsrelation δ deren Negation wir mit ρ bezeichnen. Noch in 1952 bewies Ju. M. Smirnov in [8], dass diese zwei Methoden gleichwertig sind im Falle der Nachbarschaftsstrukturen. Wir werden zeigen, dass diese Gleichwertigkeit auch im allgemeinsten Falle stattfindet. Später führten B. Banaschewski und J. M. Maranda auch andere Methoden ein, z. B. die Nachbarschaftsabbildung — siehe [2] — die wir verallgemeinern wollen.

Es sei $\mathfrak{P}_{1,2} = [\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))]^{\mathfrak{P}(X)}$. Wir ordnen jeder Relation $< \in \mathfrak{P}$ eine neue $\rho_< \in \mathfrak{P}$ und eine Abbildung $\sigma_< \in \mathfrak{P}_{1,2}$ folgendermassen zu:

$$[\rho : <] \quad A \, \rho_< B \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A < X - B,$$

$$[\sigma : <] \quad \sigma_<(A) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{B \in \mathfrak{P}(X) : A < B\}.$$

Ist $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{P}_{1,2}$ so schreiben wir $\sigma_1 \subset \sigma_2$ wenn $\sigma_1(A) \subset \sigma_2(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{P}(X)$.

6. Satz. *Die Abbildung*
$< \to \rho_<$ *ist ein $\subset$-Isomorphismus zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}$,*
$< \to \sigma_<$ *ist ein $\subset$-Isomorphismus zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_{1,2}$.*
Die inversen Abbildungen sind die folgende

$$[< : \rho] \quad A <_\rho B \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \, \rho \, X - B,$$

$$[< : \sigma] \quad A <_\sigma B \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B \in \sigma(A).$$

Beweis. 1). Ist $< \in \mathfrak{P}$, so gilt $< \; = \; <_{\rho_<}$ weil $A <_{\rho_<} B \Longleftrightarrow A \rho_< X - B \Longleftrightarrow A < B$.

Da $< \to \rho_<$ eine Involution ist, folgt gleich $\rho_{<\rho} = \rho$ für jedes $\rho \in \mathfrak{P}$.

2). Ist $< \in \mathfrak{P}$, so ist es leicht einzusehen, dass $< \; = \; <_{\sigma_<}$ und für jedes $\sigma \in \mathfrak{P}_{1,2}$ $\sigma = \sigma_{<\sigma}$ ist. Die Isotonie beider Abbildungen ist auch offensichtlich. ⋇

Die Beziehung $<_{\sigma_<} = <$ können wir symbolisch mit $[< : \sigma] \circ [\sigma : <] = \mathrm{Id}$ ausdrücken. Analog ist $[\sigma : <] \circ [< : \sigma] = \mathrm{Id}$, usw. Wir suchen jetzt die Beziehungen $[\sigma : <] \circ [< : \rho]$ und $[\rho : <] \circ [< : \sigma]$. Ist $\sigma \in \mathfrak{P}_{1,2}$ so bezeichnen wir $\rho_{<\sigma}$ mit ρ_σ; ist $\rho \in \mathfrak{P}$ so bezeichnen wir $\sigma_{<\rho}$ mit σ_ρ.

7. Satz. *Es gelten folgende Formel*

$$[\sigma : \rho] \quad \sigma_\rho(A) = \{B \in \mathfrak{P}(X) : A \, \rho \, X - B\},$$

$$[\rho : \sigma] \quad A \, \rho_\sigma B \Longleftrightarrow X - B \in \sigma(A).$$

Aus Satz 6 folgt, dass jeder der Relation $<$ angewendeten Bedingung eine gleichwertige Bedingung für $\rho_<$ bzw. $\sigma_<$ entspricht. Die für $<$ gegebenen Axiome wurden so gewählt, dass die entsprechenden Axiome in den Sprachen ρ und σ einfach seien:

8. Satz. *Die folgenden drei Sätze sind gleichwertig:*
a). $< \in \mathfrak{P}$ *erfüllt das Axiom* $[<_i]$
b). $\rho_<$ *erfüllt das Axiom* $[\rho_i]$
c). $\sigma_<$ *erfüllt das Axiom* $[\sigma_i]$.

Da ist,

$[\rho_1']$ $\forall_{A \in \mathfrak{P}(X)} \emptyset \rho A$, $\qquad [\sigma_1']$ $\sigma(\emptyset) = \mathfrak{P}(X)$,

$[\rho_1'']$ $\forall_{A \in \mathfrak{P}(X)} A \rho \emptyset$, $\qquad [\sigma_1'']$ $\forall_{A \in \mathfrak{P}(X)} X \in \sigma(A)$,

$[\rho_2]$ $A \rho B \Rightarrow A \cdot B$, $\qquad [\sigma_2]$ $\sigma(A) \subset \bar{A}$,

$[\rho_3']$ $B \rho C \supset D \Rightarrow B \rho D$, $\qquad [\sigma_3']$ $D \supset C \in \sigma(B) \Rightarrow D \in \sigma(B)$,

$[\rho_3'']$ $A \subset B \rho C \Rightarrow A \rho C$, $\qquad [\sigma_3'']$ $\sigma(A_1 \cup A_2) \subset \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2)$,

$[\rho_4']$ $A_1 \rho B \;\&\; A_2 \rho B \Rightarrow A_1 \cup A_2 \rho B$, $\qquad [\sigma_4']$ $B_1, B_2 \in \sigma(A) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \sigma(A)$,

$[\rho_4'']$ $A \rho B_1 \;\&\; A \rho B_2 \Rightarrow A \rho B_1 \cup B_2$, $\qquad [\sigma_4'']$ $\sigma(A_1 \cup A_2) \supset \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2)$,

$[\rho_5]$ $\rho = \rho^{-1}$, $\qquad [\sigma_5]$ $B \in \sigma(A) \Rightarrow X - A \in \sigma(X - B)$,

$[\rho_6]$ $A \rho B \Rightarrow \exists_{C \in \mathfrak{P}(X)} A \rho X - C \;\&\; C \rho B$, $\qquad [\sigma_6]$ $B \in \sigma(A) \Rightarrow \exists_{C \in \mathfrak{P}(X)} C \in \sigma(A), B \in \sigma(C)$,

$[\rho_7]$ $B \rho C \supset A \Rightarrow \exists_{A', B' \in \mathfrak{P}(X)} A \rho A', B \rho B'$, $\qquad [\sigma_7]$ $A \cdot \sigma(B) \Rightarrow \sigma(A) \cdot \sigma(B)$,

$$A' \cup B' = X.$$

Da der Beweis für die meisten Axiome einfach ist, geben wir ihn nur für $[<_7]$.

1). Ist $[<_7]$ erfüllt und $B \rho_< C \supset A$, dann ist, wenn wir $X - C$ mit C' bezeichnen $B < C' \cdot A$. Es gibt dann $A_1, B_1 \in \mathfrak{P}(X)$ mit $B < B_1 \cdot A_1 > A$. Es sei $A' = X - A_1$, $B' = X - B_1$. Es gilt $A \rho_< A'$, $B \rho_< B'$ und $A' \cup B' = X - (A_1 \cap B_1) = X$.

2). Wenn wir $[\rho_7]$ voraussetzen und $A \cdot \sigma_\rho(B)$ ist, dann gibt es ein $C \in \sigma_\rho(B)$ mit $A \cdot C$. Aus $[\sigma : \rho]$ folgt $B \rho X - C$, also, da $X - C \supset A$ ist, aus $[\rho_7]$ auch die Existenz der Mengen $A', B' \in \mathfrak{P}(X)$ mit $A \rho A'$, $B \rho B'$, $A' \cup B' = X$. Bezeichnen wir nun mit $A_1 = X - A'$, $B_1 = X - B'$, so erhalten wir $A_1 \cdot B_1$, $A \rho X - A_1$, also $A_1 \in \sigma_\rho(A)$ und $B \rho X - B_1$, also $B_1 \in \sigma_\rho(B)$. Wir haben $\sigma_\rho(A) \cdot \sigma_\rho(B)$ bewiesen.

3). Es sei nun $[\sigma_7]$ wahr, und $B <_\sigma C \cdot A$. Dann folgt aus $[< : \sigma]$ $C \in \sigma(B)$. Es ist also $A \cdot \sigma(B)$ und nach $[\sigma_7]$ ist $\sigma(A) \cdot \sigma(B)$ d. h. es gibt $A' \in \sigma(A)$, $B' \in \sigma(B)$ mit $A' \cdot B'$. Wenn wir noch einmal $[< : \sigma]$. benützen,

erhalten wir $A <_\sigma A'$ und $B <_\sigma B'$, d. h. $<_\sigma$ erfüllt $[<_7]$. Die Axiome $[<_7]$, $[\rho_7]$ und $[\sigma_7]$ sind gleichwertig.

Wenn wir die verschiedenern σ betreffenden Bedingungen vergleichen, so können wir feststellen, dass es einen engen Zusammenhang zwischen den Axiomen $[\sigma_3'']$ und $[\sigma_4'']$ gibt, sowie auch zwischen $[\sigma_3']$ und $[\sigma_4']$. Das wird noch näher erörtert werden im Satze 10.

Der vorige Satz ermöglicht es die zwischen den Axiomen $[<_i]$ gefundenen Beziehungen auf $[\rho_i]$ und $[\sigma_i]$ zu übertragen.

9. Satz. *Wenn man in den Sätzen 1, 2, 3, 4 und 5 das Zeichen* $<$ *mit* ρ *oder* σ *vertauscht, so bleiben die Behauptungen gültig.*

Für Nachbarschaftsstrukturen wird oft die Negation δ von ρ verwendet. $<$ ist eine Nachbarschaftsordnung genau dann, wenn $\delta_<$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$[\delta_1']$ $A \delta B \Rightarrow A \neq \emptyset$,

$[\delta_1'']$ $A \delta B \Rightarrow B \neq \emptyset$,

$[\delta_2]$ $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$,

$[\delta_3']$ $B \delta C \subset D \Rightarrow B \delta D$,

$[\delta_3'']$ $A \supset B \delta C \Rightarrow A \delta C$,

$[\delta_4']$ $A \delta B_1 \cup B_2 \Rightarrow A \delta B_1 \vee A \delta B_2$,

$[\delta_4'']$ $A_1 \cup A_2 \delta B \Rightarrow A_1 \delta B \vee A_2 \delta B$,

$[\delta_5]$ $\delta = \delta^{-1}$,

$[\delta_6]$ $\forall_{C \in \mathfrak{P}(X)} (A \delta X - C \vee C \delta B) \Rightarrow A \delta B$.

Wir setzen im folgenden voraus, dass δ von der universellen Relation verschieden ist.

Wegen $[\delta_5]$, sind die komplementären Axiome gleichwertig, es genügt also $[\delta_1']$, $[\delta_2]$, $[\delta_3']$, $[\delta_4']$, $[\delta_5]$ und $[\delta_6]$ zu fordern. Man findet in der Fachliteratur ausser diesen Bedingungen auch andere. Wir werden die aus $[\xi_4']$ bzw. $[\xi_4'']$ erhaltenen Bedingungen, wenn man darin die Implikation mit dem Äquivalenzzeichen bzw. die Inklusion mit dem Gleichheitszeichen ersetzt mit $[\xi_4^*]$ bzw $[\xi_4^{**}]$ bezeichnen (ξ ist da $<$, ρ, δ oder σ).

10. Satz. *Eine Relation* $< \in \mathfrak{P}$ *erfüllt* $[<_4^*]$ *(bzw.* $[<_4^{**}]$*) genau dann, wenn* $\rho_<$, $\delta_<$ *bzw* $\sigma_<$ *den entsprechenden Bedingungen genügt. Ausserdem ist*

$$[\xi_3'] \;\&\; [\xi_4'] \Leftrightarrow [\xi_4^*],$$

$$[\xi_3''] \;\&\; [\xi_4''] \Leftrightarrow [\xi_4^{**}].$$

Der Beweis ist offensichtlich.

Das Axiom $[\rho_7]$ können wir mit einem etwas einfacheren ersetzen (siehe [5])

$$[\rho_7^*] \quad A\rho B \Rightarrow \underset{A',B' \in \mathfrak{P}(X)}{\exists} A\rho A' \;\&\; B\rho B' \;\&\; A' \cup B' = X.$$

Der Zusammenhang zwischen diesen ist der folgende:

11. Satz. *Für jedes* $\rho \in \mathfrak{P}$ *gilt*

$$[\rho_7] \Leftrightarrow [\rho_7^*] \; (\mathrm{Kat}\,[\rho_3'], [\rho_5]).$$

Anstatt $[\delta_2]$ benützt man oft die folgende Bedingung:

$$[\delta_2^*] \quad \underset{x \in X}{\forall} \{x\}\,\delta\,\{x\}.$$

12. Satz. *Für jedes* $\delta \in \mathfrak{P}$ *gilt*

$$[\delta_2] \Rightarrow [\delta_2^*],$$

$$[\delta_2] \Leftrightarrow [\delta_2^*] \; (\mathrm{Kat}\,[\delta_3'] \;\&\; [\delta_3^*]).$$

Aus den Sätzen 11 und 12 folgt:

13. Satz. *Die folgenden Axiomsystemen sind gleichwertig.*

(g) $\{[\delta_1'], [\delta_2], [\delta_3], [\delta_4^*], [\delta_5], [\delta_6]\}.$

(h) $\{[\delta_1'], [\delta_2^*], [\delta_4^{**}], [\delta_5], [\delta_6]\}.$

Das System (h) wird zur Bestimmung der Nachbarschaftsrelation häufig gebraucht — Siehe z. B. [7]. Aus dem Satze 10 und den Bemerkungen vor dem Satze 4, folgt dass diese beiden Systeme abhängig sind. Wie auch für die Nachbarschaftsordnung wurde für die Nachbarschaftsrelation, nach unserer Kenntniss noch kein unabhängiges Axiomsystem gegeben.

14. Satz. *Die folgenden unabhängigen Axiomsysteme sind mit* (g) *und* (h) *gleichwertig, und bestimmen also eine Nachbarschaftsrelation:*

(a') $\{[\delta_1], [\delta_3'], [\delta_4'], [\delta_5], [\delta_6]\},$

(i) $\{[\delta_2^*], [\delta_4^*], [\delta_5], [\delta_6]\}.$

In beiden Fällen kann man $[\delta_5]$ *und* $[\delta_6]$ *mit einem einzigen Axiom:*

$$[\delta_7^*] \quad \underset{A',B' \in \mathfrak{P}(X)}{\forall} (A\delta A' \vee B\delta B' \vee A' \cup B' \neq X) \Rightarrow A\delta B$$

ersetzen.

Obwohl der Unterschied zwischen $[\delta_6]$ and $[\delta_7^*]$ nicht zu scharf ist, sind diese Bedingungen nicht gleichwertig. Das System (i) ist z. B. unabhängig, aber $\{[\delta_2^*], [\delta_4^*], [\delta_5], [\delta_7^*]\}$ ist es nicht. In [3], [4] und [9] wird, mit unwesentlichen Unterschieden, folgendes System zur Definition der Nachbarschaftsrelation verwendet: $\{[\delta_1'], [\delta_2^*], [\delta_4^{**}], [\delta_5], [\delta_7^*]\}$. Hier sind $[\delta_1']$ und $[\delta_5]$ aus den anderen ableitbar.

15. Satz. *Ist* $\delta \in \mathfrak{P}$ *von der universellen Relation verschieden, so folgen aus* $[\delta_2^*]$, $[\delta_4^{**}]$ *und* $[\delta_7^*]$ *die Axiome* $[\delta_1']$, $[\delta_5]$.

Beweis. 1) Wir zeigen zuerst, dass aus $A' \supset A\delta B \subset B'$ immer $A'\delta B'$ folgt. Ist $A' \supset A\delta B \subset B'$, so ist $A \cup A' = A'$, also nach $[\delta_4^{**}]$ folgt daraus $A'\delta B$. Wäre $A'\delta B'$ nicht war, so gäbe es nach $[\delta_7^*]$ $A'', B'' \in \mathfrak{P}(X)$ so dass $A'\rho A''$, $B'\rho B''$ und $A'' \cup B'' = X$. Dann ist aber auch $B\rho B''$ und wegen $[\delta_7^*]$ erhalten wir daraus $A'\rho B$ im Widerspruch mit $A'\delta B$.

2) Es sei jetzt $A \cap B \neq \emptyset$. Wegen $[\delta_2^*]$ ist $A \supset \{x\}\,\delta\,\{x\} \subset B$, wen x ein Element aus $A \cap B$ ist. Dann ist aber wegen 1) $A\delta B$. D.h. $A\rho B \Rightarrow A \cdot B$.

3) Um $[\delta_5]$ zu beweisen setzen wir $B\delta A$ voraus und es seien A' und B' zwei willkürliche Teilmengen von X. Wir zeigen, dass $A\delta A' \vee B\delta B' \vee A' \cup B' \neq X$ ist. Wäre es nicht so, so hätten wir $A\rho A' \;\&\; B\rho B' \;\&\; A' \cup B' = X$. Dann wäre $X - A' \subset B'$ und $B\rho B'$, also $B\rho X - A'$; ähnlich wäre $A \subset X - A'$, da aus $A\rho A'$ $A \cdot A'$ folgt, und dann würden wir $B\rho A$ erhalten im Widerspruch mit der Voraussetzung. Wir haben also $A\delta A' \vee B\delta B' \vee A' \cup B' \neq X$ für jedes A', B' aus $\mathfrak{P}(X)$. Dann folgt nach $[\delta_7^*]$ $A\delta B$, also ist $\delta = \delta^{-1}$.

4). Es bleibt noch $[\delta_1]$ zu beweisen. Wir haben $\delta \neq \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$ vorausgesetzt. Dann gibt es $U, V \in \mathfrak{P}(X)$, für welche $U\rho V$ gilt. Aus $\emptyset \subset U$ folgt $\emptyset\,\rho V$. Wegen $[\delta_7^*]$ gibt es $A', B' \in \mathfrak{P}(X)$ mit $\emptyset\,\rho A'$, $V\rho B'$ und $A' \cup B' = X$. Dann ist $B' \supset X - A'$, also $V\rho X - A'$ und aus $\emptyset \subset V$ folgt $\emptyset\,\rho X - A'$. Da aber $\emptyset\,\rho A'$ ist, erhalten wir nach $[\delta_4^*]$ dass $\emptyset\,\rho X$. Daraus schliessen wir, dass für jedes $A \in \mathfrak{P}(X)$, da $A \subset X$ ist $\emptyset\,\rho A$, erfüllt ist.

Bezüglich der Abbildung σ bemerken wir, dass das Axiom $[\sigma_3']$ manche Variante besitzt:

$$[\sigma_3^*] \qquad A_1 \subset A_2 \Rightarrow \sigma(A_2) \subset \sigma(A_1),$$

$$[\sigma_3^{**}] \qquad \sigma(A_1 \cap A_2) \supset \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2),$$

$$[\sigma_3^{***}] \quad \sigma(\bigcup\{A_i : i \in I\}) \subset \bigcap\{\sigma(A_i) : i \in I\},$$

$$[\sigma_3^{****}] \quad \sigma(\bigcap\{A_i : i \in I\}) \supset \bigcup\{\sigma(A_i) : i \in I\},$$

16. Satz. *Die Bedingungen* $[\sigma_3']$, $[\sigma_3^*]$, $[\sigma_3^{**}]$, $[\sigma_3^{***}]$ *und* $[\sigma_3^{****}]$ *sind gleichwertig.*

Wenn wir die Nachbarschaftsstrukturen mit Hilfe der Nachbarschaftsabbildung einführen wollen, so kann man aus dem in [2] gebrauchten Axiomsystem

(j) $\{[\sigma_2], [\sigma_3'], [\sigma_3^*], [\sigma_4'], [\sigma_5], [\sigma_6]\}$

die Bedingung $[\sigma_3^*]$ weglassen nach den Sätzen 1. und 9.

17. Satz. *Folgende unabhängige Axiomsysteme sind mit* (j) *gleichwertig, bestimmen also eine Nachbarschaftsabbildung:*

(a″) $\{[\sigma_2], [\sigma_3'], [\sigma_4'], [\sigma_5], [\sigma_6]\}$,

(k″) $\{[\sigma_2], [\sigma_3'], [\sigma_4''], [\sigma_5], [\sigma_6]\}$.

In beiden Fällen kann man $[\sigma_5]$ *und* $[\sigma_6]$ *mit dem einzigen Axiom* $[\sigma_7]$ *ersetzen.*

Der Operator Σ'. Wir ordnen jetzt jedem $< \in \mathfrak{P}$ eine neue Abbildung $\Sigma_<$ zu, und zwar $\Sigma_< \in [\mathfrak{P}^2(X)]^{\mathfrak{P}^2(X)}$. Ist $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}^2(X)$ so ist

$$[\Sigma : <] \qquad \Sigma_<(\mathfrak{A}) = \{B \in \mathfrak{P}(X) : \underset{A \in \mathfrak{A}}{\exists} A < B\}.$$

Man sieht gleich,

18. Satz. *Für jedes* $< \in \mathfrak{P}$ *hat* $\Sigma = \Sigma_<$ *die folgende Eigenschaft:*

$$[\Sigma_0] \qquad \Sigma(\bigcup\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}) = \bigcup\{\Sigma(\mathfrak{A}_i) : i \in I\}$$

Wir werden die Menge aller Elemente von $[\mathfrak{P}^2(X)]^{\mathfrak{P}^2(X)}$, die $[\Sigma_0]$ erfüllen mit $\mathfrak{P}_{2,2}$ bezeichnen. $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ heisst, dass $\Sigma_1(\mathfrak{A}) \subset \Sigma_2(\mathfrak{A})$ ist für alle $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}^2(X)$.

19. Satz. *Die Abbildung* $< \to \Sigma_<$ *ist ein* $\subset$*-Isomorphismus zwischen* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{P}_{2,2}$. *Die inverse Abbildung ist*

$$[< : \Sigma] \qquad A <_\Sigma B \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B \in \Sigma(\{A\})$$

Die Behauptung folgt gleich, wenn man beachtet dass für jedes $< \in \mathfrak{P}$

$$A <_{\Sigma_<} B \Longleftrightarrow B \in \Sigma_<(\{A\}) \Longleftrightarrow \underset{A \in \{A\}}{\exists} A < B \Longleftrightarrow A < B$$

gilt und für jedes $\Sigma \in \mathfrak{P}_{2,2}$ und $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}^2(X)$

$$B \in \Sigma_{<_\Sigma}\mathfrak{A} \Longleftrightarrow \underset{A \in \mathfrak{A}}{\exists} A <_\Sigma B \Longleftrightarrow \underset{A \in \mathfrak{A}}{\exists} B \in \Sigma(\{A\})$$

$$\Longleftrightarrow B \in \bigcup\{\Sigma(\{A\}) : A \in \mathfrak{A}\} \Longleftrightarrow B \in \Sigma(\bigcup\{\{A\} : A \in \mathfrak{A}\}) \Longleftrightarrow$$

$$B \in \Sigma\mathfrak{A}(\bigcup\{\{A\} : A \in \mathfrak{A}\}) \Longleftrightarrow B \in \Sigma\mathfrak{A}.$$

Der Zusammenhang mit ρ und σ ist:

20. Satz. *Bezeichnet man mit* $\Sigma_\rho = \Sigma_{<_\rho}$, $\Sigma_\sigma = \Sigma_{<_\sigma}$, $\rho_\Sigma = \rho_{<_\Sigma}$ und $\sigma_\Sigma = \sigma_{<_\Sigma}$ *so gilt*

$$[\Sigma : \rho] \qquad \Sigma_\rho(\mathfrak{A}) = \{B \in \mathfrak{P}(X) : \underset{A \in \mathfrak{A}}{\exists} A \rho X - B\},$$

$$[\rho : \Sigma] \qquad A \rho_\Sigma B \Longleftrightarrow X - B \in \Sigma(\{A\}),$$

$$[\sigma : \Sigma] \qquad \sigma_\Sigma(A) = \Sigma(\{A\}),$$

$$[\Sigma : \sigma] \qquad \Sigma_\sigma(A) = \bigcup\{\sigma(A) : A \in \mathfrak{A}\}.$$

Wir könnten jetzt, in Analogie mit ρ und σ auch hier die mit den Bedingungen $[<_i]$ gleichwertigen Axiome $[\Sigma_i]$ suchen. Jedoch sind diese weniger natürlich, wie jene die für ρ und σ gefunden wurden. Die Rolle von Σ ist dann bemerkenswert, wenn wir uns auf einen weniger umfassenden Fall beschränken. Darum werden wir voraussetzen, dass $<$ eine $\cap$-*topogene Ordnung* ist, d. h. die Bedingungen $[<_1']$, $[<_1'']$, $[<_2']$, $[<_3']$, $[<_3'']$, $[<_4']$ erfüllt. Man findet gleich,

21. Satz. *Wenn* $<$ *eine halbtopogene Ordnung über* X *ist, dann ist* $\sigma_<(A)$ *genau dann ein Filter für jedes* $A \in \mathfrak{P}(X)$ *wenn* $[<_4']$ *erfüllt ist.*

Es ist eigentlich hinreichend (und auch nötig), dass die Axiome $[<_1'']$, $[<_3']$ $[<_4]$ erfüllt werden sollen. In diesem Fall bildet σ die Menge $\mathfrak{P}(X)$ in die Menge $F(X)$ aller Filter über X ab. Wir suchen jetzt Σ so zu bestimmen, dass es jeden Filter in einen Filter überträgt.

22. Satz. *Ist* $<$ *eine halbtopogene Ordnung, so ist das Bild jedes Filters über* X *durch* $\Sigma_<$ *genau dann ein Filter, wenn* $<$ *die Bedingung* $[<_4']$ *erfüllt. In diesem Falle geht ein eigentlicher Filter in einen eigentlichen über.*

Beweis. Ist $[<_4']$ nicht erfüllt, dann gibt es A, B_1, $B_2 \in \mathfrak{P}(X)$ mit $A < B_1$, $A < B_2$ und $A \not< B_1 \cap B_2$. Dann hat der Hauptfilter $\mathfrak{K} = \overline{A}$ als Bild kein Filter, weil $B_1, B_2 \in \Sigma_<(\mathfrak{K})$ jedoch $B_1 \cap B_2 \notin \Sigma_<(\mathfrak{K})$. Das übrige folgt gleich.

Die Menge $F(X)$ bildet, wie bekannt, einen Verband bezüglich $\subset$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K} \wedge \mathfrak{H}$ $(= \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H})$ die untere, mit $\mathfrak{K} \vee \mathfrak{H}$ die obere Grenze zweier Elemente $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ aus $F(X)$. Es sei Σ' die Restriktion von Σ auf $F(X)$. Diese Abbildung — mit γ bezeichnet — wurde in [2] unter der Voraussetzung eingeführt, dass $<$ eine Nachbarschaftsordnung ist.

23. Satz. *Ist* $<$ *eine* $\cap$*-topogene Ordnung, so ist*

$$[\Sigma' : <] \qquad \Sigma'_<(\mathfrak{K}) = \{B \in \mathfrak{P}(X) : \underset{K \in \mathfrak{K}}{\exists} K < B\}$$

eine Abbildung $\Sigma' = \Sigma$ *von* $F(X)$ *in* $F(X)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$$[\Sigma_0'] \qquad \Sigma'(\mathfrak{K}) = \bigcup\{\Sigma'(\overline{K} : K \in \mathfrak{K}\},$$

$$[\Sigma_1'] \qquad \Sigma'(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(X),$$

$$[\Sigma_2'] \qquad \Sigma'(\mathfrak{K}) \subset (\mathfrak{K}),$$

$$[\Sigma_3'] \qquad \Sigma'(\mathfrak{K} \wedge \mathfrak{H}) \subset \Sigma'(\mathfrak{H}) \wedge \Sigma'(\mathfrak{H}).$$

Der Beweis folgt aus den Definitionen.

24. Satz. *Die Bedingung* $[\Sigma_3']$ *ist mit jeder der folgenden gleichwertig*

$$[\Sigma_3^*] \qquad \mathfrak{K} \subset \mathfrak{H} \Rightarrow \Sigma'(\mathfrak{K}) \subset \Sigma'(\mathfrak{H}),$$

$$[\Sigma_3^{**}] \qquad \Sigma'(\mathfrak{K} \vee \mathfrak{H}) \supset \Sigma'(\mathfrak{K}) \vee \Sigma'(\mathfrak{H}).$$

Die Abbildung Σ' führt in den Verband $F(X)$ eine topologische Struktur ein; sie ist eine Kernabbildung.

Die in dem vorigen Satz gegebenen Bedingungen sind vollständig im folgenden Sinne:

25. Satz. *Wenn eine Abbildung* $\Sigma' : F(X) \to F(X)$ *die Bedingungen* $[\Sigma_0']$, $[\Sigma_1']$, $[\Sigma_2']$, $[\Sigma_3']$ *erfüllt, so ist die durch*

$$[<:\Sigma'] \qquad A <_{\Sigma'} B \Longleftrightarrow B \in \Sigma'(\bar{A})$$

bestimmte Relation $<_{\Sigma'}$ *eine* $\cap$*-topogene Ordnung und die Abbildung* $[<:\Sigma']$ *ist die Umkehrabbildung von* $[\Sigma' : <]$; *diese beiden sind* $\subset$*-Isomorphismen.*

Beweis. Die Eigenschaft $[<_1']$ folgt aus $[\Sigma_1']$, $[<_1'']$ aus $X \in \mathfrak{K}$ das für jedes $\mathfrak{K} \in F(X)$ stattfindet. $[<_2]$ folgt aus $[\Sigma_2']$ und $[<_3']$, $[<_4']$ sind wahr, da $\Sigma'(\bar{A})$ ein Filter ist. Aus $[\Sigma_3']$ leitet man $[<_3'']$ ab. Wir zeigen dass die Abbildungen $< \to \Sigma_<'$ bzw. $\Sigma' \to <_{\Sigma'}$ bijektiv sind:

$$A <_{\Sigma'_<} B \Longleftrightarrow B \in \Sigma'_<(\bar{A}) \Longleftrightarrow \underset{K \in \bar{A}}{\exists} K < B \Longleftrightarrow A < B$$

und

$$B \in \Sigma'_{<_{\Sigma'}}(\bar{A}) \Longleftrightarrow \underset{K \in \bar{A}}{\exists} K <_2' B \Longleftrightarrow A <_{\Sigma'} B \Longleftrightarrow B \in \Sigma'(\bar{A})$$

Daraus folgt unter Benützung von $[\Sigma_0']$, dass für jeden Filter $\mathfrak{K} \in F(X)$

$$\Sigma'_{<_{\Sigma'}}(\mathfrak{K}) = \bigcup\{\Sigma'_{<_{\Sigma'}}(\bar{K}) : K \in \mathfrak{K}\} = \bigcup\{\Sigma'\bar{K} : K \in \mathfrak{K}\} = \Sigma'(\mathfrak{K})$$

Betreffend die anderen $<$-bezüglichen Axiome, können sie folgendermassen durch Σ' kennzeichnet werden:

26. Satz. *Die* $\cap$*-topogene Ordnung* $<$ *erfüllt die Axiome* $[<_4'']$ $[<_5]$, $[<_6]$ *bzw.* $[<_7]$ *genau dann, wenn* $\Sigma'_<$ *den entsprechenden Bedingungen genügt:*

$$[\Sigma_4'] \quad \Sigma'(\mathfrak{K} \wedge \mathfrak{H}) \supset \Sigma'(\mathfrak{K}) \wedge \Sigma'(\mathfrak{H})$$

$$[\Sigma_5'] \qquad A \in \Sigma'(\overline{X-B}) \Rightarrow B \in \Sigma'(\overline{X-A})$$

$$[\Sigma_6'] \qquad \Sigma'(\Sigma'(\mathfrak{K})) \supset \Sigma'(\mathfrak{K})$$

$$[\Sigma_7'] \qquad \mathfrak{H} * \Sigma'(\mathfrak{K}') \Rightarrow \Sigma'(\mathfrak{H}) * \Sigma'(\mathfrak{K}).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Alfsen E. M. - J. E. Fenstad — *On the equivalence between proximity structures and totally bounded uniform structures*, Math. Scand., 7 (1959) 353–360.
2. Banaschewski B. - J. M. Maranda — *Proximity functions*, Math. Nachr. 23 (1961) 1–37.
3. Császár A. — *Grundlagen der allgemeinen Topologie*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1963.
4. Engelkind R. — *Outline of general topology*, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1968.
5. Gál I. S. — *Proximity relations and precompact structures*, Indag. Math., 21 (1959) 304–326.
6. Heuchenne C. — *La saturation dans les treillis*, Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 32° année, n° 9, (1963) 636–652.
7. Leader S. — *On cluster sets in proximity spaces*, Fund. Math., 47 (1959) 205—213.
8. Smirnov Ju. M. — *O prostranstvah blizosti*, Mat. Sb., 31 (1952) 543–574.
9. Thron J. W. — *Topological structures*, Holt Rinehart, New York 1966.

ORDINI TOPOGENE ŞI STRUCTURI DE PROXIMITATE

Rezumat

Teoria spaţiilor sintopogene e o sinteză a spaţiilor topologice, de proximitate şi a celor uniforme. Ca noţiune fundamentală se foloseşte cea a relaţiei $<$ de „vecinătate uniformă" din teoria spaţiilor de proximitate.

În lucrare se arată că ordinile topogene pot fi definite şi prin alte metode echivalente, de exemplu cu relaţia ρ de „depărtare" sau funcţia σ de „proximitate". Se arată legătura dintre aceste metode şi evidenţa biunivocă dintre axiomele corespunzătoare. Se studiază independenţa acestor axiome şi se constată că toate sistemele uzuale folosite în teoria spaţiilor de proximitate sînt dependente.

Se dau sisteme independente şi o nouă condiţie privind $<$, ce înlocuieşte condiţiile de densitate şi simetrie.

Despre „operatorul regular de nucleu" al lui Banaschewski şi Maranda se arată că el poate fi folosit la definirea ordinilor $\cap$-topogene, şi defineşte o structură topologică în mulţimea $F(X)$, ce verifică anumite condiţii suplimentare, cînd ordinea dată e mai particulară.