CONTRIBUŢII LA STUDIUL PROXIMAL-CONTINUITĂŢII

DE

ILEANA HAMBURG (Craiova)

Comunicare prezentată la Sesiunea jubiliară A. Myller, 21—25 august 1970

Din punct de vedere al generalităţii, noţiunea de proximal-continuitate este situată între continuitatea simplă şi cea uniformă. Pentru continuitatea unei aplicaţii f a unui spaţiu topologic în altul, se cunosc diferite criterii exprimate în limbajul aderenţei, vecinătăţilor, mulţimilor deschise, mulţimilor închise, şirurilor convergente, filtrelor convergente etc.

Pentru uniforma continuitate a unei aplicaţii f a unui spaţiu uniform în altul, se cunosc de asemenea mai multe criterii: cu vecinătăţi indiciate, împrejurimi, acoperiri uniforme etc. Pînă acum nu s-au elaborat însă criterii de proximal-continuitate, de aceea primul scop al lucrării de faţă este de a da criterii de acest fel.

Pe de altă parte studiul funcţiilor proximal-continue în spaţii metrice nici nu a fost început în literatură şi nu se cunosc criterii de proximal-continuitate între spaţii metrice. În partea a doua a acestui articol ne ocupăm de astfel de criterii.

§. 1. **Preliminarii. Definiţia** 1. (vezi [3]). *O ordine de proximitate pe o mulţime S este o ordine topogenă $<$, adică o relaţie în $\mathcal{P}(S)$, ce verifică condiţiile :*

$$(<_1)\quad A < S,\ \forall A \subset S,$$

$$(<_2)\quad A < B \Rightarrow A \subset B,$$

$$(<_3)\quad A \subset A_1 < B_1 \subset B \Rightarrow A < B,$$

$$(<_4)\quad A_i < B_i,\quad i = 1,2 \Rightarrow A_1 \cup A_2 < B_1 \cup B_2 \text{ şi } A_1 \cap A_2 < B_1 \cap B_2$$

şi în plus este simetrică şi densă adică

$(<_5)$ $A < B \Rightarrow S - B < S - A$,

$(<_6)$ $A < B \Rightarrow \exists C \subset S,\ A < C < B$.

O familie $\mathcal{S}$ de ordini topogene pe o mulțime S, care verifică proprietățile de dirijare și idempotență [3] este numită de A. Császár *structură sintopogenă pe S*. O mulțime S dotată cu o ordine de proximitate se va numi *spațiu de proximitate*. Spațiile de proximitate sînt cazuri particulare de spații sintopogene. În teoria acestor spații (vezi [3], pag. 102) s-a definit noțiunea de continuitate în felul următor:

Definiția 2. *O aplicație f a spațiului sintopogen $[S, \mathcal{S}]$ pe spațiul sintopogen $[S', \mathcal{S}']$ se numește $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ continuă dacă fiecărei ordini topogene $<' \in \mathcal{S}'$ i se poate asocia o ordine topogenă $< \in \mathcal{S}$ astfel încît dacă $A' <' B'$, atunci $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$.*

În anumite condiții suplimentare impuse familiilor $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ obținem continuitatea uniformă și cea simplă (topologică), deoarece atît spațiul uniform cît și cel topologic sînt cazuri particulare de spații sintopogene. Cînd $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ sînt formate din cîte o singură ordine topogenă care este însă și densă și simetrică, definiția 2 ne conduce la noțiunea de proximal-continuitate.

În teoria spațiilor sintopogene a lui A. Császár [3] se dau criterii generale pentru $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$-continuitate. Vom da în cele ce urmează cîteva criterii specifice proximal-continuității.

Definiția proximal-continuității și cîteva proprietăți ale funcțiilor proximal continue au fost date încă de Iu. Smirnov în 1952 [4]. (δ-continuitate). Spațiul de proximitate este definit de Smirnov cu ajutorul unei relații δ de apropiere între mulțimi, ce verifică cîteva proprietăți bine cunoscute, iar proximal-continuitatea este definită astfel în [4].

Definiția 3. *f: $[S, \delta] \to [S', \delta']$ se numește δ-continuă dacă $A \delta B$ implică $f(A)\, \delta' f(B)$.*

A. Császár a demonstrat echivalența definițiilor 2 și 3.

În 1960 R. Banaschewski și J. Maranda [2] au dat cîteva definiții echivalente cu cea a spațiilor de proximitate, luînd ca bază funcția de proximitate. Este destul de natural ca existînd aceste căi echivalente de a defini o structură de proximitate, să dăm criterii de proximal-continuitate pentru fiecare din aceste noțiuni. Vom lua aici ca definiție de bază a spațiului de proximitate, cea care folosește ordinea $<$ de proximitate.

§. 2. **Proximal-continuitate.** Fie dat un spațiu de proximitate $[S <]$. *Printr-o funcție de proximitate $p: \mathfrak{P}(S) \to F(S)$, ($F(S)$ fiind mulțimea filtrelor peste S) asociată ordinii $<$ de proximitate, înțelegem aplicația $p = p_<$ definită astfel: $p_<(A) = \{X \subset S, A < X\}$, unde $A \in \mathfrak{P}(S)$.*

Banaschewski și Maranda au găsit axiomele pe care le verifică p pentru a putea inversa acest procedeu și a obține o metodă de definire a spațiilor de proximitate folosind p ca noțiune de bază. Se vede imediat că $<$ se regăsește din $p = p_<$ astfel: $A < B \Leftrightarrow B \in p(A)$.

Vom da acum un criteriu de proximal-continuitate cu ajutorul acestui operator p.

Teorema 1. *f: $[S, <] \to [S', <']$ este proximal-continuă, dacă și numai dacă pentru $p = p_<$, $p' = p'_{<'}$, $f^{-1} \circ p' \subset p \circ f^{-1}$, adică pentru orice $A' \in \mathfrak{P}(S')$ avem $f^{-1}(p'(A')) \subset p(f^{-1}(A'))$*.*

Demonstrație: 1) Fie f proximal-continuă și $A' \subset S'$. Să arătăm că $f^{-1}(p'(A')) \subset p(f^{-1}(A'))$. Fie $B \in f^{-1}(p'(A'))$. Există atunci $B' \in p'(A')$, $f^{-1}(B') = B$. Din definiția lui $p'(A')$ rezultă $A' <' B'$ iar din proximal-continuitatea lui f, urmează $f^{-1}(A') < f^{-1}(B') = B$, adică $B \in p(f^{-1}(A'))$.

2) Fie f cu proprietatea din enunț și să demonstrăm proximal-continuitatea lui f.

Fie $A' <' B'$, deci $B' \in p'(A')$. Atunci $f^{-1}(B') \in f^{-1}(p'(A'))$ și din ipoteză rezultă $f^{-1}(B') \in p(f^{-1}(A'))$ adică $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$ deci f este proximal-continuă.

O altă definiție echivalentă cu cea a ordinilor de proximitate folosește un *operator* $\gamma: F(S) \to F(S)$ ce verifică anumite axiome.

Fiind dat un spațiu de proximitate $[S, <]$, asociem fiecărui filtru $\mathcal{A}$ un nou filtru $\gamma_< \mathcal{A} = \{B \subset S: \exists A \in \mathcal{A}; A < B\}$ iar $<$ se regăsește din $\gamma = \gamma_<$ prin formula

$$A < B \Leftrightarrow B \in \gamma[A]$$

($[A]$ este filtrul principal generat de A).

Teorema 2. *$f: [S, <] \to [S', <']$ este proximal-continuă atunci și numai atunci cînd pentru $\gamma = \gamma_<$, $\gamma' = \gamma_{<'}$; $f^{-1} \circ \gamma \subset \gamma \circ f^{-1}$ (adică pentru orice $\mathcal{A}' \in F(S')$, $f^{-1}(\gamma'(\mathcal{A}')) \subset \gamma(f^{-1}(\mathcal{A}'))$.*

Demonstrația se face anolog celei din teorema 1.

Ultima definiție a spațiilor de proximitate din [2] este dată cu ajutorul *filtrelor rotunde* (denumire împrumutată de la Kowalski), adică a unei mulțimi de filtre $\Phi \subset F(S)$ ce verifică anumite proprietăți:

Fiind dat $[S, <]$ avem $\Phi_< = \{\mathcal{H} \in F(S): \forall H \in \mathcal{H}, \exists H_1 \in \mathcal{H},\ H_1 < H\}$, iar fiind dată mulțimea $\Phi_<$ ordinea $<$ este dată de

$$A < B \Leftrightarrow \exists \mathcal{H} \in \Phi_<, [A] \supset \mathcal{H} \text{ și } B \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

Teorema 3. *Aplicația $f: [S, <] \to [S', <']$ este proximal-continuă atunci cînd contraimaginea unei baze de filtru rotund peste S' este o bază de filtru rotund peste S.*

Demonstrație: 1. Eie f proximal-continuă, $\mathcal{B}'$ o bază de filtru rotund peste S' și $B \in f^{-1}(\mathcal{B}')$. Există deci $B' \in \mathcal{B}'$, $B = f^{-1}(B')$. Atunci există $A' \in \mathcal{B}'$ astfel că $A' <' B'$. Din cauza proximal-continuității lui f avem $f^{-1}(A') < f^{-1}(B') = B$, și cum $f^{-1}(A') \in f^{-1}(\mathcal{B}')$, rezultă că $\mathcal{B}$ este o bază de filtru rotund peste S.

*) Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathfrak{P}(S')$, atunci $f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$.

2) Presupunem că f verifică proprietatea din enunţ şi $A' <' B'$. Construim mulţimea $\mathfrak{A}' = \{C' \subset S' : A' <' C'\}$. Aceasta formează un filtru rotund peste S' şi $B' \in \mathfrak{A}'$. Notăm $A = f^{-1}(A') . f^{-1}(\mathfrak{A}')$ va fi un filtru rotund peste S, $f^{-1}(B') \in f^{-1}(\mathfrak{A}')$, deoarece $A_1 \in f^{-1}(\mathfrak{A}')$ implică existenţa unui $C' \in \mathfrak{A}'$ cu $A_1 = f^{-1}(C')$ iar din $A' <' C'$ rezultă $A' \subset C'$ şi atunci $A \subset A_1$. Atunci $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$ după formula (1) deci f este proximal-continuă.

Vom da acum un criteriu de proximal-continuitate, folosind $<$-*acoperirile* introduse de E. Alfsen şi J. Fenstad în [1]. *Printr-o $<$-acoperire a spaţiului de proximitate $[S, <]$ înţelegem o acoperire $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ a lui S, pentru care există o altă acoperire $\mathfrak{B} = \{B_i : i \in I\}$ astfel că $B_i < A_i$.*

Teorema 4. *f este proximal continuă exact atunci cînd contraimaginea oricărei $<'$-acoperiri a lui S' este o $<$-acoperire a lui S.*

Demonstraţie. 1) Fie f proximal-continuă, $\mathfrak{A}' = \{A_i' : i \in I\}$ o $<'$-acoperire a lui S şi $\mathfrak{B}' = \{B_i' : i \in I\}$ acoperirea lui S' astfel că $B_i' <' A_i'$. Se constată uşor că $f^{-1}(\mathfrak{A}')$ e o acoperire a lui S. Ea este o $<$-acoperire căci din proximal-continuitatea lui f rezultă $f^{-1}(B_i') < f^{-1}(A_i')$ şi $\mathfrak{B} = \{f^{-1}(B_i') : i \in I\}$ este o $<$-acoperire a lui S.

2) Fie verificată condiţia din enunţ şi $A' <' B'$. Atunci $\mathfrak{A}' = \{B', S' - A'\}$ este o $<'$-acoperire a lui S' deoarece conform proprietăţii $(<_0)$, există C' astfel că $A' <' C' <' B'$ şi atunci din $(<_3)$ avem că $S' - B' <' S' - C' <' S' - A'$, deci $\mathfrak{B}' = \{C', S' - C'\}$ verifică proprietatea din definiţia $<'$-acoperirii. Atunci $f^{-1}(\mathfrak{A}')$ cu termenii $f^{-1}(B')$ şi $f^{-1}(S' - A') = S - f^{-1}(A')$, formează o $<$-acoperire a lui S deoarece f verifică proprietatea din enunţ. Există atunci $A_1 < S - f^{-1}(A'), B_1 < f^{-1}(B')$, cu $A_1 \cup A_2 = S$. Deci $f^{-1}(A') < S - A_1 \subset B_1 < f^{-1}(B')$ şi atunci $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$.

Din existenţa acestui criteriu de proximal-continuitate se poate prevedea că un spaţiu de proximitate poate fi definit şi folosind ca noţiune de bază $<$-acoperirile, metodă neelaborată pînă astăzi. De remarcat faptul că Smirnov care foloseşte acoperirile la spaţii uniforme nu a încercat să le folosească la spaţii de proximitate.

§ 3. **Proximal-continuitatea în spaţii metrice**. Funcţiile uniform-continue între două spaţii metrice sînt bine cunoscute şi au fost studiate mult înaintea definirii spaţiilor uniforme în general. E de aşteptat ca studiul funcţiilor proximal-continue să aducă contribuţii la cunoaşterea naturii continuităţii. Dificultatea apare de la bun început: nu se cunosc criterii practice de proximal-continuitate între două spaţii metrice.

d fiind o metrică pe mulţimea S, se defineşte o ordine de proximitate în S astfel: $A <_d B \Leftrightarrow d(A, S - B) > 0$. Dacă $[S, d], [S', d']$ sînt două spaţii metrice şi $f: S \to S'$, atunci transcriind proximal-continuitatea lui f în limbaj de distanţe, rezultă că *f este proximal-continuă dacă şi numai dacă pentru două mulţimi A, B cu $d(A, B) = 0$ avem $d'(f(A), f(B)) = 0$.* Dăm acum două alte criterii de proximal-continuitate.

Teorema 5. *$f: [S, d] \to [S', d']$ este proximal-continuă, atunci şi numai atunci cînd oricare ar fi şirurile $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ şi $b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$ din S cu proprietatea că $\lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = 0$, avem $d'(f(A_1), f(B_1)) = 0$ unde A_1 şi B_1 sînt mulţimile de valori ale celor două şiruri.*

Demonstraţie. 1) Dacă f este proximal-continuă se vede imediat că este îndeplinită proprietatea din enunţ.

2) Dacă f verifică proprietatea din enunţ, să demonstrăm continuitatea lui f. Fie $A, B \subset S$, astfel că $d(A, B) = 0$. Din definiţia distanţei a două mulţimi, rezultă că pentru $\delta = 1/n$, există $a_n \in A, b_n \in B$, cu $d(a_n, b_n) < 1/n$. Am construit astfel şirurile $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots, b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$, cu $\lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = 0$ deci $d'(f(A_1), f(B_1)) = 0$. Dar $A \supset A_1, B \supset B_1$; prin urmare avem şi $d'(f(A), (fB)) = 0$ adică f este proximal-continuă.

Din acest criteriu se poate deduce cu uşurinţă următorul.

Teorema 6. *f este proximal-continuă atunci şi numai atunci cînd pentru orice pereche de şiruri $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ şi $b_1, b_2 \ldots b_n \ldots$ din S cu proprietatea $\lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = 0$, există cîte un subşir $a_{m_1}, a_{m_2} \ldots a_{m_k} \ldots, b_{n_1}, b_{n_2} \ldots b_{n_k} \ldots$ astfel că $\lim_{k \to \infty} d'(f(a_{m_k}), f(b_{n_k})) = 0$.*

Dar condiţia $\lim_{n \to \infty} d'(f(a_n), f(b_n)) = 0$ care este evident suficientă, nu se ştie dacă este necesară. Această problemă e în strînsă legătură cu relaţia dintre continuitatea uniformă şi cea proximală.

Fie date două spaţii de proximitate $[S, <]$ şi $[S', <']$ şi $\pi(<)$ respectiv $\pi(<')$ clasele corespunzătoare de structuri uniforme. Dacă $f: S \to S'$ este proximal-continuă ea este uniform-continuă, relativ la cele mai puţin fine elemente ale claselor $\pi(<)$ şi $\pi(<')$, (care sînt structurile total mărginite). Ar putea fi însă şi alte structuri uniforme în clasele $\pi(<)$, şi $\pi(<')$, pentru care f să fie uniform-continuă. Un caz particular ar fi de exemplu cel în care $S = S'$, $< = <' = <_d$, d fiind o metrică. Nu cunoaştem răspunsul la întrebarea dacă proximal-continuitatea, aici, este echivalentă cu continuitatea relativă la d, dar nici contra-exemple. Dacă însă criteriul de mai sus (cu $d(f(a_n), f(b_n)) = 0$ ar fi verificat, atunci teorema ar putea fi demonstrată uşor prin reducere la absurd.

BIBLIOGRAFIE

1. Alfsen E.M.-Fenstad J.E. — *On the equivalence between proximity structures and totally bounded uniform structures.* Math. Scand. (1959) p. 333—360.
2. Banaschewski B.-Maranda J.M.—*Proximity Functions.* Math. Nachr. 23 (1961), p. 1—37.
3. Császár A. — *Foundations of General Topology.* Oxford — London — New York — Paris 1963.
4. Смирнов Ю.М. — *О пространствах близости.* Мат. сб. 31 (73) (1952) стр. 543—547.

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF PROXIMAL-CONTINUITY

Summary

Although the notion of proximal continuity is situated between simple continuity and uniform continuity and for the latest there are known many criteria, for the proximal-continuity we do not know any necessary and sufficient condition. In the first part of this paper we give some criteria for proximal-continuity, using various operators introduced by B. Banaschewschi and J. Maranda in [2] for the definion of proximity-spaces. In the second part we give two conditions, characterizing proximal-continuity in metric spaces.

NETS OF FUNCTIONS

BY

EUGEN V. DOBRESCU and RODICA O. GHERMAN
(University of Craiova)

Communication presented to the jubiliar session „Al. Myller" of the University „Al. I. Cuza" Iassy, 20–25 Aug. 1970

1. Introduction. Considering sequences of continuous functions E. Borel [1], E.W. Hobson [2], P.S. Alexandrov [3] and C. Arzelà [4] give necessary and sufficient conditions for convergence to a continuous function, by using the concept of quasi-uniform convergence. M. Nicolescu [5] shows the criticism made by S. Marcus to this concept in an unpublished communication. Later I. Muntean [6] generalizes the concept of quasi-uniform convergence to nets of functions defined on a topological space, having values in an uniform space in Weil's [7] acception. He succeeded to give a necessary and sufficient condition for a net of continuous functions to converge to a continuous function.

In the first part of this paper, we shall try to find necessary and sufficient conditions for a net of functions, not necessarily continuous, to converge to a continuous function.

K. Bögel [8], M. Nicolescu [9] E. Dobrescu and I. Sălăgeanu [10] define a concept of bidimensional continuity for the functions defined on a cartesian product of topological spaces.

In the last part of our paper, we shall study the convergence of a net of functions to a bidimensional continuous function.

Notations. Definitions. Let X, Y be two topological spaces, Z a uniform space, E a linear topological space and $(A, \leqslant)$ a directed set. If $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $(x_0, y_0) \in X \times Y$, we shall denote by $\mathcal{V}(x_0)$, $\mathcal{V}(y_0)$, $\mathcal{V}(x_0, y_0)$ respectively the neighborhoods filters of $x_0, y_0, (x_0, y_0)$ in the topologies of X, Y or in the product topology of $X \times Y$. We shall denote by $\mathcal{U}$ a fun-