ŞIRURI DE SEMNE NORMALE ÎN SENS PASCAL

DE

P. MINUŢ

În această lucrare introducem noţiunea de şir de semne normal în sens Pascal, dăm un criteriu de normalitate a unui şir de semne şi construim un exemplu de asemenea şir.

Noţiunea de şir normal în sens Pascal este analogă cu cea de şir normal şi cea de şir normal în sens Bernoulli, dar mai generală în sensul că mulţimea de semne, pe care noi o vom numi alfabet, nu mai este finită ci numărabilă.

Fie un număr natural $g \geqslant 2$ şi un alfabet cu g semne

$$G = \{0, 1, \ldots, g-1\}.$$

Fie un şir de semne

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{1}$$

unde $\alpha_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Pentru orice număr natural $s \geqslant 1$, ataşăm şirului (1) un alt şir pe care îl vom numi şirul cuvintelor de lungime s:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s), \ (\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{s+1}), \ldots, (\alpha_n \alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+s-1}), \ldots \tag{2}$$

În cele ce urmează, prin cuvînt vom înţelege un şir finit de semne.

Fixăm un cuvînt arbitrar de lungime s

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s), \quad \delta_i \in G,$$

şi notăm cu $N_k(\Delta)$ numărul de apariţii ale lui Δ printre primii k termeni ai şirului (2). Se spune că şirul (1) este un şir normal de semne, dacă pentru orice număr natural s şi orice cuvînt Δ de lungime s, are loc egalitatea

$$\lim_{k \to \infty} \frac{N_k(\Delta)}{k} = \frac{1}{g^s}.$$

Șirurile normale sînt bine cunoscute și au fost construite exemple concrete de asemenea șiruri [1], [2].

A. G. Postnikov și I. I. Piatețkii au introdus [3] noțiunea de șir normal în sens Bernoulli și au construit exemple de asemenea șir. Aceste șiruri sînt studiate în special în cazul $g = 2$, cînd ele coincid cu numerele admisibile introduse de A. H. Copeland [4].

Considerăm numerele reale $p_0, p_1, \ldots, p_{g-1}$ care satisfac condițiile

$$0 \leqslant p_i \leqslant 1, \qquad i = 0, 1, \ldots, g-1, \qquad \sum_{i=0}^{g-1} p_i = 1.$$

Fiecărui semn j din G îi atașăm măsura $\mu(j) = p_j$, iar fiecărui cuvînt $\Delta = (\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_s)$ îi atașăm măsura $\mu(\Delta) = p_{\delta_1} \cdot p_{\delta_2} \cdots p_{\delta_s}$.

Șirul de semne (1) se numește șir normal în sens Bernoulli, dacă pentru orice număr natural s și orice cuvînt Δ de lungime s, are loc egalitatea

$$\lim_{k \to \infty} \frac{N_k(\Delta)}{k} = \mu(\Delta).$$

Noi vom considera un alfabet numărabil pe care îl identificăm cu mulțimea numerelor naturale

$$N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Fie un număr real, p,

$$0 < p < 1.$$

Notăm $q = 1 - p$. Fiecărui număr natural j îi atașăm măsura

$$\mu(j) = qp^j. \tag{2}$$

Fiecărui cuvînt $\Delta = (\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_s)$ îi atașăm măsura

$$\mu(\Delta) = q^s p^{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_s}. \tag{3}$$

Σ fiind o mulțime de cuvinte diferite de lungime s, îi atașăm măsura $\mu(\Sigma)$ egală cu suma măsurilor tuturor cuvintelor din Σ.

Fie un șir format cu semne din N

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{4}$$

Pentru orice număr natural $s \geqslant 1$, atașăm șirului (4) șirul cuvintelor de lungime s:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s), \qquad (\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{s+1}), \ldots, (\alpha_n \alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+s-1}), \ldots \tag{5}$$

Fixăm un cuvînt arbitrar de lungime s

$$\Delta = (\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_s)$$

și notăm cu $N_k(\Delta)$ numărul de apariții ale lui Δ printre primii k termeni ai șirului (5).

Definiție. *Vom spune că șirul (4) este un șir de semne normal în sens Pascal, dacă pentru orice număr natural s și orice cuvînt de lungime s, Δ, are loc egalitatea:*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{N_k(\Delta)}{k} = q^s p^{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_s}. \tag{6}$$

Vom stabili un criteriu analog celui stabilit de I. I. Piatețkii [2] pentru șiruri normale și extins de I. I. Piatețkii și A. G. Postnikov [3] pentru șiruri normale în sens Bernoulli. Folosim o metodă analogă cu cea folosită la extensiunea menționată.

Lema 1. *Fie r un număr natural și Σ mulțimea tuturor cuvintelor de lungime l în care un semn fixat, a, apare de j ori, j satisfăcînd inegalitatea*

$$|j - lqp^a| \geqslant \frac{l}{r};$$

atunci

$$\mu(\Sigma) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}. \tag{7}$$

Demonstrație. Este cunoscută următoarea lemă: Fie r un număr natural și Σ mulțimea cuvintelor de lungime l, formate din alfabetul $A = \{0, 1\}$ și pentru care numărul de unități, j, satisface inegalitatea

$$|j - lP| \geqslant \frac{l}{r},$$

P fiind măsura atașată lui 1, iar $Q = 1 - P$ măsura atașată lui 0: atunci

$$\mu(\Sigma_1) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}.$$

Notăm $P = qp^a$, $\quad Q = 1 - qp^a = \sum_{i \in N - \{a\}} qp^i$.

Toate semnele a din cuvintele lui Σ le înlocuim cu 1 și toate semnele diferite de a cu 0. Obținem o mulțime de cuvinte cu 2 semne Σ_1, care satisface condiția

$$\mu(\Sigma_1) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}.$$

Se observă că

$$\mu(\Sigma) = \mu(\Sigma_1)$$

și deci

$$\mu(\Sigma) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}.$$

Lema 2. *Fie r un număr natural, Δ un cuvînt arbitrar de lungime s și $l \geqslant 1$ un număr natural. Formăm cuvintele de lungime ls*

$$(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_s\, \alpha_{s+1} \dots \alpha_{2s} \dots \alpha_{ls})$$

pe care le reprezentăm sub forma

$$(\beta_1\beta_2 \dots \beta_l),$$

unde

$$\beta_k = (\alpha_{(k-1)s+1}\, \alpha_{(k-1)s+2} \dots \alpha_{ks}) \qquad (k = 1, 2, \dots, l).$$

Notăm cu $A_\Delta^{(l)}$ numărul de apariții ale lui Δ printre $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulțimea cuvintelor de lungime $l.s$ pentru care

$$|A_\Delta^{(l)} - l\mu(\Delta)| \geqslant \frac{l}{r}.$$

Atunci

$$\mu(\mathcal{M}) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}. \tag{9}$$

Demonstrație. Considerăm cuvintele de lungime ls formate cu semne din $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ (în condițiile de la demonstrația lemei precedente) și notăm cu $\mathcal{M}_1$ mulțimea cuvintelor care satisfac (8). În aceste condiții este demonstrat că

$$\mu(\mathcal{M}_1) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}.$$

În cuvintele din $\mathcal{M}$ înlocuim toate semnele distincte care apar în Δ cu 1 și toate semnele care nu apar în Δ cu 0.

Dacă $\Delta = (\delta_1\delta_2 \dots \delta_s)$, notăm

$$P = q(p^{\delta_{i_1}} + p^{\delta_{i_2}} + \dots + p^{\delta_{i_r}}),$$

$$Q = 1 - P,$$

unde $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \dots, \delta_{i_r}$ sînt semnele distincte care apar în Δ.

Notăm cu $\mathcal{M}_1$ mulțimea cuvintelor cu semne din $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ și care satisfac condiția (8) pentru $\Delta = (1, 1, \dots, 1)$. Avem

$$\mu(\mathcal{M}_1) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}.$$

Pe de altă parte

$$\mu(\mathcal{M}) \leqslant \mu(\mathcal{M}_1)$$

și prin urmare

$$\mu(\mathcal{M}) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}.$$

Teoremă. *Fie un șir format cu elemente din N*

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \tag{10}$$

Dacă există o constantă $C > 0$ așa fel că oricare ar fi numărul natural s și oricare ar fi cuvîntul de lungime s format cu semne din N

$$\Delta = (\delta_1\, \delta_2 \dots \delta_s)$$

are loc inegalitatea

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_k(\Delta)}{k} < Cq^s p^{\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_s},$$

atunci șirul (10) este un șir de semne normal în sens Pascal.

Demonstrație. Împărțim șirul (10) în cuvinte de lungime s

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)\,(\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_{2s}), \dots, (\alpha_{(k-1)s+1}\, \alpha_{(k-1)s+2} \dots \alpha_{ks}), \dots \tag{12}$$

Notăm cu

$$\beta_k = (\alpha_{(k-1)s+1}\, \alpha_{(k-1)s+2} \dots \alpha_{ks})$$

și grupăm cuvintele șirului (12) cîte l:

$$(\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_l)\,(\beta_{l+1}\, \beta_{l+2} \dots \beta_{2l}) \dots \tag{13}$$

Un cuvînt de lungime l îl vom numi „bun" dacă numărul de apariții ale lui Δ în acest cuvînt este dat de expresia

$$l\left(q \cdot p^{\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_s} + \theta\frac{1}{r}\right),$$

unde r este un număr natural, fixat, $r \geqslant 1$, iar $|\theta| \leqslant 1$ și vom spune că este un cuvînt „rău" dacă această condiție nu e satisfăcută.

Fie $(M[k/s])$ numărul de apariții ale cuvintelor „rele" printre primii $l[[k/s]/l]$ termeni ai șirului (13). Notînd cu $\mathcal{M}$ mulțimea cuvintelor rele, avem

$$M\left(\left[\frac{k}{s}\right]\right) \leqslant N_{[k/s]}(\mathcal{M}). \tag{14}$$

Din (11) rezultă că există un număr natural k_0 aşa fel că pentru orice $k \geqslant k_0$ are loc inegalitatea

$$N_{s[k/s]}(\mathcal{M}) \leqslant 2C\mu(\mathcal{M})k. \tag{15}$$

După lema 2 avem

$$\mu(\mathcal{M}) \leqslant \frac{r^4}{4l^2}. \tag{16}$$

Numărul cuvintelor „bune" printre primii $l[[k/s]/l]$ termeni ai şirului (13) este dat de expresia

$$\frac{k}{sl} - M\left(\left|\frac{k}{s}\right|\right) + O(1).$$

Un cuvînt „bun" conţine pe Δ de

$$l\left(q \cdot p^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_s} + \frac{\theta}{r}\right)$$

ori, iar un cuvînt „rău" cel mult de l ori. Rezultă că Δ se întîlneşte în şirul (12), pînă la termenul de rang $[k/s]$ de un număr de ori dat de expresia

$$A_\Delta^{[k/s]}(\alpha) = l\left(qp^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_s} + \frac{\theta}{r}\right)\left(\frac{k}{s} - M\left(\left|\frac{k}{s}\right|\right) + O(1)\right) + l\theta_1 M\left(\left[\frac{k}{s}\right]\right) +$$
$$+ O(l), \text{ unde } 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1.$$

Ţinînd cont de (14), (15), (16), obţinem

$$A_\Delta^{[k/s]}(\alpha) = \frac{k}{s}\left(qp^{\delta_1+\delta_2+\ldots\delta_s} + \frac{\theta}{r}\right) + O\left(k\frac{r^4}{l}\right) + O(l).$$

Rezultă că

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{A_\Delta^{[k/s]}(\alpha)}{\frac{k}{s}} - q.p^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_s}\right| \leqslant \frac{1}{r} + O\left(\frac{sr^4}{l}\right).$$

Făcînd pe l să tindă la infinit, obţinem

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{A_\Delta^{[k/s]}(\alpha)}{\frac{k}{s}} - q.p^{\delta_1+\ldots+\delta_s}\right| \leqslant \frac{1}{r}$$

şi făcînd şi pe r să tindă la infinit, obţinem

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A_\Delta^{[k/s]}(\alpha)}{\frac{k}{s}} = q \cdot p^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_s}. \tag{17}$$

Ţinînd cont că relaţia (17) e valabilă şi pentru şirurile

$$T_j(\alpha) = \alpha_{1+j}\,\alpha_{2+j}\ldots$$

şi că $N_k(\Delta) = \sum_{j=0}^{s-1} A_\Delta^{[k/s]}(T_j(\alpha)) + O(s)$, rezultă că

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_k(\Delta)}{k} = q \cdot p^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_s}. \text{ c. c. t. d.}$$

În vederea construirii unui exemplu de şir normal în sens Pascal avem nevoie de numărul soluţiilor naturale ale ecuaţiei

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k \quad (k \in N), \tag{18}$$

adică a acelor soluţii $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ pentru care

$$x_i^{(0)} \geqslant 0, \text{ pentru orice } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Teoremă. *Numărul soluţiilor naturale ale ecuaţiei* $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k$ *este dat de expresia*

$$T_m(k) = C_{m+k-1}^k.$$

Demonstraţia se face prin inducţie. Observăm că

$$T_m(0) = 1 = C_{m-1}^0,$$
$$T_m(1) = m = C_m^1.$$

Considerăm teorema adevărată pentru orice număr natural pînă la $m-1$. Cele $T_m(k)$ soluţii ale ecuaţiei (18) se obţin luînd ecuaţiile

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = h \quad (h = 0, 1, \ldots, k) \tag{19}$$

şi adăugînd fiecărei soluţii a primei ecuaţii (19) o componentă egală cu k, fiecărei soluţii a celei de-a doua ecuaţii o componentă $k-1$ ş. a. m. d. Avem deci

$$T_m(k) = C_{m-2}^{(0)} + C_{m-1}^1 + \ldots + C_{m+k-2}^k = C_{m+k-1}^k.$$

Construim exemplul de şir normal în sens Pascal pentru $p = q = 1/2$. Notăm cu s_k şirul cuvintelor de măsură $1/2^k$ ordonate în ordinea crescătoare a cifrelor începînd de la stînga spre dreapta:

$$s_1 = 0'$$

$$s_2 = 00'\ 1',$$

$$s_3 = 000'\ 01'\ 10'\ 2'\ ,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$s_k = \underbrace{0\ 0 \ldots 0'}_{k} \quad \underbrace{0\ 0 \ldots 0}_{k-2}\ 1' \ldots k-2\ 0' \quad k-1,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Considerăm şirul

(20) $$S = s_1 s_2 \ldots s_k \ldots$$

Notăm $S_k = s_1 s_2 \ldots s_k$.

Un cuvînt arbitrar $(i_1 i_2 \ldots i_t)$ are măsura $\dfrac{1}{2^{i_1+i_2+\ldots+i_t+t}}$ şi prin urmare el face parte din s_k dacă şi numai dacă $i_1 + i_2 + \ldots + i_t = k - t$.

Rezultă că numărul tuturor cuvintelor din s_k este egal cu suma numărului de soluţii în numere naturale ale ecuaţiilor:

(21)
$$\begin{aligned} i_1 &= k-1, \\ i_1 + i_2 &= k-2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_t &= k-t, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_k &= 0, \end{aligned}$$

adică

(22) $$m_k = T_1(k-1) + T_2(k-2) + \ldots + T_k(0) = 2^{k-1}.$$

Evident, numărul cuvintelor din S_k este

(23) $$M_k = 1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

Ţinînd cont de legătura între ecuaţiile (21) şi cuvintele lui s_k, calculăm numărul semnelor din s_k:

$$x_k = 1.T_1(k-1) + 2.T_2(k-2) + \ldots + k.T_k(0) = (k+1)2^{k-2},$$

(24) $$\text{pentru } k \geqslant 2,$$

$$x_1 = 1.$$

Numărul semnelor din S_k este dat de:

(25) $$X_k = 1 + 3 + \ldots + (i+1)2^{i-2} + \ldots + (k+1)2^{k-2} = k.2^{k-1},$$

formulă valabilă pentru orice $k \geqslant 1$.

Fixăm un număr natural $r \geqslant 1$ şi un cuvînt de lungime r

$$\Delta = (\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_r).$$

Într-un şir s_k, Δ poate să apară neseparat (prin accente) sau separat. Pentru ca Δ să apară neseparat în s_k, trebuie să fie îndeplinită condiţia

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r + r \leqslant k.$$

Cuvîntul de lungime minimă în care apare Δ în S_k este chiar Δ care apare în s_{k_0} unde

$$k_0 = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r + r.$$

În S_k cuvintele de lungime maximă în care apare Δ sînt de forma

$$0\ 0 \ldots 0 \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_r 0 \ldots 0,$$

unde, în afară de $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_r$, 0 apare de $h = k - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r + r)$ ori, Δ apare, neseparat, în S_k în modul următor:

— în cuvinte de lungime r o singură dată (însuşi Δ);

— în cuvinte de lungime $r+1$ de $2\,C_h^2$ ori (Δ poate începe cu primul sau al doilea semn al cuvîntului, iar semnul rămas poate fi înlocuit cu 0, $1, \ldots, h$);

— în cuvinte de lungime $r+3$, de $3\,C_h^2$ ori (Δ poate începe cu primul, al doilea sau al treilea semn al cuvîntului, iar cele două locuri rămase libere pot fi completate cu $0, 1, \ldots, h-1$ în C_h^2 moduri) ş. a. m. d.:

— în cuvinte de lungime $r+h$, Δ apare de $(h+1)C_h^h$ ori.

Numărul de apariţii neseparate ale lui Δ în S_k este

(26) $$R_k(\Delta) = 1.C_h^0 + 2.C_h^1 + \ldots + (h+1)C_h^h = (h+2)^{h-1}.$$

În S_k există $2^k - 2$ accente intermediare şi fiecare poate separa cel mult r cuvinte Δ, deci numărul de apariţii separate ale lui Δ, în S_k, este de cel mult $r(2^k - 2)$ ori.

Δ apare separat de $U_k(\Delta)$ ori unde

(27) $$U_k(\Delta) = O(2^{k-1}).$$

Din (26) şi (27) rezultă

(28) $$N_{X_k}(\Delta) = (h+2)2^{h-1} + O(2^{k-1}).$$

Din (25) şi (28) obţinem

(29) $$N_{X_k}(\Delta) = (h+2)2^{h-1} + O(X_k).$$

Teoremă. *Șirul* (20) *este un șir de semne normal în sens Pascal.*

Demonstrație. Fie X un număr natural arbitrar. Există un k așa fel că

$$X_k \leqslant X < X_{k+1}.$$

Avem

$$\frac{N_X(\Delta)}{X} \leqslant \frac{N_{X_{k+1}}(\Delta)}{X_k} = \frac{N_{X_{k+1}}(\Delta)}{X_{k+1}} \cdot \frac{X_{k+1}}{X_k}.$$

Totodată

$$\frac{X_{k+1}}{X} = \frac{(k+1)2^k}{k2^{k-1}} = \frac{2(k+1)}{k} \leqslant 4. \tag{31}$$

Ținînd cont de (29), (30) și (31), obținem

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N_X(\Delta)}{X} \leqslant 4 \frac{1}{2^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_r+r}}.$$

și conform primei teoreme demonstrate avem

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_X(\Delta)}{X} = \frac{1}{2^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_r+r}},$$

ceea ce dovedește normalitatea șirului (20), în sens Pascal.

Metoda folosită poate fi extinsă și pentru p număr rațional diferit de 1/2.

BIBLIOGRAFIE

1. Champernowne D. G. — *The construction of the decimals normal in the scale of ten.* J. London Math. Soc., 8, 1933, p. 214—230.
2. Шапиро-Пятецкий И. И. — *О законах распределения дробных долей показательной функции.* Известия АН СССР. 15. 1951. стр. 47—52.
3. Постников А. Г., Пятецкий И. И. — *Нормальные по Бернулли последовательности.* Известия АН СССР. 21. 1957. стр. 501—514.
4. Copeland A. H. — *Admissible numbers in the theory of probability.* Amer. Journ. of Math., 50, 1928, p. 535—552.

SEQUENCES OF NORMAL SIGNS IN PASCAL'S SENSE

Abstract

In this paper we give an extension of the notion of normal sequence or normal sequence in Bernoulli sense. A sequence of natural numbers which meets condition (6) is said to be a normal sequence in Pascal's sense. The criterion of Pjateckij is extended, and an example of normal sequence in Pascal's sense is built up.

ON THE STRUCTURE OF REGULAR O-BISIMPLE SEMIGROUPS

BY

R. J. WARNE

We extend our structure theorem for regular bisimple semigroups [3] to regular O-bisimple semigroups. We show that a regular O-bisimple semigroup S with zero, 0, is determined by $\mathfrak{R} \cup 0$ and $\mathfrak{L} \cup 0$ where $R(L)$ is any $\mathfrak{R}$-class ($\mathfrak{L}$-class) of S such that $R \cap L$ is a group. The structure of regular O-bisimple semigroups is described mod two partial semigroups with zero, 0, $R \cup 0$ and $L \cup 0$ and two functions by means of an explicit multiplication (theorem 7). We also obtain the Rees structure theorem for completely O-simple semigroups by specializing theorem 7 (theorem 10).

Unless otherwise specified, we employ the definitions and notation of [1]. In particular, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{H}$ will denote Green's relations and R_a will denote the $\mathfrak{R}$-class of S containing $a \in S$. If $e \in E(S)$, the collection of idempotents of S, P_e (Q_e) will denote the right unit subsemigroup (the left unit subsemigroup) of eSe.

To prove our structure theorem, we first establish six lemmas.

Lemma 1. *Let S be a regular O-bisimple semigroup with zero, 0, and let $e \in E(S)\setminus\{0\}$. Then, $S = L_eR_e \cup 0$ ($0 \in L_eR_e$) with $ab = cd$ ($a, c \in L_e$ and $b, d \in R_e$) if and only if $c = at^{-1}$ and $d = tb$ for some $t \in H_e$ where t^{-1} is the group inverse of t in H_e.*

Proof. If $a \in S$ and $a \neq 0$, $(a, g) \in \mathfrak{L}$ for some $g \in E(S)\setminus\{0\}$. Since S is O-bisimple, there exists $p \in R_e \cap L_g$. By the proof of [1, theorem 2.18], there exists $p' \in R_g \cap L_e$ such that $p'p = g$. Hence, $a = ag = (ap')p$. However, $ap' \mathfrak{L} gp' \mathfrak{L} p' \mathfrak{L} e$. If $a \in L_e$ and $b \in R_e$, there exists $x, y \in S$ such that $xa = by = e$. Hence, if $ab = 0$, then $e = xaby = 0$ and, thus, $0 \in L_eR_e$. Next, suppose that $ab = cd$ ($a, c \in L_e$; $b, d \in R_e$). Since $a, c \in L_e$, there