LA SOMME DE DEUX APPLICATIONS m-DISSIPATIVES

PAR

ADRIAN CORDUNEANU

Soit X un espace de Banach reel et X^* son dual. L'application duale $F : X \to X^*$ est donnée par la relation

$$Fx = \{x^* \in X^* \,;\, (x, x^*) = \| x \|^2 = \| x^* \|^2\}, \tag{1}$$

où par (x, x^*) on comprend la valeur de la fonctionnelle x^* au point x. En général, F est multivoque : une condition suffisante afin que F soit une fonction est que X^* soit strictement convexe.

L'application (en général multivoque) $A : D_A \subset X \to X$ est dissipative si $\forall [x_i, y_i] \in A$, $i = 1, 2$, il existe $x^* \in F(x_1 - x_2)$ telle que $(y_1 - y_2, x^*) \leqslant 0$.

Il est bien connu [2] que la condition nécessaire et suffisante pour que A soit dissipative est que pour tout $\lambda > 0$, l'inégalité suivante soit remplie :

$$\| x_1 - x_2 \| \leqslant \| x_1 - x_2 - \lambda (y_1 - y_2) \|, \quad \forall x_i \in D_A \text{ et } \forall y_i \in Ax_i, \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

A_n est la fonction définie par la relation $A_n x = n(R(n, A)(nx) - x) = n((n - A)^{-1}(nx) - x)$ (c'est-à-dire $R(n, A) \overset{\text{def}}{=} (n - A)^{-1}$ et elle est aussi dissipative si A jouit de cette propriété. L'inclusion $A_n x \in A(1 - n^{-1}A)^{-1}x$, $\forall x \in R(1 - n^{-1}A)$ et $\forall n \in N$ (l'ensemble des nombres naturels) a également lieu si A est dissipative. Dans ce travail, on employera la notation $R(A)$ pour le domaine des valeurs d'une application A.

Soit Q un ensemble convexe et fermé de X, contenant l'origine. Nous dirons que l'application A est dissipative par rapport à Q, si A est dissipative, $D_A \subset Q$ et $R(\lambda - A) \supset Q$, $\forall \lambda > 0$. $D(Q)$ désignera la classe des applications dissipatives par rapport à Q. Si $Q = X$, l'application $A \in D(X)$ s'appelle m-dissipative.

Nous allons démontrer le lemme suivant [3] :

Lemme : *Si $A, B \in D(Q)$, alors il résulte $A + B_n \in D(Q), \forall n \in N$.*

Démonstration. Considérons l'équation approximative $\lambda x - Ax - B_n x \ni y$: $\lambda > 0$, $y \in Q$. Par la méthode du point fixe, on montre que cette équation admet une solution $x \in D_A$: en effet, elle est équivalente à la suivante : $(\lambda + n)x - Ax - nR(n, B)(nx) \ni y$ et avec la notation $z = (\lambda + n)x - Ax$, on peut écrire $z - T_n z = y$, où $T_n = nR(n, B)\, nR(\lambda + n, A)$. Il est évident que si on pose $\mathcal{F}_n z = T_n z + y$, on définit une application $\mathcal{F}_n : Q \to Q$ qui est contractante, parce que $\| \mathcal{F}_n z_1 - \mathcal{F}_n z_2 \| \leqslant n(\lambda + n)^{-1} \| z_1 - z_2 \|$, $\forall z_1, z_2 \in Q$. Il existe donc $z \in Q$ tel que $z - T_n z = y$ et il existe $x \in D_A$ tel que $(\lambda + n)x - Ax \ni z$, c'est-à-dire $\lambda x - Ax - B_n x \ni y$. L'inclusion $R(\lambda - A - B) \supset Q$, $\forall \lambda > 0$ a été démontré. Compte tenu des relations :

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda x_1 - Ax_1 - B_n x_1 = (\lambda + n)x_1 - Ax_1 - nR(n, B)(nx_1) = y_1, \\ \lambda x_2 - Ax_2 - B_n x_2 = (\lambda + n)x_2 - Ax_2 - nR(n, B)(nx_2) = y_2 \end{cases}$$

on déduit que

$$(4) \quad \begin{aligned} \| x_1 - x_2 \| &\leqslant (\lambda + n)^{-1}(\| y_1 - y_2 \| + n \| R(n, B)(nx_1) - \\ &- R(n, B)(nx_2) \|) \leqslant (\lambda + n)^{-1}(\| y_1 - y_2 \| + n \| x_1 - x_2 \|), \end{aligned}$$

d'où il résulte finalement que

$$(5) \quad \begin{aligned} \| x_1 - x_2 \| &\leqslant \| x_1 - x_2 - \lambda(A + B_n)x_1 - (A + B_n)x_2) \|, \\ &\forall x_1, x_2 \in D_A \cap D_{B_n} \end{aligned}$$

et la démonstration est achevée, compte tenu du fait que $\lambda > 0$ est arbitraire.

Théorème 1. *Soit $A, B \in D(Q)$, A fermée, B continue et compacte, $D_B = Q$. Alors, il résulte $A + B \in D(Q)$.*

Démonstration. D'après le lemme, l'équation $\lambda x - Ax - B_n x \ni y$, $\lambda > 0$ et $y \in Q$, admet solution unique $x_n \in D_A$; nous allons montrer que a suite (x_n) est bornée. Soit $x_0 \in D_A$; compte tenu des relations

$$(6) \quad \begin{aligned} &(\lambda + n)x_n - Ax_n - nR(n, B)(nx_n) = y, \\ &(\lambda + n)x_0 - Ax_0 - nR(n, B)(nx_0) = \tilde{y}_n, \end{aligned}$$

on déduit que $\| x_n - x_0 \| \leqslant (\lambda + n)^{-1}(\| y - \tilde{y}_n \| + n \| x_n - x_0 \|)$ ou $\| x_n - x_0 \| \leqslant \lambda^{-1} \| y - \lambda x_0 + Ax_0 + n(R(n, B)(nx_0) - x_0) \|$. En posant $\alpha_n = R(n, B)(nx_0)$, on déduit que $\| \alpha_n \| \leqslant n^{-1} \| nx_0 + B0 \|$; de la relation $n(\alpha_n - x_0) = B\alpha_n$, on voit que la suite $(n(\alpha_n - x_0))$ est bornée et finalement il résulte que la suite (x_n) est aussi bornée.

De la relation

$$(1 - n^{-1}B)^{-1} x - x = (1 - n^{-1} B)^{-1} x - (1 - n^{-1} B)^{-1}.(1 - n^{-1}B)x,$$

on obtient $\| (1 - n^{-1}B)^{-1}x_n - x_n \| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N(\varepsilon)$ et par conséquent $\| (1 - n^{-1}B)^{-1} x_n \| \leqslant M$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Compte tenu que B est compact, de l'égalité $B_n x_n = B(1 - n^{-1}B)^{-1} x_n$ on déduit que $(B_n x_n)$ contient une suite partielle $(B_{n_k} x_{n_k})$ convergente ; pour cette raison on peut supposer $(B_n x_n)$ convergente. Les relations

$$(7) \quad \begin{aligned} \lambda x_n - Ax_n &= y + B_n x_n, \\ \lambda x_m - Ax_m &= y + B_m x_m, \end{aligned}$$

impliquent $\| x_n - x_m \| \leqslant \lambda^{-1} \| B_n x_n - B_m x_m \|$, c'est-à-dire la suite (x_n) est convergente : $x_n \to x$. Etant évident que $(1 - n^{-1}B)^{-1}x_n \to x$ et $B_n x_n \to Bx$, la première relation (7) montre que $Ax_n \to \lambda x - y - Bx$; A étant fermée, il résulte $x \in D_A$ et $\lambda x - y - Bx \in Ax$, donc $R(\lambda - A - B) \supset Q$. On obtient aussi l'inégalité :

$$\| x_1 - x_2 \| \leqslant \| x_1 - x_2 - \lambda(A + B)x_1 - (A + B)x_2) \|, \ \forall x_1, x_2 \in D_A$$

et la démonstration est achevée.

Définition 1. *L'élément $x \in Q$ s'appelle solution faible de l'équation $\lambda x - Ax - Bx = y$, s'il existe une suite $(x_n) \in D_A \cap D_B$ telle que $x_n \to x$ et $\lambda x_n - Ax_n - Bx_n \to y$.*

Corollaire. *Soit $A, B \in D(Q)$, B continue et compacte, $D_B = Q$. L'équation $\lambda x - Ax - Bx = y$, $y \in Q$ et $\lambda > 0$ admet une solution faible, $x \in Q$*

Démonstration. Il résulte $A + B \in D(Q)$. $\bar{A}$ étant la fermeture de A, c'est-à-dire l'application dont le graphe est la fermeture du graphe de l'application A. L'équation $\lambda x - \bar{A}x - Bx = y$ admet solution (unique) $x \in D_{\bar{A}}$ quel que soit $y \in Q$ et $\lambda > 0$.

Parce que le couple $(x, \lambda x - Bx - y)$ appartient à la fermeture du graphe de A, il existe $(x_n) \subset D_A$, telle que $x_n \to x$ et $Ax_n \to \lambda x - Bx - y$, donc x est solution faible de l'équation $\lambda x - Ax - Bx = y$.

Définition 2. *L'application $B : Q \to X$ s'appelle localement compacte sur Q si tout point $x \in Q$ possède un voisinage $V(x, \rho(x))$ tel que $B(Q \cap V(x, \rho(x))$ soit compacte.*

Théorème 2 : *Soit $A, B \in D(Q)$. A fermée, B continue et localement compacte sur Q, $R(\lambda - A - B)$ fermée $\forall \lambda > 0$. Alors il résulte $A + B \in D(X)$.*

Démonstration : Considérons l'équation approximative $\lambda x - Ax - B_n x \ni y$, $y \in Q$ et $\lambda > 0$. D'après le lemme, elle admet une solution unique $x_n \in D_A : \lambda x_n - Ax_n - B_n x_n \ni y$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ Soit $y_0 \in R(\lambda - A - B)$ et $x_0 \in D_A$ satisfaisant à la relation $\lambda x_0 - Ax_0 - Bx_0 \ni y_0$; en appliquant une fonctionnelle $x^* \in F(x_n - x_0)$ à la différence $x_n - x_0$, on obtient

$$(8) \quad \begin{aligned} \lambda(x_n - x_0, x^*) &= (Ax_n - Ax_0, x^*) + (B_n x_n - Bx_0, x^*) + \\ &+ (y - y_0, x^*) \leqslant (B_n x_0 - Bx_0, x^*) + (y - y_0, x^*), n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

De la relation précédente on déduit $\lambda \| x_n - x_0 \| \leqslant \| B_n x_0 - B x_0 \| + \| y - y_0 \|$, $n = 1, 2, 3 \ldots$; parce que $B_n x_0 \to B x_0$, on obtient $\| x_n - x_0 \| < \rho(x_0)$ pour $n \geqslant N_1$, si $\| y - y_0 \| < \lambda \rho(x_0)$. Pour déduire l'existence d'un point $x \in Q$, tel que $\lambda x - Ax - Bx \ni y$, on raisonne comme dans la démonstration précédente. Il résulte donc $R(\lambda - A - B)$ ouvert, $\forall \lambda > 0$ et compte tenu de l'hypothèse nous avons $R(\lambda - A - B) = X$, $\forall \lambda > 0$.

Théorème 3. *Soit X un espace de Banach. Supposons que A, $B \in D(X)$, B est continue et localement compacte sur X. Alors, il résulte $A + B \in D(X)$.*

Démonstration. Toute application m-dissipative étant fermée, on raisonne comme dans la démonstration précédente pour montrer que $R(\lambda - A - B)$ est ouvert, $\forall \lambda > 0$.

D'autre part, $R(\lambda - A - B)$ est un ensemble fermé de X, quel que soit $\lambda > 0$. En effet si $x_1, x_2 \in X$ et $\lambda x_i - Ax_i - Bx_i = y_i$, $i = 1, 2$, les relations

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda x_1 - Ax_1 - B_n x_1 = y_{1,n}, \\ \lambda x_2 - Ax_2 - B_n x_2 = y_{2,n} \end{cases}$$

impliquent $\| x_1 - x_2 \| \leqslant \lambda^{-1} \| y_{1,n} - y_{2,n} \|$ et parce que $B_n x_i \to B x_i$, $i = 1, 2$, il résulte $\| x_1 - x_2 \| \leqslant \lambda^{-1} \| y_1 - y_2 \|$. Supposons maintenant que $(y_n) \subset R(\lambda - A - B)$ et $y_n \to y$. Soit $x_n \in X$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ tels que $\lambda x_n - Ax_n - Bx_n \ni y_n$; de l'inégalité $\| x_n - x_m \| \leqslant \lambda^{-1} \| y_n - y_m \|$, on déduit $x_n \to x$, $Bx_n \to Bx$ et par conséquent la suite (Ax_n) est convergente. A étant m-dissipative, il résulte $\lim\limits_{n \to \infty} Ax_n \in Ax$ et donc $\lambda x - Ax - Bx \ni y$, c'est-à-dire $y \in R(\lambda - A - B)$.

$R(\lambda - A - B)$ étant à la fois ouvert et fermé, nous avons $R(\lambda - A - B) = X$, $\forall \lambda > 0$ et la démonstration est achevée.

Définition 3. *L'application $B : X \to X$ s'appelle localement uniformément continue sur X si tout point $x \in X$ possède un voisinage $V(x, \rho(x))$ dans lequel B est uniformément continue.*

Théorème 4. *Soit X un espace de Banach. Supposons que A, $B \in D(X)$ et B est localement uniformément continue sur X. Alors, il résulte $A + B \in D(X)$.*

Démonstration. Comme nous avons déjà vu, $R(\lambda - A - B)$ est un ensemble fermé, $\forall \lambda > 0$; il reste a montrer que cet ensemble est en même temps ouvert, $\forall \lambda > 0$.

Soit $y_0 \in R(\lambda - A - B)$ et $x_0 \in X$ tel que $\lambda x_0 - Ax_0 - Bx_0 \ni y_0$, λ étant un nombre positif fixé, y étant un élément de X tel que $\| y - y_0 \| < \lambda \rho(x_0)$ et x_n étant la solution (unique) de l'équation $\lambda x_n - Ax_n - B_n x_n \ni y$, $n = 1, 2, \ldots$ il résulte de l'inégalité (8) que $x_n \in V(x_0, \rho(x_0))$ pour $n \geqslant N_1$. En appliquant une fonctionnelle $x^* \in F(x_n - x_m)$ à la différence $(x_n - x_m)$ on obtient

$$(10) \qquad \begin{aligned} \lambda \| x_n - x_m \|^2 &\leqslant (B_n x_n - B_m x_m, x^*) \leqslant (B_n x_n - Bx_n, x^*) + \\ &+ (Bx_n - Bx_m, x^*) + (Bx_m - B_m x_m, x^*) (\leqslant (B_n x_n - Bx_n, x^*) + \\ &+ (Bx_m - B_m x_m, x^*), \end{aligned}$$

d'où il résulte $\lambda \| x_n - x_m \| \leqslant \| B_n x_n - Bx_n \| + \| B_m x_m - Bx_m \|$; d'autre part, comme nous pouvons supposer $\| Bx_n \| \leqslant M$ pour $n \geqslant N_1$, il est évident que $\| (1 - n^{-1} B)^{-1} x_n - x_n \| \to 0$ pour $n \to \infty$ et donc $(1 - n^{-1} B)^{-1} x_n \in V(x_0, \rho(x_0))$ pour $n \geqslant N_2$.

Compte tenu de la continuité uniforme de B dans $V(x_0, \rho(x_0))$ il résulte $\| B_n x_n - Bx_n \| \to 0$ et donc (x_n) est une suite convergente : $x_n \to x$. Comme $\lambda x - Ax - Bx \ni y$, on arrive à la conclusion que $R(\lambda - A - B)$ est ouvert et la démonstration est achevée.

Corollaire. *Soit X un espace Banach de dimension finie. La somme de deux applications m-dissipatives dans X, dont l'une est continue est m-dissipative.*

Il serait très intéressant de savoir si le corollaire précédent reste vrai dans le cas d'un espace de Banach général. G. F. Webb [4] a demontré le théorème suivant :

Théorème. *Soit X un espace de Banach, A un opérateur linéaire dans X, m-dissipatif, avec $\bar{D}_A = X$ et B un opérateur continu sur X et m-dissipatif. Alors, il résulte que $A + B$ est m-dissipatif.*

Remarque. Le théorème 4 de cette Note a été démontré par l'auteur sous des hypothèses plus restrictives. La démonstration donnée ici a été comuniquée à l'auteur par M. V. Barbu. Dans le travail [1] on trouve un théorème similaire (p. 70).

BIBLIOGRAPHIE

1. Barbu V. — *Nonlinear semigroups and evolution equations.* Iaşi, 1970.
2. Kato T. — *Nonlinear semigroups and evolution equations* J. Math. Soc. Japan, 19, 1967, pp. 508—520.
3. Prato G. da — *Somme d'applications non-linéaires dans des cônes et équations d'évolution dans des espaces d'opérateurs.* J. Math. pures et appl., 49, 1970, pp. 289—348.
4. Webb G. F. — *Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces* (sous presse).

SUMA A DOUĂ APLICAŢII m-DISIPATIVE

Rezumat

Se găsesc condiţii suficiente pentru ca suma a două aplicaţii m-disipative să fie m-disipativă, într-un spaţiu Banach general. Teorema 4 generalizează unele rezultate cunoscute din teoria perturbării operatorilor m-disipativi.