Corollary. *If in the above Theorem we put*

$$\lambda_1 = k_1 = m_1 \text{ and } \lambda_2 = k_2 = m_2.$$

we get [5, p. 28].

Some more Theorems and the differential and integral properties of this generalized Transform will be given in a subsequent paper.

My thanks are due to Dr. H. M. Srivastava for his kind help in the preparation of this paper. I am also thankful to the referee for his kind suggestions.

REFERENCES

1. Agarwal, R. D. — *Some Inversion Formulae for Generalised Laplace Transform.* Proc. Nat. Inst. of Sciences of India Vol. 35 (1969).
2. Erdelyi — *Tables of Integral Transform* I (1954). Mc. Graw Hill, New York.
3. Mc. Lachlan, & Humbert, P. — *Formulaire pour le calcul Symbolique* (1941).
4. Rathie, C. B. — *Laplace Integral and its generalizations.* Thesis approved for Ph. D. Degree of Rajasthan University.
5. Poli & Deleruc — *Le Calcul Symbolique à deux variables et ses applications,* Paris (1954).

Department of Mathematics & Astronomy,
Lucknow University,
Lucknow
(INDIA)

ASUPRA UNEI TRANSFORMĂRI GENERALIZATE DE DOUĂ VARIABILE

Rezumat

R. D. Agarwal [1] a dat o generalizare a transformării lui Laplace (1.1) pentru funcții de o variabilă sub forma (1.2). Procedînd asemănător, în această lucrare se definește transformata Laplace generalizată pentru funcții de două variabile prin (1.3), stabilindu-se diferite proprietăți ale ei prin teoremele 1—4.

SUR LES RAFFINEMENTS D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE

PAR

DAN I. PAPUC

À la mémoire
de mon Professeur
OCTAVE MAYER

§ 1. Considérations générales. Dans cette Note on étudie une structure notée par $(\xi, \mathfrak{N})$ où : ξ *est un espace fibré principal, différentiable*

$$\xi = (E, B, p, G; \mathfrak{A}), \tag{1}$$

(E, *l'espace total de* ξ et B, *l'espace base de* ξ, sont des variétés paracompactes, différentiables, réelles, à un nombre fini de dimensions, p, *la projection de* ξ, est une application différentiable de E sur B, G, *le groupe structural de* ξ, est un groupe Lie, $\mathfrak{A} = \{(U, \varphi)\}$ est *l'atlas maximal de trivialisation de* ξ. Une carte locale de trivialisation $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ est constituée par U, un ouvert de B, appelé *la zone de la carte* (U, φ) et φ, un difféomorphisme $\varphi : U \times G \to p^{-1}(U) \subset E$).

$\mathfrak{N}$ est *une suite de sous-groupes fermés de* G.

$$\mathfrak{N} = (G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{q-1} \supset H_q = \{e\}), \tag{2}$$

(e est l'élément unité de G, q est un nombre naturel, $q \geqslant 2$).

Pour abréger, dans ce qui suit nous utiliserons les notations suivantes

$$E_j = E/H_j, \qquad j = 0, 1, \dots, q. \tag{3}$$

E/H_j est l'espace quotient obtenu de E à l'aide du groupe de transformations H_j de E. Évidemment $E_q = E$, $E_0 = B$

$$H_k^j = H_j/H_k \qquad 0 \leqslant j < k \leqslant q. \tag{4}$$

$$G_k^j = H_j/N_{jk} \qquad 0 \leqslant j < k \leqslant q. \tag{5}$$

H_j/H_k est l'espace quotient de H_j par le sous-groupe H_k. N_{jk} est le plus grand diviseur normal de H_j, contenu dans le sous-groupe H_k. H_j/N_{jk} est le groupe facteur respectif.

$$p_{jk} : \alpha H_k \in E_k \to \alpha H_j \in E_j, \qquad 0 \leqslant j < k \leqslant q. \tag{6}$$

$$p_{c;jk} : aH_k \in H_k^c \to aH_j \in H_j^c, \qquad 0 \leqslant c < j < k \leqslant q. \tag{7}$$

p_{jk} et $p_{c;jk}$ sont les applications canoniques. Évidemment $p_{oq} = p$ et

$$\forall\, 0 \leqslant h < j < k \leqslant q \mid p_{hk} = p_{hj} \circ p_{jk}. \tag{8}$$

On montrera que pour chaque paire j, k, $(0 \leqslant j < k \leqslant q)$ les éléments

$$\xi_{jk} = (E_k, E_j, p_{jk}, H_k^j, G_k^j; \mathcal{A}_{jk}) \tag{9}$$

constituent un espace fibré différentiable, dont l'espace total est E_k, l'espace base est E_j, la projection est p_{jk}, la fibre type est H_k^j, le groupe structural est G_k^j, $\mathcal{A}_{jk}$ est un atlas de trivialisation déterminé, d'une manière naturelle, par la paire $(\xi, \mathfrak{N})$. Nous avons $\xi_{oq} = \xi$.

L'ensemble $\{\xi_{jk} \mid 0 \leqslant j < k \leqslant q\}$ a été nommé „le tissu associé à la structure $(\xi, \mathfrak{N})$". Une terne $(\xi_{oq}; \xi_{oj}, \xi_{jq})$, $0 < j < q$, a été nommée „le raffinement de ξ_{oq} par rapport au sous-groupe H_j."

Dans la présente Note on étudie quelques propriétés de nature topologique et de nature géométrique d'un raffinement de ξ_{oq}. Les propriétés topologiques concernent les suites d'homotopies des espaces fibrés ξ_{oq}, ξ_{oj}, ξ_{jq} du raffinement considéré et aussi des problèmes liés au relèvement d'une application continue par rapport à ξ_{oq}. Les propriétés géométriques concernent les connexions infinitésimales de ξ_{oq} et ξ_{jq}.

Il faut souligner que la structure $(\xi_{oq}; \xi_{oj}, \xi_{jq})$ peut être trouvée dans [3], vol. I, p. 55, 87, 88 ou dans [1], p. 44. Ici nous ferons une étude plus approfondie de cette structure.

Pour montrer l'utilité et l'importance de la recherche effectuée, dans le dernier paragraphe de cette Note nous indiquerons quelques exemples de structure $(\xi, \mathfrak{N})$, dont l'étude a un certain intérêt théorique. Nous remarquerons également que si $\xi = \xi_{oq}$ est l'espace fibré des repères linéaires tangents à B, alors l'étude d'une G-structure définie par H_j peut être remplacée par l'étude du raffinement de ξ_{oq} par rapport à H_j. La justification de ce remplacement est la suivante : L'étude de la G-structure définie par H_j a un sens seulement quand cette G-structure existe, tandis que pour étudier le raffinement $(\xi_{oq} : \xi_{oj}, \xi_{jq})$ on ne demande aucune condition supplémentaire d'existence. Mais en étudiant la structure $(\xi_{oq}, \xi_{oj}, \xi_{jq})$ on trouve les propriétés de la G-structure considérée, si elle existe.

§ 2. Le tissu et les raffinements associés à une structure $(\xi, \mathfrak{N})$. Considérons une structure $(\xi, \mathfrak{N})$ définie par (1) et (2). A l'aide des éléments de cette structure on construit le diagramme

(10)
$$\begin{tikzcd} E_q \arrow[d, "p_{oq}"'] \arrow[dr, "p_{jq}"] & \\ E_o & E_j \arrow[l, "p_{oj}"] \end{tikzcd}$$

Nous avons :

Lemme 1. *E_j est une variété différentiable dont la structure différentiable est déterminée, de manière unique, par la condition que p_{oj} et p_{jq} soient des surjections différentiables ouvertes.*

Démonstration. On introduit sur E_j la topologie quotient. L'application canonique p_{jq} est continue. Il s'ensuit immédiatement que p_{oj} est aussi continue et ouverte.

En utilisant les cartes locales de trivialisation des espaces fibrés principaux ξ et (H_0, H_j^0) ([6], p. 39) on peut construire pour chaque point $\alpha \in E_0$ un diagramme commutatif :

(11)
$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times V_\alpha \times H_j \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, "\pi_3"] & D_\alpha \subset E_q \arrow[d, "p_{jq}"] \\ U_\alpha \times V_\alpha \arrow[r, "h_\alpha^j"] \arrow[d, "\pi_2"] & p_{jq}(D_\alpha) \subset E_j \arrow[dl, "p_{oj}"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

U_α, V_α sont des ouverts de $E_0 = B$, respectivement de H_j^0, étant zones de trivialisation de ξ, respectivement (H_0, H_j^0). h_α est un homéomorphisme obtenu à l'aide des homéomorphismes de trivialisation de ξ et (H_0, H_j^0). π_3 et π_2 sont les projections canoniques des produits cartésiens considérés (sur le troisième et sur le second facteur). h_α^j est un homéomorphisme défini de manière unique, par le diagramme (11), de sorte que ce diagramme soit commutatif. Il s'ensuit que p_{jq} est une application ouverte.

A l'aide du diagramme (11), en utilisant les structures différentiables de E_0 et H_j^0 on introduit sur E_j la structure différentiable de sorte que les

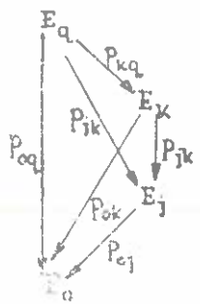
applications h^j_α soient des difféomorphismes. Il en résulte que p_{jq} et p_{0j} sont des applications différentiables.

La condition que p_{jq} soit une application continue et ouverte détermine de manière unique la topologie de E_j. Elle sera la topologie quotient. La structure différentiable de E_j est déterminée elle aussi de manière unique par la condition que p_{jq} soit une application différentiable et ouverte (dans ce cas-là, le diagramme (11) et le théorème 3, [5], p. 46 nous montrent que $\forall \alpha \in E_q$, h^j_α sont des difféomorphismes.) QED.

Lemme 2. *Pour n'importe quelle paire des entiers j, k, $0 \leqslant j < k \leqslant q$, l'application* (6) $p_{jk} : E_k \to E_j$ *est différentiable et ouverte.*

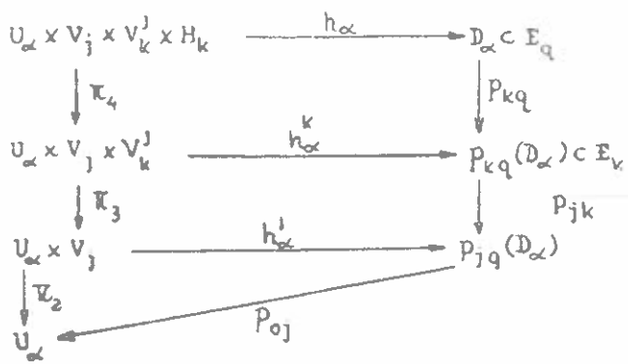
Démonstration. Considérons le diagramme

(12)



En tenant compte du fait que les applications p_{kq}, p_{0j}, p_{jq} et p_{0k} sont différentiables et ouvertes (lemme 1) à l'aide des relations $p_{jq} = p_{jk} \circ p_{kq}$ et $p_{0k} = p_{0j} \circ p_{jk}$ on voit immédiatement que p_{jk} est une application continue et ouverte. Le diagramme

(13)



analogue en (11), où V_j, V^j_k sont des ouverts de H^0_j, respectivement H^j_k, et h^k_α, h^j_α sont des difféomorphismes nous montre que p_{jk} est aussi une application différentiable. QED.

Lemme 3. *Pour une paire d'entiers j, k, $0 \leqslant j < k \leqslant q$ et pour une carte locale de trivialisation de ξ, $(U, \varphi_U) \in \mathfrak{A}$, considérons le diagramme*

(14)

$$\begin{array}{ccc}
U \times H^0_q & \xrightarrow{\varphi_{U;q}} & p^{-1}_{0q}(U) \subset E_q \\
\downarrow{\scriptstyle 1_U \times p_{0;kq}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{kq}} \\
U \times H^0_k & \xrightarrow{\varphi_{U;k}} & p^{-1}_{0k}(U) \subset E_k \\
\downarrow{\scriptstyle 1_U \times p_{0;jk}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{jk}} \\
U \times H^0_j & \xrightarrow{\varphi_{U;j}} & p^{-1}_{0j}(U) \subset E_j \\
\downarrow{\scriptstyle 1_U \times p_{0;0j}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{0j}} \\
U \times H^0_0 & \xrightarrow{\varphi_{U;0}} & U \subset E_0
\end{array}$$

où $\varphi_{U;q} = \varphi$, $\varphi_{U;0} = \pi_2$ (la projection sur le premier facteur) et $\varphi_{U;k}$, $\varphi_{U;j}$ sont des applications définies de manière unique par la condition que le diagramme soit commutatif. Alors 1) $\varphi_{U;k}$, $\varphi_{U;j}$ sont des difféomorphismes. 2) Si $x \in U \cap U'$ (U et U' sont des zones de trivialisation de ξ), en considérant l'élément $\varphi^{-1}_{U';q} \circ \varphi_{U;q} = a_q \in H^0_q$ nous avons

(15) $$\forall\, 0 \leqslant j < q \mid \varphi^{-1}_{U;j} \circ \varphi_{U;j} = a_j \in H^0_j \text{ où } p_{0;jq}(a_q) = a_j.$$

Démonstration. 1) En tenant compte du fait que p_{jk}, $p_{0;jk}$ sont des applications continues et ouvertes il en résulte que $\varphi_{U;j}$, $\varphi_{U;k}$ sont des homéomorphismes. Le diagramme (13) et les structures différentiables de E_0, H^0_j, E_j, E_q nous montrent que $\varphi_{U;j}$ est un difféomorphisme.

2) Pour vérifier la relation (15) nous considérerons une paire arbitraire (x, z), $x \in U \cap U'$, $z \in H^0_q$. Alors en vertu du (14) et en tenant compte de la structure de trivialisation de ξ nous avons

$$\begin{tikzcd}
(x,\ z) \arrow[r, "\varphi_{U;q}"] \arrow[d, "1_U \times p_{0;jq}"] & \alpha \arrow[r, "\varphi_{U';q}"] \arrow[d, "p_{jq}"] & (x,\ a_q(x)z) \arrow[d, "1_U \times p_{0;jq}"] \\
(x, p_{0;jq}(z)) \arrow[r, "\varphi_{U;j}"] & p_{jq}(\alpha) \arrow[r, "\varphi_{U';j}"] & (x,\ p_{0;jq}(a_q(x)z))
\end{tikzcd}$$

mais $p_{0;jq}(a_q(x)z) = a_j(x).p_{0;jq}(z)$, donc $\varphi^{-1}_{U';j} \circ \varphi_{U;j} = a_j(x)$. QED.

Dans ce qui suit nous utiliserons les espaces fibrés

(16) $$\tilde{\omega}_{0;jk}(H^0_k,\ H^0_j,\ p_{0;jk},\ H^j_k,\ G^j_k\ ;\ \alpha_{0;jk}) \qquad 0 \leqslant j < k \leqslant q,$$

espaces fibrés construits d'après le théorème de [6], p. 29. La structure de trivialisation sera notée par $\alpha_{0;jk} = \{(u_{jk},\ f_{u;kj})\}$. À l'aide de ces éléments et du diagramme (14) nous construirons le diagramme

(17) $$\begin{tikzcd}
U \times f_{u;kj}(u_{jk} \times H)^j_k \arrow[r, "\varphi^{**}_{U;k}"] \arrow[d, "1_U \times p_{0;jk}"] & p^{-1}_{jk}(U_{jk}) \subset p^{-1}_{0k}(U) \subset E_k \arrow[d, "p_{jk}"] \\
U \times u_{jk} \arrow[r, "\varphi^{*}_{U;j}"] & \varphi_{U;j}(U \times u_{jk}) \subset p^{-1}_{0j}(U) \subset E_j
\end{tikzcd}$$

où $\varphi^{*}_{U;j}$ et $\varphi^{**}_{U;k}$ sont des difféomorphismes définis par la restriction de $\varphi_{U;j}$ respectivement de $\varphi_{U;k}$. Précisément

(18) $$\varphi^{*}_{U;j} = \varphi_{U;j} \mid U \times u_{jk},\ \varphi^{**}_{U;k} = \varphi_{U;k} \mid U \times f_{u;kj}(u_{jk} \times H^j_k).$$

Considérons l'atlas de trivialisation $\mathcal{A} = \{(U,\ \varphi_U)\}$ de ξ et l'atlas de trivialisation $\alpha_{0;jk} = \{(u_{jk},\ f_{u;kj})\}$ de $\tilde{\omega}_{0;jk}$. A chaque paire de cartes locales de trivialisation, $(U,\ \varphi_U)$ de $\mathcal{A}$ et $(u_{jk},\ f_{u;kj}) \in \alpha_{0;jk}$, nous construirons la paire $(U_{jk},\ \varphi_{U;kj})$ définie par

(19) $$U_{jk} = \varphi_{U;j}(U \times u_{jk}),$$

(20) $$\varphi_{U;kj} = \varphi^{**}_{U;k} \circ (1_U \times f_{u;kj}) \circ (\varphi^{*}_{U;j})^{-1} \times 1_{H^j_k},$$

donc

$$\varphi_{U;kj} : U_{jk} \times H^j_k \to p^{-1}_{jk}(U_{jk}).$$

$\mathcal{A}_{jk} = \{(U_{jk},\ \varphi_{U;kj})\}$ est l'ensemble des toutes les paires susceptibles d'être obtenues de cette manière.

Théorème 1. *Pour une paire d'entiers j, k, $0 \leqslant j < k \leqslant q$, l'ensemble des éléments E_k, E_j, p_{jk}, H^j_k, G^j_k, $\mathcal{A}_{jk}$ constitue un espace fibré différentiable, noté par ξ_{jk}, dont l'espace total est E_k, l'espace base est E_j, la projection est p_{jk}, la fibre type est H^j_k, le groupe structural est G^j_k et un atlas de trivialisation est $\mathcal{A}_{jk}$.*

Démonstration. En vertu des lemmes 1 et 2, E_k, E_j sont des variétés différentiables, p_{jk} est une application différentiable ouverte. H^j_k est une variété différentiable et G^j_k est un groupe Lie de transformations de H^j_k. Il nous reste à vérifier que $\mathcal{A}_{jk}$ est un atlas de trivialisation et que les axiomes d'un espace fibré ([6], p. 12) sont satisfaits pour cet atlas.

En utilisant le diagramme (14) on peut voir que si l'on prend toutes les paires possibles U, u_{jk}, où U est une zone de trivialisation de ξ et u_{jk} une zone de trivialisation de $\tilde{\omega}_{0;jk}$ alors les ouverts U_{jk}, définis par (19) constituent un recouvrement ouvert de E_j. La relation (20) nous montre que $\varphi_{U;kj}$ est un difféomorphisme de $U \times H^j_k$ sur $p^{-1}_{jk}(U_{jk})$. Donc $(U_{jk},\ \varphi_{U;kj})$ est une carte locale de trivialisation.

Les inclusions $U_{jk} \subset p^{-1}_{0j}(U)$, $p^{-1}_{jk}(U_{jk}) \subset p^{-1}_{0k}(U)$ et la relation $p_{jk} \mid p^{-1}_{jk}(U_{jk}) = \varphi^{*}_{U;j} \circ (1_k \times p_{0;jk}) \circ (\varphi^{**}_{U;k})^{-1}$ obtenue du diagramme (17), en tenant compte de (18) et (20), nous montre que $\forall(\alpha,\ x) \in U_{jk} \times H^j_k) \mid p_{jk} \circ \circ\ \varphi_{U;kj}(\alpha,\ x) = \alpha$.

Nous allons vérifier que pour un élément donné $\alpha \in U'_{jk} \cap U_{jk}$ nous avons

(21) $$\forall y \in H^j_k \mid \varphi^{-1}_{U;kj} \circ \varphi_{U;kj}(\alpha,\ y) = (\alpha,\ a(\alpha)y)$$

où $a(\alpha) \in G^j_k$ et $a(\alpha)$ est une fonction différentiable de α, définie sur $U'_{jk} \cap U_{jk}$.

En utilisant les relations (20) nous avons :

$$\forall y \in H^j_k \mid \varphi^{-1}_{U';kj} \circ \varphi_{U;kj}(\alpha,\ y) = ((\varphi^{*}_{U';j})^{-1} \times 1_{H^j_k}) \circ (1_{U'} \times f^{-1}_{U';kj}) \circ$$

$(\varphi^{**}_{U';k})^{-1} \circ (\varphi^{**}_{U;k}) \circ (1_U \times f_{u;kj}) \circ ((\varphi^{*}_{U;j})^{-1} \times 1_{H^j_k})\ (\alpha,\ y)$. Alors $(\alpha,\ y) \to ((x,\ z),\ y) \to (x,\ \bar{z}) \to \bar{\alpha} \to (x,\ a_k(x)\bar{z}) \to (x,\ (a_j(x)z,\ \bar{a}(x)y)) \to (\alpha,\ a(\alpha)y)$ où $x = p_{0j}(\alpha)$, $a(\alpha) = \bar{a}(p_{0j}(\alpha))$, $z \in H^0_j$, $\bar{z} \in H^0_k$, $\bar{\alpha} \in E_k$, $a_k(x) \in G^0_k$, $a_j(x) = p_{0,jk}\ a_k(x) \in G^0_j$. On a supposé que $\varphi_{U;j}(x,\ z) = \alpha$, $f_{u;kj}(z,\ y) = \bar{z}$. Alors en tenant compte de $\varphi^{-1}_{U';k} \circ \varphi_{U;k} = a_k(x)$ et de (17) il résulte $\varphi^{-1}_{U';j} \circ \varphi_{U;j} = a_j(x) = p_{0;jk}(a_k(x))$. Le théorème de [6], p. 39 nous permet d'écrire $f^{-1}_{u';kj}(a_k(x)\bar{z}) = (a_j(x)z,\ \bar{a}(x)y)$ où $\bar{a}(x)$ est une fonction différentiable définie sur $U' \cap U$ et de plus $(\varphi^{*}_{U';j})^{-1}$ $(x,\ a_j(x)z) = \alpha$. Il en résulte la relation (21). QED.

Observation 1. L'espace fibré ξ_{jq}, $0 \leqslant j < q$ est un espace fibré principal ayant pour groupe structural le groupe H_j.

(23)

$$\begin{tikzcd}
\xi_{jq}: \cdots \arrow[r, "i_{2*}"] & \pi_{n+1}(E_q, \alpha_q) \arrow[r, "p_{jq*}"] \arrow[d, equal] & \pi_{n+1}(E_j, \alpha_j) \arrow[r, "d_{2*}"] \arrow[d, "p_{0j*}"] & \pi_n(\overline{H}^j_q, \alpha_q) \arrow[r, "i_{2*}"] \arrow[d, equal] & \pi_n(E_q, \alpha_q) \arrow[r, "p_{jq*}"] \arrow[d, equal] & \pi_n(E_j, \alpha_j) \arrow[r, "d_{2*}"] \arrow[d, "p_{0j*}"] & \cdots \\
\xi_{0q}: \cdots \arrow[r, "i_{0*}"] & \pi_{n+1}(E_q, \alpha_q) \arrow[r, "p_{0q*}"] \arrow[d, "p_{jq*}"] & \pi_{n+1}(E_0, \alpha_0) \arrow[r, "d_{0*}"] \arrow[d, equal] & \pi_n(\overline{H}^0_q, \alpha_q) \arrow[r, "i_{0*}"] \arrow[d, "p_{0;jq*}"] & \pi_n(E_q, \alpha_q) \arrow[r, "p_{0q*}"] \arrow[d, "p_{jq*}"] & \pi_n(E_0, \alpha_0) \arrow[r, "d_{0*}"] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\xi_{0j}: \cdots \arrow[r, "i_{1*}"] & \pi_{n+1}(E_j, \alpha_j) \arrow[r, "p_{0j*}"] & \pi_{n+1}(E_0, \alpha_0) \arrow[r, "d_{1*}"] & \pi_n(\overline{H}^0_j, \alpha_j) \arrow[r, "i_{1*}"] & \pi_n(E_j, \alpha_j) \arrow[r, "p_{0j*}"] & \pi_n(E_0, \alpha_0) \arrow[r, "d_{1*}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(I) (II) (III) (IV) (I)

Définition 1. *Soit la structure* $(\xi, \mathfrak{N})$ *définie par* (1) *et* (2). *On appelle le tissu associé à* $(\xi, \mathfrak{N})$, *l'ensemble des espaces fibrés*

$$\xi_{jk} = (E_k, E_j, p_{jk}, H^j_k, G^j_k : \mathfrak{A}_{jk}) \quad 0 < j < k < q. \tag{22}$$

Une terne $(\xi_{0q} : \xi_{0j}, \xi_{jq})$, $0 < j < q$ *s'appelle cellule de raffinement de* $\xi_{0q} = \xi$ *par rapport au sous-groupe* H_j.

Observation 2. Si la suite $\mathfrak{N}$, (2), est normale alors les espaces fibrés $\xi_{j\,j+1}$, $0 \leq j < q$, sont des espaces fibrés principaux ayant pour groupe structural $H^j_{j\times 1}$.

Observation 3. Sur chaque variété différentiable E_k, $0 < k \leqslant q$ est définie une suite de distributions involutives $\Delta^V_{0k} \supset \Delta^V_{1k} \supset \ldots \supset \Delta^V_{k-1k}$. Ce sont les distributions verticales des espaces fibrés ξ_{jk}, $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

§ **Propriétés topologiques des raffinements.** Dans ce paragraphe seules les structures topologiques de $(\xi, \mathfrak{N})$ entrent en considération. Un premier problème étudié concerne les groupes d'homotopies, pour un raffinement arbitraire de $\xi_{0q} = \xi$. Nous avons :

Théorème 2. *Pour un raffinement* $(\xi_{0q} : \xi_{0j}, \xi_{jq})$, *le diagramme suivant* (23) *construit à l'aide des suites d'homotopies de* ξ_{jq}, ξ_{0q} *et* ξ_{0j} *est commutatif. Les suites horizontales et la suite de la colonne* (III) *sont exactes.* (On y utilise les notations de [2]).

Démonstration. Considérons le raffinement $(\xi_{0q} : \xi_{0j}, \xi_{jq})$. Soit α_q un point donné de E_q, $\overline{H}^j_q$ la fibre locale de ξ_{jq} qui contient α_q et $\overline{H}^0_q$ la fibre locale de ξ_{0q} qui contient $\overline{H}^j_q$. Nous noterons $\alpha_j = p_{jq}(\alpha_q)$, $\alpha_0 = p_{0q}(\alpha_q)$, $\overline{H}^0_j = p_{jq}(H^0_q)$. Avec ces notations nous construirons, en utilisant les suites d'homotopies des espaces fibrés ξ_{jq}, ξ_{0q}, ξ_{0j}, le diagramme (23). Évidemment les suites horizontales sont exactes. La suite de la colonne III est exacte parce qu'elle est un morceau de la suite d'homotopie d'espace fibré $\omega_{0;jq}$, (16).

Pour démontrer la commutativité du diagramme (23) nous établirons pas à pas la commutativité des diagrammes constitués par les colonnes I et II, II et III, III et IV de ce diagramme.

La commutativité du diagramme constitué par les colonnes I et II est une conséquence directe de la relation $p_{0q*} = p_{0j*} \circ p_{jq*}$.

La commutativité du diagramme constitué par les colonnes II et III est une conséquence de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(E_q, \bar{H}^j_q, \alpha_q) \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "j"] & (E_j, \alpha_j) \arrow[d, "p_{0j}"] \\
(E_q, H^0_q, \alpha_q) \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "p_0"] & (E_0, \alpha_0) \arrow[d, equal] \\
(E_j, H^0_j, \alpha_j) \arrow[r, "q_1"] & (E_0, \alpha_0)
\end{tikzcd}$$

du fait que q_{2*}, q_{0*} et q_{1*} sont des isomorphismes ([2], p. 164) et de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(E_q, \bar{H}^j_q, \alpha_q) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "i_{1*}"] & \pi_n(\bar{H}^j_q, \alpha_q) \arrow[d, "i_*"] \\
\pi_{n+1}(E_q, H^0_q, \alpha_q) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "p_{jq*}"] & \pi_n(H^0_q, \alpha_q) \arrow[d, "p_{0;qj}{}^*"] \\
\pi_{n+1}(E_j, H^0_j, \alpha_j) \arrow[r, "\partial_1"] & \pi_n(\bar{H}^0_j, \alpha_j)
\end{tikzcd}$$

Enfin, la commutativité du diagramme constitué par les colonnes III et IV est une conséquence de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\bar{H}^j_q, \alpha_j) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i"] & (E_q, \alpha_q) \arrow[d, equal] \\
(\bar{H}^0_q, \alpha_q) \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "p_{0;jq}"] & (E_q, \alpha_q) \arrow[d, "p_{jq}"] \\
(\bar{H}^0_j, \alpha_j) \arrow[r, "i_1"'] & (E_j, \alpha_j).
\end{tikzcd}$$

QED.

Si l'espace fibré ξ_{0q} est donné, parfois on peut choisir convenablement le sous-groupe H_j, donc les espaces fibrés ξ_{0j} et ξ_{jq}. Il faut voir quelles sont les conséquences du théorème 2, quand le raffinement $(\xi_{0q} : \xi_{0j}, \xi_{jq})$ est particulier. Nous avons :

Corollaire 1. *Si le groupe H_j est simplement connexe alors $\forall n \geqslant 0$, $p_{0;jq*} : \pi_n(\bar{H}^0_q, \alpha_q) \to \pi_n(H^0_j, \alpha_j)$ est un isomorphisme et les suites d'homotopies des espaces fibrés ξ_{0q}, ξ_{0j} sont isomorphes.*

Corollaire 2. *Si l'espace quotient H^0_j est simplement connexe alors $\forall n \geqslant 0$, $i_* : \pi_n(\bar{H}^j_q, \alpha_q) \to \pi_n(\bar{H}^0_q, \alpha_q)$ est un isomorphisme et les suites d'homotopies des espaces fibrés ξ_{jq} et ξ_{0q} sont isomorphes.*

Corollaire 3. *Si l'espace quotient E_j est simplement connexe alors $\forall n \geqslant 0$, $i_{2*} : \pi_n(\bar{H}^j_q, \alpha_q) \to \pi_n(E_q, \alpha_q)$ et $d_{1*} : \pi_{n+1}(E_0, \alpha_0) \to \pi_n(H^0_j, \alpha_q)$ sont des isomorphismes. La suite d'homotopies de l'espace fibré ξ_{0q} est isomorphe à une suite constituée par les groupes d'homotopies de $\tilde{\omega}_{0;jq}$. Plus précisément :*

$$\begin{tikzcd}
\xi_{0q} : \arrow[r] & \pi_{n+1}(E_q, \alpha_q) \arrow[r, "p_{0q*}"] \arrow[d, "j_{2*}^{-1}"] & \pi_{n+1}(E_0, \alpha_0) \arrow[r, "d_{0*}"] \arrow[d, "d_{1*}"] & \pi_n(H^0_q, \alpha_q) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & \pi_n(E_q, \alpha_q) \arrow[r] \arrow[d, "j_{2*}^{-1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & \pi_{n+1}(\bar{H}^j_q, \alpha_q) \arrow[r, "d_{1*}\circ i_{2*}"] & \pi_n(\bar{H}^0_j, \alpha_j) \arrow[r, "d_{0*}\circ d_{1*}^{-1}"] & \pi_n(H^0_q, \alpha_q) \arrow[r, "i_{2*}^{-1}\circ i_{0*}"] & \pi_n(\bar{H}^j_q, \alpha_q) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

On peut obtenir aussi d'autres conséquences immédiates du théorème 2, en considérant tour à tour les propriétés possibles des homomorphismes des suites d'homotopies de l'espace fibré ξ_{0j} et ξ_{jq}. Par exemple :

Corollaire 4. *Si l'homomorphisme i_{2*} est une surjection, alors l'homomorphisme p_{0q*} est trivial, i_{0*} est une surjection et d_{0*} est une injection.*

Le second problème que nous étudierons est celui du relèvement des applications continues. Nous ferons les observations immédiates suivantes :

Observation 4. Si l'application continue $f : X \to E_j$ (X est un espace topologique donné) a un relèvement relatif à l'espace fibré ξ_{jk}, alors l'application f a un relèvement relatif à n'importe quel espace fibré $\xi_{j,l}$, $j < l < k$.

S'il est donné une surjection continue $p : E \to B$, on dit que *le problème du relèvement relatif à p a solution* si pour n'importe quelle application continue $f : X \to B$, il existe au moins un relèvement de f.

Observation 5. Si le problème du relèvement relatif à n'importe quel espace fibré $\xi_{h,h+1}$, $j \leqslant h < k$ a solution alors ce problème a solution aussi pour ξ_{jk}.

Il en résulte que pour résoudre le problème du relèvement relatif à ξ, on peut essayer de choisir une suite $\mathfrak{N}$ de sorte que pour les espaces $\xi_{j\,j+}$ la oslution de ce problème soit plus facile.

Le troisième problème que nous abordons concerne la trivialité de ξ.

Définition 2. *Soit la structure* $(\xi, \mathfrak{N})$. *L'espace fibré* ξ *est totalement trivial par rapport à la suite* $\mathfrak{N}$, *si tous les espaces fibrés principaux* ξ_{jq} $0 \leqslant j < q$ *sont triviaux.*

Observation 6. Si l'espace fibré principal ξ est totalement trivial par rapport à la suite $\mathfrak{N}$ alors tous les espaces fibrés ξ_{jk}, $0 \leqslant j < k \leqslant q$ ont des sections globales.

Observation 7. Afin que l'espace fibré principal ξ soit totalement trivial par rapport à la suite $\mathfrak{N}$ il est nécessaire et suffisant que les espaces fibrés $\xi = \xi_{0q}$ et $\xi_{j\,j+1}$, $0 \leqslant j < q$ aient des sections globales.

Théorème 3. *Si l'espace fibré principal* ξ *est totalement trivial par rapport à la suite* $\mathfrak{N}$ *alors pour n'importe quel* E_j $0 \leqslant j \leqslant q$, *est homéomorphe à* $E_0 \times H_1^0 \times \ldots \times H_j^{j-1}$ *et* H_j^0 *est homéomorphe à* $H_1^0 \times \ldots \times H_j^{j-1}$.

Démonstration. Dans l'hypothèse que l'espace fibré principal est totalement trivial par rapport à la suite $\mathfrak{N}$, il existe un système de sections globales $\sigma_{qj} : E_j \to E_q$, $j = 0,\ldots, q-1$ et les homéomorphismes correspondants $f_j : (\alpha_j, a_j) \in E_j \times H_q^j \to \sigma_{qj}(\alpha_j)a_j \in E_q$.

Nous démontrerons le théorème par induction relative au nombre j. Nous établirons que pour $j = 1$, E_1 est homéomorphe à $E_0 \times H_1^0$. En effet en utilisant l'homéomorphisme $f_1^{-1} \circ f_0 : E_0 \times H_q^0 \to E_1 \times H_q^1$ on obtient $f_0(\alpha_0 \times H_q^0) = p_{0q}^{-1}(\alpha_0) = (p_{01} \circ p_{1q})^{-1}(\alpha_0) = p_{1q}^{-1}(p_{01}^{-1}(\alpha_0)) = f_1(p_{01}^{-1}(\alpha_0) \times H_q^1)$. Mais la structure de trivialisation locale de ξ_{01} implique l'existence d'un homéomorphisme $g_1 : p_{01}^{-1}(\alpha_0) \to H_1^0$ donc nous avons les homéomorphismes $g_1^{-1} \times 1_{H_q^1} : H_1^0 \times H_q^1 \to p_{01}^{-1}(\alpha_0) \times H_q^1$, $f_0^{-1} \circ f_1 : p_{01}^{-1}(\alpha_0) \times H_q^1 - H_q^0$. Il s'ensuit qu'il existe les homéomorphismes: $E_0 \times H_1^0 \times H_q^1 \xrightarrow{1_{E_0} \times (f_0^{-1} \circ f_1) \circ (g_1^{-1} \times 1_{H_1^0})} E_0 \times H_q^0 \xrightarrow{f_1^{-1} \cdot f_0} E_1 \times H_q^1$ ce qui implique (en fixant un élément de H_q^1) l'homéomorphisme $E_0 \times H_1^0 \to E_1$. Donc les propriétés du théorème sont verifiées pour $j = 1$.

Supposons que pour $j = h - 1$ les propriétés sont vérifiées, donc E_{h-1} est homéomorphe à $E_0 \times H_1^0 \times \ldots \times H_{h-1}^{h-2}$ et H_{h-1}^0 est homéomorphe à $H_1^0 \times \ldots \times H_{h-1}^{h-2}$. Mais en répétant pas à pas la démonstration faite pour $j = 1$ on obtient : E_h est homéomorphe à $E_{h-1} \times H_h^{h-1}$, H_q^{h-1} est homéomorphe à $H_q^{h-1} \times H_q^h$ et de plus $H_{h-1}^0 \times H_q^{h-1}$ et $H_h^0 \times H_q^h$ sont homéomorphes à H_q^0 Il en résulte : E_h est homéomorphe à $E_0 \times H_1^0 \times \ldots \times H_h^{h-1}$ et $H_h^0 \times H_q^h$ est homéomorphe à $H_{h-1}^0 \times H_q^{h-1}$. Mais le dernier espace est homéomorphe à $H_{h-1}^0 \times$

$\times H_h^{h-1}$ donc à $H_1^0 \times \ldots \times H_{h-1}^{h-2} \times H_h^{h-1}$. Les propriétés sont donc établies aussi pour $j = h$. QED.

Si l'on considère les structures différentiables des espaces fibrés ξ_{jk} alors tous les homéomorphismes construits dans le théorème 3 sont aussi des difféomorphismes.

Corollaire 1. *Si l'espace fibré principal* ξ *est totalement trivial par rapport à* $\mathfrak{N}$ *alors pour chaque* j *et* n, $1 \leqslant j \leqslant q$, $n \geqslant 0$, $\pi_n(E_j, \alpha_j)$ *est isomorphe à* $\pi_n(E_0, \alpha_0) \oplus \pi_n(H_1^0, a_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(H_j^{j-1}, a_j)$ *et* $\pi_n(H_j^0, b_j)$ *est isomorphe à* $\pi_n(H_0^1, a_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(H_j^{j-1}, a_j)$. ([2], p. 203, th. 2.1).

Observation 8. L'espace fibré ξ a le groupe structural réductible au sous-groupe H_j si et seulement si l'espace fibré ξ_{0j} a une section globale ([3], vol. I, p. 57, prop. 5.6).

§ 4. **Propriétés géométriques des raffinements.** Considérons la terne $(\xi_{0q}\,;\ \xi_{0j},\ \xi_{jq})$, c'est-à-dire le raffinement de ξ_{0q} par rapport au sous-groupe H_j. Nous noterons par $\gamma_{0q} = \{\Gamma_{0q}\}$ et $\gamma_{jq} = \{\Gamma_{jq}\}$ les ensembles des connexions infinitésimales définies sur ξ_{0q}, respectivement sur ξ_{jq}. Une connexion Γ_{0q} ou Γ_{jq} peut être définie par une distribution horizontale $\Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ respectivement $\Delta^H_{\Gamma_{jq}}$, ou par une 1-forme différentielle à valeurs dans l'algèbre Lie g_0 de H_0, respectivement dans l'algèbre Lie g_j de H_j. Ces 1-formes seront notées par $\omega_{\Gamma_{0q}}$, respectivement par $\omega_{\Gamma_{jq}}$. Pour une connexion $\Gamma_{jq} \in \gamma_{jq}$ nous considérons la distribution $\Delta^H_{\Gamma_{jq}} \cap \Delta^V_{0q}$ de E_q.

Observation 9. Nous avons :

$$p'_{jq}(\Delta^H_{\Gamma_{jq}} \cap \Delta^V_{0j}) = \Delta^V_{0j}, \tag{24}$$

$$\forall a \in H_j \mid R'_a(\Delta^H_{\Gamma_{jq}} \cap \Delta^V_{0q}) = \Delta^H_{\Gamma_{jq}} \cap \Delta^V_{0q}. \tag{25}$$

Définition 3. *Deux connexions arbitraires* Γ_{jq}, $\Gamma'_{jq} \in \gamma_{jq}$ *sont équivalentes si*

$$\Delta^H_{\Gamma_{jq}} \cap \Delta^V_{0q} = \Delta^H_{\Gamma'_{jq}} \cap \Delta^V_{0q}. \tag{26}$$

Nous noterons la classe d'équivalence définie par Γ_{jq} *avec* $\overline{\Gamma}_{jq}$. *La distribution* $\Delta^H_{\Gamma_{jq}} \cap \Delta^V_{0q}$ *sera notée par* $\overline{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}}$

Observation 10. Deux connexions Γ_{jq} et Γ'_{jq} sont équivalentes si et seulement si $\forall X_\alpha \in \Delta^V_{0q} \mid \omega_{\Gamma_{jq}}(X_\alpha) = \omega'_{jq}(X_\alpha)$.

En tenant compte du fait que $g_j \subset g_0$, on peut choisir une base $A_1,\ldots, A_{r_j},\ldots, A_{r_0}$ de g_0 de sorte que $A_1,\ldots, A_{r_0}$ soit une base de g_j. Alors en utilisant le monomorphisme $\sigma : g_0 \to \mathfrak{X}(E_q)$ ([3], vol. I, p. 42), $\mathfrak{X}(E_q)$ est l'algèbre des champs de vecteurs tangents à E_q) pour la 1-forme $\omega_{\Gamma_{jq}}$ qui définit la connexion $\Gamma_{jq} \in \gamma_{jq}$, nous aurons $\omega_{\Gamma_{jq}}(\sigma(A_i)) = A_i$, $i = 1,\ldots, r_j$,

$\omega_{\Gamma_{jq}}(\sigma(A_a)) = f_a^i A_i$, $a = r_j + 1, \ldots, r_0$; $i = 1, \ldots, r_j$ où f_a^i sont des fonctions définies sur E_q, à valeurs réelles.

Observation 11. Si la base $A_1, \ldots, A_{r_0}$ de g_0 est choisie de la manière indiquée ci-dessus, alors deux connexions Γ_{jq} et $\Gamma'_{jq} \in \gamma_{jq}$ sont équivalentes si et seulement si $\forall \alpha \in E_q \mid f_a^i(\alpha) = f'^i_a(\alpha)$. De plus nous avons

$$\forall a \in H_j \mid f_a^i(\alpha a) = \tilde{a}_a^b f_b^i(\alpha) a_j^i - \tilde{a}_a^b a_b^i. \tag{27}$$
$$i, j = 1, \ldots, r_j;\ a, b = r_j + 1, \ldots, r_0,$$

où la matrice (a_v^u), $u, v = 1, \ldots, r_0$ est déterminée par la base $A_1, \ldots, A_{r_0}$, elle étant la matrice de l'automorphisme linéaire adjoint, défini par l'élément $a^{-1} \in H_j$ sur g_0. Dans la matrice (a_v^u) nous avons $a_i^a = 0$ et $\det(a_j^i) \cdot \det(a_b^i) \neq 0$. $(\tilde{a}_b^a)$ est l'inverse de la matrice (a_b^a).

Considérons un espace fibré principal différentiable $\xi(E, B, p, G, \mathcal{A})$, une sous-variété $M \subset B$ et une connexion infinitésimale Γ de ξ. Alors on peut définir l'espace fibré principal, différentiable $\xi \mid M(p^{-1}(M), M, p \mid p^{-1}(M), G; \mathcal{A} \mid M))$ où l'atlas de trivialisation $\mathcal{A} \mid M$ est défini par $\mathcal{A}$ de la manière suivante : si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ alors la carte locale (U', φ') où $U' = U \cap M$ et φ' est le difféomorphisme $\varphi \mid U' \times G$, est une carte de trivialisation de $\mathcal{A} \mid M$. La connexion Γ définira une connexion unique $\Gamma \mid M$, définie sur $\xi \mid M$, nommée „la connexion induite de Γ sur $\xi \mid M$". Si Γ est définie par la distribution horizontale Δ^H de E, alors $\Gamma \mid M$ sera définie par la distribution $\Delta \cap T(p^{-1}(M))$.

Observation 12. Deux connexions Γ_{jq}, $\Gamma'_{jq} \in \gamma_{jq}$ sont équivalentes si et seulement si $\forall \alpha_0 \in E_0$ les connexions $\Gamma_{jq} \mid p_{0j}^{-1}(\alpha_0)$ et $\Gamma'_{jq} \mid p_{0j}^{-1}(\alpha_0)$, induites par Γ_{jq}, respectivement par Γ'_{jq} sur $\xi_{jq} \mid p_{0j}^{-1}(\alpha_0)$ coïncident.

Théorème 4. *Soit une classe d'équivalence $\bar{\Gamma}_{jq} \subset \gamma_{jq}$. Alors il existe une application $h_\Delta : \Gamma_{0q} \in \gamma_{0q} \to h_\Delta(\Gamma_{0q}) \in \bar{\Gamma}_{jq}$, la distribution horizontale de $h_\Delta(\Gamma_{0q})$ étant définie par la relation $\Delta^H_{h_\Delta(\Gamma_{0q})} = \bar{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}} \oplus \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$.*

Si $X \in \mathfrak{X}(E_q)$ est le relèvement horizontal par rapport à Γ_{0q} d'un champ vectoriel Y de E_0, alors X est aussi le relèvement horizontal par rapport à $h_\Delta(\Gamma_{0q})$ d'un champ vectoriel Y' de E_j. De plus $p'_{0j}(Y') = Y$.

Si l'arc différentiable par segments, $c \in E_q^I$ est le relèvement horizontal par rapport à la connexion Γ_{0q} d'un arc différentiable par segments $c_1 \in E_0^I$, alors c est aussi le relèvement horizontal, par rapport à la connexion $h_\Delta(\Gamma_{0q})$, de l'arc $c_2 = p_{jq} \circ c \in E_j^I$.

Pour les groupes d'holonomies relatifs au point $\alpha_q \in E_q$ nous avons la relation

$$\Phi_{h_\Delta(\Gamma_{0q})}(\alpha_q) \supset H_j \cap \Phi_{\Gamma_{0q}}(\alpha_q). \tag{28}$$

Démonstration. En tenant compte du fait que $\bar{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}} \subset \Delta^V_{0q}$, il résulte que $\bar{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}} \cap \Delta^H_{\Gamma_{0q}} = 0$ donc $\bar{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}} \oplus \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ est une distribution de E_q. La relation (25) et la relation $\forall a \in H_0 \mid R'_a(\Delta^H_{\Gamma_{0q}}) = \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ impliquent la relation $\forall a \in H_j \mid R'_a(\bar{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}} \oplus \Delta^H_{\Gamma_{0q}}) = \bar{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}} \oplus \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ donc $\bar{\Delta}^H_{\Gamma_{jq}} \oplus \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ définira une connexion infinitésimale de ξ_{jq}, la correspondante de Γ_{0q} par h_Δ.

La condition nécessaire et suffisante afin que $X \in \mathfrak{X}(E_q)$ soit le relèvement horizontal par rapport à Γ_{0q} d'un champ vectoriel de E_0 est que $X \subset \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ et $\forall a \in H_0 \mid R'_a X = X$. Mais ces conditions impliquent évidemment $X \subset \Delta^H_{h_\Delta(\Gamma_{0q})}$ et $\forall a \in H_j \mid R'_a X = X$, donc X est aussi le relèvement horizontal par rapport à $h_\Delta(\Gamma_{0q})$ d'un champ vectoriel de E_j. Nous noterons $Y = p'_{0q}(X)$ et $Y' = p'_{jq}(X)$, et la seconde proposition du théorème 4 est vérifiée.

La troisième proposition est une conséquence immédiate de la définition de l'application h_Δ et de l'existence et de l'unicité du relèvement horizontal d'un arc donné. La relation (28) est une conséquence immédiate de cette troisième proposition. QED.

Observation 13. Entre l'ensemble de classes d'équivalence de γ_{jq} et l'ensemble des distributions $\{\Delta\}$ de E_q, satisfaisant aux conditions

$$\Delta^V_{0q} = \Delta \oplus \Delta^V_{jq},\quad \Delta \cap \Delta^V_{jq} = 0;\quad \forall a \in H_j \mid R'_a(\Delta) = \Delta, \tag{29}$$

il existe une bijection. Cette bijection fait correspondre à la classe $\bar{\Gamma}_{jq}$ la distribution $\Delta^V_{0q} \cap \Delta^H_{\Gamma_{jq}}$.

Observation 14. ([3], vol. I, p. 87). A chaque connexion $\Gamma_{0q} \in \gamma_{0q}$, définie par la distribution horizontale $\Delta^H_{\Gamma_{0q}}$, nous associerons une distribution $\Delta^*_{\Gamma_{0q}}$ de E_j, de sorte que $\Delta^V_{0j} \oplus \Delta^*_{\Gamma_{0q}} = T(E_j)$, $\Delta^V_{0j} \cap \Delta^*_{\Gamma_{0q}} = 0$, définie par la relation

$$\Delta^*_{\Gamma_{0q}} = p'_{jq}(\Delta^H_{\Gamma_{0q}}). \tag{30}$$

L'application $p'_{jq} \mid \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ est injective.

Définition 4. *Deux connexions arbitraires Γ_{0q}, $\Gamma'_{0q} \in \gamma_{0q}$ sont équivalentes si $\Delta^*_{\Gamma_{0q}} = \Delta^*_{\Gamma'_{0q}}$. La classe d'équivalence définie par Γ_{0q} sera notée par Γ^*_{0q}.*

Soient $\mathcal{F}\mathcal{V}(E_q, \Delta^H_{\Gamma_{0q}})$, $\mathcal{F}\mathcal{V}(E_q, \Delta^V_{0q})$ les espaces fibrés vectoriels définis sur E_q par les distributions $\Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ et Δ^V_{jq}. Nous noterons par T un homomorphisme arbitraire de $\mathcal{F}\mathcal{V}(E_q, \Delta^H_{\Gamma_{0q}})$ à $\mathcal{F}\mathcal{V}(E_q, \Delta^V_{jq})$ qui induit sur la variété base E_q l'application identique. Nous avons :

Théorème 5. *L'ensemble* Γ^*_{0q} *peut être mis en correspondance bijective avec l'ensemble* $\{T\}$ *des homomorphismes* $T : \mathcal{F}\mathcal{P}(E_q, \Delta^H_{\Gamma_{0q}}) \to \mathcal{F}\mathcal{P}(E_q, \Delta^V_{jq})$ *qui satisfont à la condition*

$$\forall a \in H_0 \mid R'_a \cdot T = T \cdot R'_a. \tag{31}$$

Démonstration. Soit Γ'_{0q} un élément arbitraire de Γ^*_{0q}. A l'aide de Γ'_{0q} nous définirons un homomophisme $T_{\Gamma'_{0q}}$, satisfaisant à la relation (31).

Mettons : $\forall X_{\alpha_q} \in \Delta^H_{\Gamma_{0q}}(\alpha_q) \mid T_{\Gamma'_{0q}}(X_{\alpha_q}) = Y_{\alpha_q} \in \Delta^V_{jq}(\alpha_q)$, où Y_{α_q} est défini de la manière suivante : En tenant compte du fait que Γ_{0q} et Γ'_{0q} sont équivalentes $(p'_{jq}(\Delta^H_{\Gamma_{0q}}) = p'_{jq}(\Delta^H_{\Gamma'_{0q}}))$ et que les applications $p'_{jq} \mid \Delta^H_{\Gamma_{0q}}$ et $p'_{jq} \mid \Delta^H_{\Gamma'_{0q}}$ sont injectives, il en résulte qu'il existe un $X'_{\alpha_q} \in \Delta^H_{\Gamma'_{0q}}$ unique de sorte que $p'_{jq}(X_{\alpha_q}) = p'_{jq}(X'_{\alpha_q})$ (X'_{α_q} est aussi le relèvement horizontal de $p'_{0q}(X_{\alpha_q})$ par rapport à la connexion Γ'_{0q}). Nous mettrons $Y_{\alpha_q} = X'_{\alpha_q} - X_{\alpha_q}$. Evidement $Y_{\alpha q} \in \Delta^V_{jq}$.

L'application $T_{\Gamma'_{0q}} \mid \Delta^H_{\Gamma_{0q}}(\alpha_q)$ est linéaire.

$$(X_{\alpha_q} + X^1_{\alpha_q}) \in \Delta^H_{\Gamma_{0q}} \xrightarrow{(p'_{jq} \mid \Delta^H_{\Gamma'_{0q}})^{-1} \circ (p'_{jq} \mid \Delta^H_{\Gamma_{0q}})} X'_{\alpha_q} + X'^1_{\alpha_q} \in \Delta^H_{\Gamma'_{0q}}$$

$$T_{\Gamma'_{0q}}(X_{\alpha_q} + X^1_{\alpha_q}) = X'_{\alpha_q} + X'^1_{\alpha_q} - (X_{\alpha_q} + X^1_{\alpha_q}) = T_{\Gamma'_{0q}}(X_{\alpha_q}) + T_{\Gamma'_{0q}}(X^1_{\alpha_q}), \text{ etc.}$$

Elle est donc un homomorphisme de $\mathcal{F}\mathcal{P}(E_q, \Delta^H_{\Gamma_{0q}})$ en $\mathcal{F}\mathcal{P}(E_q, \Delta^V_{jq})$. L'application $T_{\Gamma'_{0q}}$ satisfait à la condition (31). En effet :

$$\forall X_\alpha \in \Delta^H_{\Gamma_{0q}}(\alpha_q) \mid TR'_a(X'_{\alpha_q}) = R'_a(X'_{\alpha q}) - R'_a(X_{\alpha_q}) = R'_a(X'_{\alpha_q} - X_{\alpha_q}) = R'_a T(X_{\alpha_q}).$$

L'application $\Gamma'_{0q} \in \Gamma^*_{0q} \to T_{\Gamma'_{0q}}$ est injective. Si pour les connexions Γ'_{0q} et $\Gamma''_{0q} \in \Gamma^*_{0q}$ nous avons $T_{\Gamma'_{0q}} = T_{\Gamma''_{0q}}$ alors $\forall X_{\alpha_q} \in \Delta^H_{\Gamma_{0q}}(\alpha_q) \mid X'_{\alpha_q} = X_{\alpha_q} + Y_{\alpha_q} = X''_{\alpha_q}$ d'où il résulte $\Delta^H_{\Gamma'_{0q}} = \Delta^H_{\Gamma''_{0q}}$ car deux vecteurs qui ont la même projection en p_{0q} coïncident. L'application définie ci-dessus de Γ^*_{0q} en $\{T\}$ est surjective. Pour un homomorphisme arbitraire T qui satisfait à la condition (31) l'ensemble $\{X_{\alpha_q} + T(X_{\alpha_q}) \mid X_{\alpha_q} \in \Delta^H_{\Gamma_{0q}}\}$ définit une connexion Γ'_{0q} de sorte que $T = T_{\Gamma'_{0q}}$. QED.

Nous allons considérer maintenant les deux structures spéciales suivantes :

a) *Le raffinement de* ξ_{0q} *défini par le sous-groupe* H_j, $(\xi_{0q} ; \xi_{0j}, \xi_{jq})$, *en supposant de plus qu'il existe et qu'il est donné une section globale* $\sigma_j : E_0 \to E_j$ *de* ξ_{0j}. Nous avons :

Observation 15. En identifiant à l'aide du difféomorphisme $p_{0j} \mid \sigma_{j0}(E_0)$ la variété $\sigma_{j0}(E_0)$ à E_0, l'espace fibré principal $\xi_{jq} \mid \sigma_{j0}(E_0)$ est une réduction de ξ_{0q} ([3], vol. I, p. 53) définie à l'aide du sous-groupe H_j.

Pour la structure considérée maintenant nous avons trois ensembles, non vides en vertu du théorème 2.1 de [3], vol. I, p. 67, de connexions infinitésimales : L'ensemble $\gamma_{0q} = \{\Gamma_{0q}\}$ des connexions définies sur ξ_{0q}, l'ensemble $\gamma_{jq} = \{\Gamma_{jq}\}$ des connexions définies sur ξ_{jq} et l'ensemble $\gamma^\sigma_{jq} = \{\Gamma^\sigma_{jq}\}$ des connexions définies sur $\xi_{jq} \mid \sigma_{j0}(E_0)$. Il existe une injection naturelle $h : \Gamma^\sigma_{jq} \in \gamma^\sigma_{jq} \to h(\Gamma^\sigma_{jq}) \in \gamma_{0q}$, la connexion $h(\Gamma^\sigma_{jq})$ étant la connexion qui a comme connexion réduite la connexion Γ^σ_{jq}. Im $h \subset \gamma_{0q}$ est l'ensemble des connexions qui peuvent être réduites par rapport à $\xi_{jq} \mid \sigma_{j0}(E_0)$. En choisissant une distribution Δ de E_q, satisfaisant aux conditions (29), nous considérerons l'injection $h_\Delta : \gamma_{0q} \to \Gamma_{jq}$ définie dans le théorème 4 et l'application $h_{\sigma\Delta} : \bar{\Gamma}_{jq} \to \gamma^\sigma_{jq}$ où $h_{\sigma\Delta}(\Gamma_{jq})$ est la connexion induite de Γ_{jq} sur $\xi_{jq} \mid \sigma_{j0}(E_0)$. Nous avons :

Théorème 6. *Nous avons :*

$$h_{\sigma\Delta} \circ h_\Delta \circ h = 1_{\gamma^\sigma_{jq}}. \tag{32}$$

L'application $h_{\sigma\Delta}$ *est surjective. L'application* $h_{\sigma\Delta} \mid h_\Delta(\mathrm{Im}\, h)$ *est bijective.*

Démonstration. Pour vérifier la relation (32) il faut considérer une connexion arbitraire $\Gamma^\sigma_{jq} \in \gamma^\sigma_{jq}$, définie à l'aide d'une distribution horizontale Δ^H de $p^{-1}_{jq}(\sigma_{j0}(E_0))$. Alors $h(\Gamma^\sigma_{jq})$ est la connexion de ξ_{0q} qui a comme connexion réduite la connexion Γ^σ_{jq}. La distribution horizontale de la connexion $h(\Gamma^\sigma_{jq})$ est déterminée à l'aide des translations à droite de E_q, définies par les éléments de $H_0 \cdot h_\Delta(h(\Gamma^\sigma_{jq}))$ est la connexion de ξ_{jq} dont la distribution horizontale est déterminée par la paire Δ et la distribution horizontale de $h(\Gamma^\sigma_{jq})$. Évidemment, il suit que $h_{\sigma\Delta}(h_\Delta(h(\Gamma^\sigma_{jq}))) = \Gamma^\sigma_{jq}$, donc la relation (32) est vérifiée.

A l'aide de (32) nous vérifierons les deux autres propositions du théorème. En effet, pour un élément arbitraire $\Gamma^\sigma_{jq} \in \gamma^\sigma_{jq}$ nous avons $h_{\sigma\Delta} : \Gamma_{jq} \in \bar{\Gamma}_{jq} \to \Gamma^\sigma_{jq} \in \gamma^\sigma_{jq}$ où $\Gamma_{jq} = h_\Delta(h(\Gamma^\sigma_{jq}))$, donc l'application $h_{\sigma\Delta}$ est surjective. La restriction de $h_{\sigma\Delta}$ sur $h_\Delta(\mathrm{Im} h)$ est bijective car sur cet ensemble nous avons la relation $h_{\sigma\Delta} = h^{-1} \circ h_\Delta^{-1}$. QED.

Observation 16. La surjection $h_{\sigma\Delta}$ définit sur $\bar{\Gamma}_{jq} \subset \gamma_{jq}$ la relation d'équivalence : $\Gamma_{jq} \sim \Gamma'_{jq} \Leftrightarrow h_{\sigma\Delta}(\Gamma_{jq}) = h_{\sigma\Delta}(\Gamma'_{jq})$, ou également, le relèvement horizontal par rapport à la connexion Γ_{jq} ou Γ'_{jq} de la distribution

de E_j, définie sur $\sigma_{j0}(E_0)$ par les espaces tangents à $\sigma_{j0}(E_0)$, est le même. En chaque classe d'équivalence définie ci-dessus il y a une connexion unique Γ_{jq} de ξ_{jq}, image en h_Δ d'une connexion réductible de ξ_{0q}.

b) *Le raffinement de ξ_{0q} défini par le sous-groupe H_j, $(\xi_{0q}; \xi_{0j}, \xi_{jq})$, en supposant en plus que H_j est diviseur normal de H_0.* Dans ce cas-là ξ_{0j} est un espace fibré principal ayant pour groupe structural le groupe H_j^0.

Lemme 4. *Nous avons*

$$\forall a \in H_0 \mid p_{jq} \circ R_a = R_{p0;jq}(a) \circ p_{jq}. \tag{33}$$

Démonstration. Nous utiliserons la définition suivante de la translation à droite : Si $\xi = (E, B, p, G; \mathcal{A})$ est un espace fibré principal et $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ est une carte locale de trivialisation, alors la translation à droite R_a sera définie par la relation $R_a\alpha = \varphi(p(\alpha), \varphi^{-1}_{p(\alpha)}(\alpha)a)$ où $\varphi^{-1}_{p(\alpha)} : p^{-1}(p(\alpha)) \to G$ est le difféomorphisme déterminé par $\varphi : p(\alpha) \times G \to p^{-1}(p(\alpha))$.

Nous aurons : $\forall \alpha \in E_q \mid p_{jq}(R'_a(\alpha)) = \varphi_{U;j}(x, p_{0;jq}((\varphi^{-1}_{U|p_{0q}(\alpha)}(\alpha))a))$ et $R'_{p_{0;j(q)}} p_{jq}(\alpha) = \varphi_{U;j}(x, \varphi^{-1}_{U;j|p_{0j}(p_{jq}(\alpha))}(p_{jq}(\alpha))) \cdot p_{0;jq}(a)$. Mais $p_{0;jq}((\varphi^{-1}_{U|p_{jq}(\alpha)}(\alpha))a) = baH_j$ et $\varphi^{-1}_{U;j|p_{0q}(\alpha)}(p_{jq}(\alpha))\, p_{0;jq}(\alpha) = (\varphi^{-1}_{U;j|p_{0q}(\alpha)}(\alpha H_j)) \cdot aH_j = bH_j \cdot aH_j = baH_j$ où nous avons noté $\varphi^{-1}_{U|p_{0j}(\alpha)}(\alpha) = b$ et nous avons utilisé le diagramme (14). Il en résulte l'égalité (33). QED.

A côté des ensembles des connexions infinitésimales γ_{0q}, γ_{jq}, définies sur ξ_{0q}, respectivement sur ξ_{jq}, on considérera l'ensemble γ_{0j} des connexions définies sur ξ_{0j}.

Observation 17. En vertu de (33) la paire $(p_{jq}, p_{0;jq})$ définit un homomorphisme de ξ_{0q} sur ξ_{0j} ([3], vol. I, p. 53). Cet homomorphisme détermine une application p^*_{jq} de γ_{0q} à γ_{0j} (voir [3], vol. I, p. 79, propriété 6.1) de sorte que la distribution horizontale de $p'_{jq}(\Gamma_{0q})$ soit l'image en p'_{jq} de la distribution horizontale de Γ_{0q}.

Théorème 7. *L'application $p^*_{jq} : \gamma_{0q} \to \gamma_{0j}$ est une surjection.*

Démonstration. Considérons une connexion arbitraire $\Gamma_{0j} \in \gamma_{0j}$ dont la distribution horizontale est Δ. Soit $\mathfrak{D} = \{D\}$ un recouvrement ouvert, localement fini de E_0, de sorte que les ensembles D soient des zones de trivialisation de ξ_{0q} et ξ_{0j} et soit $\{f_D\}$ une partition de l'unité adjointe à $\mathfrak{D}$. Par u nous noterons un ouvert donné de H_j^0, zone de trivialisation de $\tilde{\omega}_{0;jq}$, (16), de sorte que $p_{0;jq}(e) = e_j \in u$, où e est l'élément unité de H_0.

A l'aide du diagramme (14) et des relations (19) et (20), à chaque ensemble $D \in \mathfrak{D}$ nous associerons l'ensemble $D_{ju} = \varphi_{D;j}(D \times u)$ qui est une zone de trivialisation de ξ_{jq} et les sections locales de ξ_{0q} et ξ_{0j}, définies sur D :

$$\forall \alpha_0 \in D \mid \sigma_{j0}(\alpha_0) = \varphi_{D;j0}(\alpha_0, e) = \varphi_{D;j}(\alpha_0, e_j) \tag{34}$$

$$\forall \alpha_0 \in D \mid \sigma_{j0}(\alpha_0) = \varphi_{D;j0}(\alpha_0, e_j) = \varphi_{D;j}(\alpha_0, e_j). \tag{35}$$

Du diagramme (14) il résulte $p_{jq} \circ \sigma_{q0} = \sigma_{j0}$ et $\forall \alpha_j \in D_{ju}$ il existe un $a_j \in u \subset H_j^0$, (a_j est unique) de sorte que $\sigma_{j0}(p_{0j}(\alpha_j))a_j = \alpha_j$.

Nous introduirons la section locale $\sigma_{qj} : D_{ju} \to E_q$ définie par : $\forall \alpha_j \in D_{ju} \mid \sigma_{qj}(\alpha_j) = \varphi_{D;qj}(\alpha_j, e)$. Nous avons $\sigma_{qj} \circ \sigma_{j0} = \sigma_{q0}$ et $p_{0q} \circ \sigma_{qj} = p_{0j}$.

On peut prouver aussi que

$$\forall \alpha_0 \in D,\ a_j \in u \mid \exists a \in H_0,\ a \text{ est unique} \Rightarrow \sigma_{qj} \circ R_{aj} \circ \sigma_{j0} = R_a \circ \sigma_{qj} \circ \sigma_{j0}. \tag{36}$$

Considérons à présent les distributions Δ^V_{0j} et $\Delta^H_{\Gamma_{0j}}$. L'injection σ_{qj} définie sur D_{jq} définira sur $\sigma_{qj}(D_{jq}) \subset E_q$ deux distributions $\bar{\Delta}^V_{0j}$ et $\bar{\Delta}^H_{\Gamma_{0j}}$, les correspondantes de Δ^V_{0j} et $\Delta^H_{\Gamma_{0j}}$ en σ'_{qj}. En vertu de (36) la distribution $\bar{\Delta}^H_{0j}$ est invariante aux translations à droite et correspond en p'_{jq} à $\Delta^H_{\Gamma_{0j}}$. Elle définira sur $p^{-1}_{jq}(D_{jq})$ une connexion infinitésimale Γ^u_{D0q} de ξ_{0q} de sorte que $p^*_{jq}(\Gamma^u_{D0q}) = \Gamma_{0j} \mid D_{jq}$. En utilisant les translations R_a de ξ_{0q}, $(\forall a \in H_0)$, la connexion infinitésimale Γ^u_{D0q} définie sur $p^{-1}_{0q}(D_{jq})$, déterminera une connexion infinitésimale Γ^u_{D0q} définie sur $p^{-1}_{pq}(D)$. En vertu des relations (33) il résulte $p^*_{jq}(\Gamma_{D0q}) = \Gamma_{0j} \mid p^{-1}_{0j}(D)$. Nous noterons par $\Delta^H_{\Gamma_{D0q}}$ la distribution horizontale de Γ_{D0q}.

A l'aide de la partition de l'unité adjointe à $\mathfrak{D}$, nous définirons les fonctions $F_D = f_D \circ p_{jq}$, $(\forall D \in \mathfrak{D})$. Ces fonctions nous permettront de définir une connexion infinitésimale Γ_{0q} de ξ_{0q} de sorte que $p^*_{jq}(\Gamma_{0q}) = \Gamma_{0j}$. La distribution horizontale de Γ_{0q} sera définie de la manière suivante : Soit $\bar{X}_{D\alpha_q}$ le relèvement horizontal du vecteur $X_{p_{0q}(\alpha_q)} \in T_{p_{0q}(\alpha_q)}(E_0)$, dans le point α_q, par rapport à la connexion Γ_{D0q}. L'ensemble des vecteurs $\Delta_{\alpha_q} = \{\sum_D F_D \bar{X}_{D\alpha_q} \mid \forall X_{p_{0q}}(\alpha_q) \in T_{p_{0q}}(\alpha_q)(E_0)\}$ constitue un sous-espace linéaire, à n dimensions ($n = \dim E_0$), de $T_{\alpha_q}(E_q)$. L'application $\alpha_q \in E_q \to \Delta_{\alpha_q} \subset T_{\alpha_q}(E_q)$ sera la distribution horizontale de Γ_{0q}. QED.

Observation 18. En vertu du lemme 4, deux connexions Γ_{0q} et Γ'_{0q} sont équivalentes dans le sens de la définition 4 si et seulement si elle sont la même image en p^*_{jq}. Il en résulte que le théorème 5 nous donne des informations sur le cardinal de l'ensemble des connexions Γ_{0q} qui ont la même image en p^*_{jq}.

§ 5. **Exemples.** Pour exemplifier on peut considérer les trois structures suivantes $(\xi, \mathfrak{N})$:

1) La structure $(\xi_1, \mathfrak{R}_1)$ où $\xi_1 = (\mathfrak{R}(\mathcal{V}_n), \mathcal{V}_n, p, GL(n, \mathbf{R}) : \mathcal{A}_1)$ est l'espace fibré principal des repères linéaires tangents à la variété différentiable $\mathcal{V}_n$ et $\mathfrak{R}_1 = (GL(n, \mathbf{R}) \supset GT(n, \mathbf{R}) \supset \{e\})$ ($GT(n, \mathbf{R})$ est le sous-groupe de $GL(n, \mathbf{R})$ caractérisé par la relation $(a^i_j) \in GT(n, \mathbf{R}) \Leftrightarrow \forall h < k \mid a^h_k = 0$). Le raffinement de ξ_1 défini par $GT(n, \mathbf{R})$ est $(\xi_{02} : \xi_{01}, \xi_{12})$ où $\xi_{02} = \xi_1$ et $\xi_{01} = (\mathfrak{D}(\mathcal{V}_n), \mathcal{V}_n, p_{01}, GL(n, \mathbf{R})/GT(n, \mathbf{R}), GP(n-1, \mathbf{R}) : \mathcal{A}_{01})$ est l'espace fibré des drapeaux tangents à la variété différentiable $\mathcal{V}_n$. Ici $\mathfrak{D}(\mathcal{V}_n)$ est la variété différentiable des drapeaux tangents à $\mathcal{V}_n$ et $GP(n-1, \mathbf{R})$ est le groupe projectif réel car le plus grand diviseur normal de $GL(n, \mathbf{R})$ contenu en $GT(n, \mathbf{R})$ est le sous-groupe diagonal $D(n, \mathbf{R}) = \{(\rho\delta^i_j) \mid \rho \in \mathbf{R}, \rho \neq 0\}$. Un champ de drapeaux de $\mathcal{V}_n$ ([4]) est une section globale de ξ_{01} (si elle existe !).

En tenant compte que pour le groupe $GT(n, \mathbf{R})$ nous avons $\pi_n(GT(n, \mathbf{R}), e) = 0$, pour $n \geqslant 1$ le corollaire 1 du théorème 2 implique que les suites d'homotopies des espaces fibrés $\xi_{02} = \xi_1$ et ξ_{01} sont isomorphes pour $n \geqslant 1$ (donc pour $n \geqslant 1$ $\pi_n(\mathfrak{R}(\mathcal{V}_n), \alpha_2) = \pi_n(\mathfrak{D}(\mathcal{V}_n), \alpha_1)$ et $\pi_n(GL(n, \mathbf{R}), e) = \pi_n(GL(n, \mathbf{R})/GT(n, \mathbf{R}), e)$).

En appliquant les résultats du § 4, a) on peut obtenir des informations sur les connexions associées à une structure $(\mathcal{V}_n, \Delta)$ où Δ est un champ donné de drapeaux de $\mathcal{V}_n$ (on suppose qu'il existe un tel champ). On obtient des résultats inclus en [4].

2). La structure $(\xi_1, \mathfrak{R}_2)$ ou $\mathfrak{R}_2 = (GL(n, \mathbf{R}) \supset D(n, \mathbf{R}) \supset \{e\})$. Le raffinement de ξ_1 défini par $D(n, \mathbf{R})$ est constitué par les espaces fibrés $(\xi_{02}, \xi'_{01}, \xi'_{12})$ où $\xi_{02} = \xi_1$ et $\xi'_{01} = (t(\mathcal{V}_n), \mathcal{V}_n, p_{01}, GP(n-1) ; \mathcal{A}_{01})$ est l'espace fibré des directions tangentes à $\mathcal{V}_n$. En tenant compte du fait que $D(n, \mathbf{R})$ est un diviseur normal de $GL(n, \mathbf{R})$ nous sommes dans les hypothèses du §4. b). Il résulte qu'on obtiendra des informations sur les relations qui existent entre les connexions linéaires de $\mathcal{V}_n$ et les connexions projectives de V_n (connexions infinitésimales de ξ'_{01}).

3) La structure $(\xi_2, \mathfrak{R}_3)$ où $\xi_2 = (\mathcal{A}(\mathcal{V}_n), \mathcal{V}_n, p, GA(n, \mathbf{R}) ; \mathcal{A}_2)$ est l'espace fibré principal des repères afines tangents à $\mathcal{V}_n$ et $\mathfrak{R}_3 = (GA(n, \mathbf{R}) \supset T(n, \mathbf{R}) \supset \{e\})$ et

$$GA(n, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^i & a^i_j \end{pmatrix} \mid \det(a^i_j) \neq 0 \right\}, \quad T(n, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^i & \delta^i_j \end{pmatrix} \right\}.$$

$T(n, \mathbf{R})$ est diviseur normal de $GA(n, \mathbf{R})$ donc nous nous trouvons dans les conditions du paragraphe § 4. b). En appliquant les résultats de ce paragraphe on obtiendra des informations sur les relations qui existent entre les connexions affines et les connexions linéaires de V_n.

Universitatea din Timişoara

BIBLIOGRAPHIE

1. Hirzebruch F. — *Topological methods in algebraic geometry.* Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
2. Hu Sze-Tsen — *Homotopy theory.* Academic Press, New York and London, 1959 (Édition russe).
3. Kobayashi S. and Nomizu K. — *Foundations of differential geometry.* Interscience Publishers, 1963.
4. Papuc I. Dan — *Quelques propriétés globales des champs de drapeaux des variétés différentiables.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 1 240—1 242, 1968.
5. Pham Mau Quan — *Introduction à la géométrie des variétés différentiables.* Dunod Paris, 1969.
6. Steenrod N. — *The topology of fibre bundles.* Princenton, New Jersey 1951 (Édition russe).

ASUPRA RAFINĂRILOR UNUI SPAŢIU FIBRAT, PRINCIPAL DIFERENŢIABIL

Rezumat

În această Notă este studiată o structură $(\xi, \mathfrak{R})$ constituită dintr-un spaţiu fibrat, principal, diferenţiabil, $\xi = (E, B, p, G : \mathcal{A})$ şi dintr-un şir de subgrupuri închise ale lui G, $\mathfrak{R} = (G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{q-1} \supset H_q = \{e\})$.

S-a demonstrat că pentru fiecare pereche de numere întregi j, k $(0 \leqslant j < k \leqslant q)$ spaţiile cît E_q/H_k, E_q/H_j şi proiecţia canonică p_{jk} determină un spaţiu fibrat diferenţiabil $\xi_{jk} = (E_k, E_j, p_{jk}, H^j_k, G^j_k ; \mathcal{A}_{jk})$ unde $E_k = E_q/H_k$, $E_j = E_q/H_j$. Vom avea $\xi_{0q} = \xi$. Spaţiile fibrate ξ_{jq} sînt principale.

Mulţimea spaţiilor fibrate $\{\xi_{jk} \mid 0 \leqslant j < k \leqslant q\}$ constituie „ţesutul asociat structurii $(\xi, \mathfrak{R})$". O ternă $(\xi_{0q} ; \xi_{0j}, \xi_{jq})$ constituie „rafinarea lui $\xi_{0q} = \xi$ în raport cu subgrupul $H_j \subset G$".

Rezultatele stabilite în această Notă se referă la o rafinare a spaţiului fibrat principal ξ_{0q} în raport cu un subgrup dat $H_j \subset G$. Aceste rezultate sînt fie de natură topologică (paragraful 3) fie de natură geometrică (paragraful 4). Dintre ele remarcăm următoarele :

Şirurile de omotopie ale spaţiilor fibrate ξ_{0q}, ξ_{0j}, ξ_{jq} ce constituie rafinarea considerată, formează o diagramă comutativă (teorema 2 ; diagrama (23) . Printr-o alegere potrivită a grupului H_j, diagrama (23) poate furniza informaţii imediate asupra şirului de omotopie al spaţiului fibrat $\xi_{0q} = \xi$.

Teoremele 4 şi 5 dau informaţii asupra conexiunilor infinitezimale definite pe spaţiile fibrate principale $\xi_{0q} = \xi$ şi ξ_{jq} şi asupra raporturilor dintre aceste conexiuni. Importanţa acestor rezultate este reliefată dacă remarcăm că o G-structură arbitrară definită pe $\mathcal{V}_n$ determină o rafinare a spaţiului fibrat principal al reperelor liniare tangente la $\mathcal{V}_n$ şi reciproc (dacă pe $\mathcal{V}_n$ există G-structura respectivă !).