CONEXIUNI COMPATIBILE CU STRUCTURI FREDHOLM PE VARIETĂȚI MODELATE DE SPAȚII BANACH

Rezumat

Fibratele vectoriale care admit o reducere la grupul Fredholm au fost mult studiate în ultimii ani. Dăm aici o condiție necesară și suficientă de compatibilitate a unei conexiuni liniare pe un fibrat vectorial cu o G-structură pe acesta (Teorema 2.11) și aplicăm acest rezultat la reducerile Fredholm (Teorema 3.3). Pentru aceasta extindem noțiunea de grup de olonomie la conexiuni liniare pe fibrate vectoriale cu fibre spații Banach.

GROUPES DE LIE-BANACH ET ESPACES LOCALEMENT SYMÉTRIQUES

PAR

AUREL BEJANCU

Soit M une C^∞-variété différentielle modelée par des espaces de Banach et ∇ une connexion linéaire sur M([2]). On désigne par T et R la torsion et la courbure de ∇.

Définition 1. *La variété M est un espace local symétrique si $T = 0$ et $\nabla_X R = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Soit G un groupe de Lie-Banach de classe C^∞ et ω sa forme linéaire banachique. On désigne par e l'unité de G et par $C(G\,;\ T_eG)$ le module des applications de classe C^∞ sur G à valeurs dans T_eG. Nous avons démontré dans ([2]) que

$$\nabla_X Y = \omega^{-1}(X < \omega, Y >) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G) \tag{1}$$

est une connexion linéaire invariante sur G. De plus nous avons démontré les relations :

$$T = \omega^{-1} \circ d\omega\,; \qquad R = 0. \tag{2}$$

A l'aide de cette connexion nous définissons la connexion $\tilde{\nabla}$ par la formule

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} T(X, Y). \tag{3}$$

Il est aisé de voir que $\tilde{T} = 0$.

Proposition 1. *La torsion T vérifie la relation*

$$T(X, T(Y, Z)) + T(Y, T(Z, X)) + T(Z, T(X, Y)) = 0 \tag{4}$$
$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G).$$

Démonstration. Soit $< \omega, X > = f$; $< \omega, Y > = g$ et $< \omega, Z > = h$.

Nous avons démontré ([1], [2]) les relations :

$$(5) \qquad < d\omega, X \times Y > = - [< \omega, X >, < \omega, Y >], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G)$$

$$(6) \qquad [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0, \quad \forall f, g, h \in C(G\,;\ T_e G).$$

Compte tenu de (2) et (5) on a

$$(7) \qquad T(X, T(Y, Z)) = \omega^{-1}([< \omega, X >, [< \omega, Y >, < \omega, Z >]]).$$

Alors, la relation (4) résulte de (6) et du fait que ω^{-1} est un isomorphisme de $C(G\,;\ T_e G)$ sur $\mathfrak{X}(G)$.

Proposition 2. *Pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ on a*

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\nabla_X (T(Z, Y)) + \nabla_Y (T(X, Z)) + T(Y, \nabla_X Z) + \\ &+ T(\nabla_Y Z, X) = T(Z, T(X, Y)) + T(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

Démonstration. On désigne par E le premier membre de la relation (8), et compte tenu de (1), (2) et (5), on a

$$\begin{aligned} E = &- \omega^{-1}(X([< \omega, Z >, < \omega, Y >]) + Y([< \omega, X >, < \omega, Z >]) + \\ &+ [< \omega, Y >, X < \omega, Z >] + [Y < \omega, Z >, < \omega, X >]). \end{aligned}$$

Mais pour tous $f, g \in C(G\,;\ T_e G)$ on a

$$(9) \qquad X([f, g]) = [Xf, g] + [f, Xg].$$

Compte tenu de (9) et du fait que [,] est antisymétrique, on obtient

$$E = \omega^{-1}([X < \omega, Y > - Y < \omega, X >, < \omega, Z >]).$$

Vu que $X < \omega, Y > - Y < \omega, X > = < d\omega, X \times Y > + < \omega, [X, Y] >$, on a

$$\begin{aligned} E = &\ \omega^{-1}([[< \omega, Y >, < \omega, X >], < \omega, Z >]) + \\ &+ \omega^{-1}(< d\omega, Z \times [X, Y] >). \end{aligned}$$

Compte tenu de (2) et (7), on obtient

$$E = T(Z, T(X, Y)) + T(Z, [X, Y]).$$

Proposition 3. *La courbure $\widetilde{R}$ de la connexion $\widetilde{\nabla}$ est donnée par la formule*

$$(10) \qquad \widetilde{R}(X, Y)(Z) = \frac{1}{4} T(Z, T(X, Y)), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G).$$

Démonstration. Compte tenu de la définition de R ([2]), on a

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y)(Z) = &(\nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z) + \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla_X (T(Z, Y)) + \nabla_Y (T(X, Z)) + T(Y, \nabla_X Z) + T(\nabla_Y Z, X)) + \\ &+ \frac{1}{4} (T(X, T(Y, Z)) + T(Y, T(Z, X))) + \frac{1}{2} T([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Vu que $R = 0$, la première parenthèse s'annule. Compte tenu de (4) et (8), on a

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y)(Z) = &\frac{1}{2} T(Z, T(X, Y)) + \frac{1}{2} T(Z, [X, Y]) - \\ &\frac{1}{4} T(Z, T(X, Y)) + \frac{1}{2} T([X, Y], Z). \end{aligned}$$

La relation (10) résulte compte tenu de l'antisymétrie de T.

On désigne par $L(G)$ l'algèbre de Lie-Banach de G, et alors de (10) on a :

$$\widetilde{R}(X, Y)(Z) = \frac{1}{4} [Z, [X, Y]], \quad \forall X, Y, Z \in L(G).$$

Cette relation a été obtenue directement en ([2]).

Compte tenu de (3), pour tout $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(G)$ on a

$$\begin{aligned} T(U, T(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + T(X, \widetilde{\nabla}_X Z)) = &\ T(U, T(\nabla_X Y, Z) + T(Y, \nabla_X Z)) - \\ &\frac{1}{2} (T(U, T(Z, T(Y, X)) + T(Y, T(X, Z)))). \end{aligned}$$

De la relation (4) on a

$$(11) \qquad \begin{aligned} T(U, T(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + T(Y, \widetilde{\nabla}_X Z)) = &\ T(U, T(\nabla_X Y, Z) + \\ &+ T(Y, \nabla_X Z)) + \frac{1}{2} T(U, T(X, T(Z, Y))). \end{aligned}$$

D'une manière analogue on a les relations :

$$(12) \qquad T(\widetilde{\nabla}_X U, T(Y, Z)) = T(\widetilde{\nabla}_X U, T(Y, Z)) - \frac{1}{2} T(T(X, U), T(Y, Z)),$$

$$(13) \qquad \widetilde{\nabla}_X (\widetilde{R}(Y, Z)(U)) = \frac{1}{4} \nabla_X (T(U, T(Y, Z))) - \frac{1}{8} T(X, T(U, T(Y, Z))).$$

Proposition 4. *Pour tout* $X \in \mathfrak{X}(G)$ *on a*:

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{R} = \nabla_X \tilde{R}. \tag{14}$$

Démonstration. Compte tenu de la définition de la dérivée covariante ([2]), pour tout $Y, Z, U \in \mathfrak{X}(G)$ on a

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{R}(Y, Z)(U) = \tilde{\nabla}_X (\tilde{R}(Y, Z)(U)) - \frac{1}{4}[T(U, T(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + T(Y, \tilde{\nabla}_X Z))] - \frac{1}{4} T(\tilde{\nabla}_X U, T(Y, Z)).$$

Compte tenu de (11), (12), (13) on a

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{R}(Y, Z)(U) = \frac{1}{4}[\nabla_X (T(U, T(Y, Z))) - T(U, T(\nabla_X Y, Z)) - T(U, T(Y, \nabla_X Z)) - T(\nabla_X U, T(Y, Z))] + \frac{1}{8}[T(T(X, U), T(Y, Z)) - T(X, T(U, T(Y, Z))) - T(U, T(T(Y, Z), X))].$$

Il est aisé de voir de (4) que la dernière parenthèse s'annule et donc

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{R}(Y, Z)(U) = \frac{1}{4}[\nabla_X (T(U, T(Y, Z))) - T(U, T(\nabla_X Y, Z)) - T(U, T(Y, \nabla_X Z)) - T(\nabla_X U, T(Y, Z))] = \nabla_X (\tilde{R}(Y, Z)(U)) - \tilde{R}(\nabla_X Y, Z)(U) - \tilde{R}(Y, \nabla_X Z)(U) - \tilde{R}(Y, Z)(\nabla_X U = \nabla_X \tilde{R}(Y, Z)(U).$$

De (2) et (5) on a

$$T(U, T(\nabla_X Y, Z)) = \omega^{-1}(< d\omega, U \times T(\nabla_X Y, Z) >) = \omega^{-1}([[< \omega, Z >, X < \omega, Y >], < \omega, U >]). \tag{15}$$

D'une manière analogue on a

$$T(U, T(Y, \nabla_X Z)) = \omega^{-1}([< \omega, U >, [< \omega, Y >, X < \omega, Z >]]), \tag{16}$$

$$T(\nabla_X U, T(Y, Z)) = \omega^{-1}([X < \omega, U >, [< \omega, Y >, < \omega, Z >]]). \tag{17}$$

Proposition 5. *Pour tout* $X \in \mathfrak{X}(G)$ *on a*

$$\nabla_X \tilde{R} = 0. \tag{18}$$

Démonstration. Compte tenu de (10) nous avons

$$\nabla_X \tilde{R}(Y, Z)(U) = \frac{1}{4}[\nabla_X (T(U, T(Y, Z))) - T(U, T(\nabla_X Y, Z)) - T(U, T(Y, \nabla_X Z)) - T(\nabla_X U, T(Y, Z))].$$

On ajoute membre à membre les relations (15), (16) et (17) et on obtient

$$T(U, T(\nabla_X Y, Z)) + T(U, T(Y, \nabla_X Z)) + T(\nabla_X U, T(Y, Z)) = \omega^{-1}\{[< \omega, U >, [X < \omega, Y >, < \omega, Z >]] + [< \omega, U >, [< \omega, Y >, X < \omega, Z >]] + [X < \omega, U >, [< \omega, Y >, < \omega, Z >]]\}.$$

En vertu de (10) on a

$$T(U, T(\nabla_X Y, Z)) + T(U, T(Y, \nabla_X Z)) + T(\nabla_X U, T(Y, Z)) = \omega^{-1}\{X([< \omega, U >, [< \omega, Y >, < \omega, Z >]])\} = \nabla_X (T(U, T(Y, Z))),$$

et donc $\nabla_X \tilde{R} = 0$. Compte tenu de (14) on a donc

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{R} = 0 \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(G).$$

Nous avons démontré ainsi que chaque groupe de Lie-Banach est un espace local symétrique.

Institut de Mathématique
de l'Académie, Iassy, Roumanie

BIBLIOGRAPHIE

1. Bejancou A. — *Formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach et groupes de Lie-Banach* (An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XVIII (1972), pp. 125—134.
2. Bejancou A. — *Sur la méthode d'Elie Cartan pour un groupe de Lie-Banach.* (a paraitre).

GRUPURI LIE-BANACH ŞI SPAŢII LOCAL SIMETRICE

Rezumat

În Nota de faţă utilizînd metoda formelor diferenţiale banachice pentru grupuri Lie-Banach dezvoltată în ([1], [2]) se arată că pe orice grup Lie-Banach există o conexiune liniară cu torsiunea şi derivata covariantă a tensorului de curbură nule.