LE PLONGEMENT NATUREL DES ESPACES SPHÉRIQUES QUASISYMPLECTIQUES

PAR

EFTIMIE GRECU

Les espaces sphériques symplectiques, quaternioniques et anti-quaternioniques ont été étudiés par G. Vrănceanu [1], C. Teleman [4] et par l'auteur [5].

Dans la Note présente, on considère la classe des espaces sphériques quasisymplectiques V_{2n}. Ces espaces sont définis comme des sous-espaces nonholonomes V^{2n}_{2n+1} sur les hypersphères S_{2n+1} de l'espace pseudoeuclidien ${}^{2m}E_{2n+2}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ à l'aide d'une équation Pfaff intégrable d'une façon incomplète.

On considère ensuite le problème du plongement naturel et isométrique de l'espace V_{2n} dans un espace pseudoeuclidien ${}^{M}E_{N}$ où $N = (n+1)^2$, $M = 2m(n-m+1)$ et on trouve les formules qui réalisent un plongement topologique rationnel de V_{2n} dans ${}^{M}E_{N}$.

§ 1. La définition du sousespace nonholonome V^{2n}_{2n+1}. On considère ([6] p. 44), l'espace pseudoeuclidien ${}^{2m}E_{2n+2}(x^1, \ldots, x^{2n+2})$ et soit dans cet espace l'hypersphère S_{2n+1} de rayon R et centre à l'origine:

$$-(x^1)^2 - \ldots - (x^{2m})^2 + (x^{2m+1})^2 + \ldots + (x^{2n+2})^2 = R^2, \ (1 \leqslant m \leqslant n). \tag{1}$$

La métrique de l'espace ${}^{2m}E_{2n+2}$ est représentée par la formule

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - \ldots - (dx^{2m})^2 + (dx^{2m+1})^2 + \ldots + (dx^{2n+2})^2 \tag{2}$$

Considérons de même l'équation quasisymplectique

$$\begin{aligned} dX \equiv -[x^1 x^2] - \ldots - [x^{2m-1} x^{2m}] + [x^{2m+1} x^{2m+2}] + \ldots + \\ + [x^{2n+1} x^{2n+2}] = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

où on note

$$[x^{2i-1}x^{2i}] = x^{2i-1}dx^{2i} - x^{2i}dx^{2i-1}, \quad (i = 1, \ldots, n+1;\ i \text{ fixe}).$$

L'équation de Pfaff (3) définit sur l'hypersphère (1) un sousespace nonholonome V^{2n}_{2n+1} dont la métrique est induite par la métrique (2) de l'hypersphère S_{2n+1} de ${}^{2m}E_{2n+2}$. On peut donc énoncer le

Théorème 1. *La métrique du sousespace nonholonome V^{2n}_{2n+1} défini sur l'hypersphère S_{2n+1} de ${}^{2m}E_{2n+2}$ à l'aide de l'équation quasisymplectique $dX = 0$, est celle d'un espace pseudoriemannien V_{2n}.*

§ 2. La métrique complexe de l'espace V_{2n}. Considérons l'espace vectoriel complexe C_{n+1} dont les éléments sont les vecteurs $(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})$, où les composantes ξ^i sont données par les relations

$$\xi^i = x^{2i-1} + \sqrt{-1}\, x^{2i}, \quad (i = 1, \ldots, n+1). \tag{4}$$

Dans ce cas, les formules (1), (2), (3) s'écrivent sous la forme

$$-\bar{\xi}^1\xi^1 - \ldots - \bar{\xi}^m\xi^m + \bar{\xi}^{m+1}\xi^{m+1} + \ldots + \bar{\xi}^{n+1}\xi^{n+1} = R^2, \tag{5}$$

$$ds^2 = -d\bar{\xi}^1 d\xi^1 - \ldots - d\bar{\xi}^m d\xi^m + d\bar{\xi}^{m+1} d\xi^{m+1} + \ldots + d\bar{\xi}^{n+1} d\xi^{n+1}, \tag{6}$$

$$-\bar{\xi}^1 d\xi^1 - \ldots - \bar{\xi}^m d\xi^m + \bar{\xi}^{m+1} d\xi^{m+1} + \ldots + \bar{\xi}^{n+1} d\xi^{n+1} = 0 \tag{7}$$

et l'équation (7) définit dans C_{n+1} un sousespace nonholonome C^n_{n+1}.

Si on applique la transformation de variables donnée par les relations

$$\xi^j = r_j\sigma_j\sigma_{n+1}, \quad \xi^{n+1} = r_{n+1}\sigma_{n+1}, \quad (r_i = |\xi^i|,\ |\sigma_i| = 1;\ j = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

alors les formules (5), (6), (7) sont respectivement écrites sous la forme

$$-r_1^2 - \ldots - r_m^2 + r_{m+1}^2 + \ldots + r_{n+1}^2 = R^2, \tag{9}$$

$$ds^2 = \varepsilon_j dr_j^2 + dr_{n+1}^2 + \varepsilon_j r_j^2 |d\sigma_j|^2 - K\,|\varepsilon_j r_j^2 \bar{\sigma}_j d\sigma_j|^2, \quad (KR^2 = 1) \tag{10}$$

$$\varepsilon_j r_j^2 \bar{\sigma}_j d\sigma_j + R^2 \bar{\sigma}_{n+1} d\sigma_{n+1} = 0, \tag{11}$$

où l'on fait la somme par rapport à j de 1 à n, et le symbole ε_j est défini par :

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -1, & \text{pour } j = 1, \ldots, m, \\ +1, & \text{pour } j = m+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Il est facile à voir que la métrique complexe (10) contient $2n$ variables réelles indépendantes, et par conséquent on peut énoncer le :

Théorème 2. *La métrique complexe de l'espace pseudoriemannien V_{2n} est définie par la formule* (10).

§ 3. Le groupe de mouvement de l'espace V_{2n}. Par la suite, nous nous proposons de montrer que l'espace V_{2n} possède un groupe de mouvement ayant $(n+1)^2$ paramètres. Considérons, en effet, le groupe linéaire complexe et homogène en $n+1$ variables $\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}$ défini par les formules

$$\xi'^i = \alpha^i_k \xi^k \quad (i, k = 1, \ldots, n+1), \tag{12}$$

où α^i_k sont des nombres complexes qui vérifient les relations de pseudo-orthogonalité

$$\varepsilon_i \alpha^i_k \alpha^i_l = \Delta^l_k \quad (l = 1, \ldots, n+1), \tag{13}$$

e symbole Δ^l_k étant défini par :

$$\Delta^l_k = \begin{cases} 0, & \text{pour } k \neq l, \\ -1, & \text{pour } k = l = 1, \ldots, m, \\ +1, & \text{pour } k = l = m+1, \ldots, n+1. \end{cases}$$

En même temps, le groupe (12), (13) invarie la forme quasihermitique

$$-\bar{\xi}^1\xi^1 - \ldots - \bar{\xi}^m\xi^m + \bar{\xi}^{m+1}\xi^{m+1} + \ldots + \bar{\xi}^{n+1}\xi^{n+1},$$

ainsi que la forme quasisymplectique

$$-\xi^1 d\xi^1 - \ldots - \xi^m d\xi^m + \xi^{m+1} d\xi^{m+1} + \ldots + \xi^{n+1} d\xi^{n+1}.$$

Si l'on introduit les quantités réelles a^i_k, b^i_k par les relations

$$\alpha^i_k = a^i_k + \sqrt{-1}\, b^i_k, \tag{14}$$

alors on écrit les formules (13) sous la forme

$$\begin{cases} \varepsilon_i(a^i_k a^i_l + b^i_k b^i_l) = \Delta^l_k, \\ \varepsilon_i(a^i_k b^i_l - a^i_l b^i_k) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Il est facile de voir que les premières relations (15) sont en nombre de $(1/2)(n+1)(n+2)$, tandis que les dernières sont en nombre de $(1/2)n(n+1)$, et puisque le nombre des quantités réelles a^i_k, b^i_k est $2(n+1)^2$ il résulte que seulement $(n+1)^2$ sont indépendantes. On peut donc énoncer le

Théorème 3. *Les espaces V_{2n} ayant la métrique complexe* (10) *possèdent un groupe de mouvement ayant $(n+1)^2$ paramètres réels.*

§ 4. Espaces sphériques quasisymplectiques. Par la suite, nous nous proposons de définir la classe des espaces sphériques quasisymplectiques. C'est pourquoi nous considérons l'espace pseudoeuclidien ${}^mE_{n+1}(r_1, \ldots, r_{n+1})$ dans lequel l'équation (9) définit une hypersphère S_n.

Si on fait la projection stéréographique de l'hypersphère (9) du pôle nord $N(r_j = R\delta_j^{n+1})$ sur l'hyperplan tangent au pôle sud $S(r_j = -R\delta_j^{n+1})$ et on indique avec $v_1, \ldots, v_n$ les coordonnées de cet hyperplan, on a les formules

$$(16) \qquad r_j = \frac{v_j}{qv+1}, \quad r_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \frac{qv-1}{qv+1}, \quad (4qR^2 = 1),$$

où on note

$$v = -v_1^2 - \ldots - v_m^2 + v_{m+1}^2 + \ldots + v_n^2.$$

La métrique (10) s'écrit en coordonnées v_j, σ_j sous la forme

$$(17) \qquad dS^2 = \frac{\varepsilon_j(dv_j^2 + v_j^2 |d\sigma_j|^2)}{(1+qv)^2} - 4q \frac{|\varepsilon_j v_j^2 \bar{\sigma}_j d\sigma_j|^2}{(1+qv)^4}.$$

Si on introduit les coordonnées complexes $\omega^1, \ldots, \omega^n$ par les relations

$$(18) \qquad \omega^j = v_j \sigma_j, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

alors la métrique (17) devient

$$(19) \qquad ds^2 = \frac{\varepsilon_j |d\omega^j|^2}{(1+q\omega)^2} + q \frac{[\varepsilon_j(\omega^j d\bar{\omega}^j - \bar{\omega}^j d\omega^j)]^2}{(1+q\omega)^4},$$

où on note

$$\omega = -|\omega^1|^2 - \ldots - |\omega^m|^2 + |\omega^{m+1}|^2 + \ldots + |\omega^n|^2.$$

Si on passe aux coordonnées réelles $z^1, \ldots, z^{2n}$ par les formules

$$(20) \qquad \omega^j = z^{2j-1} + \sqrt{-1}\, z^{2j}, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

alors on écrit la métrique (19) d'une façon définitive sous la forme

$$(21) \qquad ds^2 = \frac{\varepsilon_j[(dz^{2j-1})^2 + (dz^{2j})^2]}{(1+qz)^2} - \frac{4q dZ^2}{(1+qz)^4},$$

où on note

$$\begin{cases} z = -(z^1)^2 - \ldots - (z^{2m})^2 + (z^{2m+1})^2 + \ldots + (z^{2n})^2, \\ dZ = -[z^1 z^2] - \ldots - [z^{2m-1} z^{2m}] + [z^{2m+1} z^{2m+2}] + \ldots + [z^{2n-1} z^{2n}]. \end{cases}$$

On peut donc énoncer le

Théorème 4. *La métrique des espaces sphériques quasisymplectiques V_{2n} est donnée en coordonnées complexes $\omega^1, \ldots, \omega^n$ par la formule* (19), *et par la formule* (21) *en coordonnées réelles $z^1, \ldots, z^{2n}$.*

§ 5. **L'Hypersphère S_{2n+1} de ${}^{2m}E_{2n+2}$ comme espace fibré.** Par la suite, on démontre que l'hypersphère S_{2n+1} de ${}^{2m}E_{2n+2}$ peut être considérée comme un espace fibré, ayant comme base l'espace sphérique quasisymplectique V_{2n},

et comme fibres une famille de courbes S_1, qui s'obtiennent comme intersection de l'hypersphère S_{2n+1} avec des plans qui passent par l'origine de l'espace pseudoeuclidien ${}^{2m}E_{2n+2}$.

Dans ce but, on doit exprimer les coordonnées $x^1, \ldots, x^{2n+2}$ d'un point de l'hypersphère S_{2n+1} ayant l'équation (1), en fonction des coordonnées $z^1, \ldots, z^{2n}$ d'un voisinage de l'espace sphérique quasisymplectique V_{2n} ayant la métrique (21). Si on note

$$(22) \qquad A = (1+qz)^{-1}, \quad B = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot \frac{qz-1}{qz+1}, \quad \sigma_{n+1} = \cos a + \sqrt{-1} \sin a,$$

et si on tient compte de (4), (8), (16), (18), (20), (22), on obtient les formules

$$(23) \qquad \begin{cases} x^{2j-1} = A(z^{2j-1} \cos a - z^{2j} \sin a), \\ x^{2j} = A(z^{2j-1} \sin a + z^{2j} \cos a), \quad (j = 1, \ldots n) \\ x^{2n+1} = B \cos a, \quad x^{2n+2} = B \sin a, \end{cases}$$

qui montrent qu'à un point $P(z^1, \ldots, z^{2n})$ de l'espace sphérique quasisymplectique V_{2n}, il correspond sur l'hypersphère S_{2n+1} de ${}^{2m}E_{2n+2}$ un ensemble infini de points $Q(x^1, \ldots, x^{2n+2})$, dépendant du paramètre a à différentes valeurs.

Si on note

$$(24) \qquad M_j = \frac{2\sqrt{q}}{qz-1} z^{2j-1}, \quad N_j = \frac{2\sqrt{q}}{qz-1} z^{2j}, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

et on tient compte de (23), il résulte

$$(25) \qquad \begin{cases} x^{2j-1} = M_j x^{2n+1} - N_j x^{2n+2}, \\ x^{2j} = N_j x^{2n+1} + M_j x^{2n+2}, \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Les équations (25) en nombre de $2n$ définissent dans l'espace pseudoeuclidien ${}^{2m}E_{2n+2}(x^1, \ldots, x^{2n+2})$ une famille de ∞^{2n} plans qui passent par l'origine et qui coupent l'hypersphère S_{2n+1} d'après une famille de grands cercles S_1.

Compte tenu de (24), (25) on obtient les formules

$$\begin{cases} z^{2j-1} = \dfrac{qz-1}{2\sqrt{q}} \cdot \dfrac{x^{2n+1}x^{2j-1} + x^{2n+2}x^{2j}}{(x^{2n+1})^2 + (x^{2n+2})^2}, \\ z^{2j} = \dfrac{qz-1}{2\sqrt{q}} \cdot \dfrac{x^{2n+1}x^{2j} - x^{2n+2}x^{2j-1}}{(x^{2n+1})^2 + (x^{2n+2})^2} \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

qui montrent qu'à chaque point $Q_0(x_0^1, \ldots, x_0^{2n+2})$ de l'hypersphère S_{2n+1} pour lequel $(x_0^{2n+1})^2 + (x_0^{2n+2})^2 \neq 0$ il correspond un seul point $P_0(z_0^1, \ldots, z_0^{2n})$ de l'espace sphérique quasisymplectique V_{2n}. Par conséquent, nous avons le

Théorème 5. *L'hypersphère S_{2n+1} de ${}^{2m}E_{2n+2}$ est un espace fibré, ayant l'espace sphérique quasisymplectique V_{2n} comme base et comme fibres les grands cercles S_1.*

Par la suite, considérons le voisinage $V''_{2n}(z'^1 \ldots, z'^{2n})$ qui correspond aux points de l'hypersphère S_{2n+1} pour laquelle nous avons $(x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 \neq 0$ et posons

$$(26)\quad \begin{cases} x^{2p-1} = A'(z'^{2p-1}\cos a' - z'^{2p}\sin a'),\ x^{2p} = A'(z'^{2p-1}\sin a' + z'^{2p}\cos a'), \\ x^{2n-1} = B'\cos a',\ x^{2n} = B'\sin a',\ (p = 1 \ldots, n-1,\ n+1) \end{cases}$$

où on note

$$(27)\quad \begin{cases} A' = (1 + qz')^{-1},\ B' = \dfrac{1}{2\sqrt{q}} \cdot \dfrac{qz' - 1}{qz' + 1}, \\ z' = -(z'^1)^2 - \ldots - (z'^{2m})^2 + (z'^{2m+1})^2 + \ldots + (z'^{2n})^2. \end{cases}$$

Si on note

$$(28)\quad M'_p = \frac{2\sqrt{q}}{qz' - 1}\, z'^{2p-1},\ N'_p = \frac{2\sqrt{q}}{qz' - 1}\, z'^{2p},$$
$$(p = 1 \ldots, n-1,\ n+1)$$

et nous tenons compte de (26), on obtient les formules

$$(29)\quad \begin{cases} x^{2p-1} = M'_p x^{2n-1} - N'_p x^{2n}, \\ x^{2p} = N'_p x^{2n-1} + M'_p x^{2n} \end{cases} \quad (p = 1 \ldots, n-1,\ n+1).$$

Pour le voisinage $V_{2n}(z^1 \ldots, z^{2n})$ nous avons donc les plans (25), tandis que pour le voisinage $V''_{2n}(z'^1 \ldots, z'^{2n})$ nous avons les plans (29). Compte tenu de (25), (29), on obtient facilement les relations

$$(30)\quad \begin{cases} M'_h = \dfrac{M_h M_n + N_h N_n}{M_n^2 + N_n^2},\quad N'_h = \dfrac{N_h M_n - M_h N_n}{M_n^2 + N_n^2},\quad (h = 1 \ldots, n-1). \\ M'_{n+1} = \dfrac{M_n}{M_n^2 + N_n^2},\quad N'_{n+1} = -\dfrac{N_n}{M_n^2 + N_n^2}. \end{cases}$$

ainsi que les relations inverses

$$(31)\quad \begin{cases} M_h = \dfrac{M'_h M'_{n+1} + N'_h N'_{n+1}}{M'^2_{n+1} + N'^2_{n+1}},\quad N_h = \dfrac{N'_h M'_{n+1} - M'_h N'_{n+1}}{M'^2_{n+1} + N'^2_{n+1}}, \\ \qquad (h = 1 \ldots, n-1) \\ M_n = \dfrac{M'_{n+1}}{M'^2_{n+1} + N'^2_{n+1}},\quad N_n = -\dfrac{N'_{n+1}}{M'^2_{n+1} + N'^2_{n+1}}. \end{cases}$$

Ces relations montrent qu'entre les grandeurs M_h, N_h, M_n, N_n et M'_h, N'_h, M'_{n+1}, N'_{n+1} il existe une correspondance biunivoque si $M_n^2 + N_n^2 \neq 0$ et $M'^2_{n+1} + N'^2_{n+1} \neq 0$.

A l'aide des relations (24), (28), (30), (31) on peut trouver la transformation des coordonnées entre le voisinage $V_{2n}(z^1 \ldots, z^{2n})$ et le voisinage $V''_{2n}(z'^1 \ldots, z'^{2n})$ qui correspondent au même point $(x^1 \ldots, x^{2n+2})$ de l'hypersphère S_{2n+1} de l'espace pseudoeuclidien ${}^{2m}E_{2n+2}$.

§ 6. **Le plongement naturel de l'espace sphérique quasisymplectique** Par la suite, on considère le problème du plongement naturel et isométrique de l'espace sphérique quasisymplectique V_{2n} ayant la métrique (21) dans un espace pseudoeuclidien ${}^{M}E_N$, où $N = (n+1)^2$, $M = 2m(n-m+1)$.

Soit, en effet, l'espace ${}^{M}E_N(X_h, X_{hl}, Y_{hl})$, $(h, l = 1 \ldots, n+1 : h < l)$ dont la métrique est donnée par la formule

$$(32)\quad ds^2 = K^2[dX_s^2 + \varepsilon_r \varepsilon_s(dX_{rs}^2 + dY_{rs}^2) + \varepsilon_s(dX_{sn+1}^2 + dY_{sn+1}^2) + dX_{n+1}^2],$$
$$(r, s = 1 \ldots, n;\quad r < s).$$

Considérons dans ${}^{M}E_N$ le lieu géométrique L défini par les formules

$$(33)\quad X_h = \frac{1}{\sqrt{2K}}\, \bar{\xi}^h \xi^h,\ X_{hl} + \sqrt{-1}\, Y_{hl} = \frac{1}{\sqrt{K}}\, \bar{\xi}^h \xi^l,$$

où les coordonnées $\xi^1 \ldots, \xi^{n+1}$ sont supposées normalisées par la relation

$$(34)\quad -\bar{\xi}^1 \xi^1 - \ldots - \bar{\xi}^m \xi^m + \bar{\xi}^{m+1} \xi^{m+1} + \ldots + \bar{\xi}^{n+1} \xi^{n+1} = \frac{1}{K},$$

qui détermine ces coordonnées, à un facteur de module égal à 1, près.

Compte tenu de (33), (34) on obtient les relations

$$(35)\quad \varepsilon_s X_s + X_{n+1} = \frac{1}{K\sqrt{2K}},$$

$$(36)\quad X_s^2 + \varepsilon_r \varepsilon_s(X_{rs}^2 + Y_{rs}^2) + \varepsilon_s(X_{sn+1}^2 + Y_{sn+1}^2) + X_{n+1}^2 = \frac{1}{2K^3},$$

qui montrent que le lieu géométrique L se trouve situé sur la variété V_{n^2+2n-1} de l'intersection de l'hyperplan (35) avec l'hypersphère (36) de l'espace pseudoeuclidien ${}^{M}E_N$.

Compte tenu de (8), (16), (18), les formules (33) s'écrivent sous la forme

$$
(37)\quad \begin{cases}
X_s = \dfrac{1}{2\sqrt{K}} \cdot \dfrac{\bar{\omega}^s \omega^s}{(1+q\omega)^2}, \quad X_{n+1} = \dfrac{1}{K\sqrt{2K}} \cdot \left(\dfrac{q\omega - 1}{q\omega + 1}\right)^2, \\
X_{rs} + \sqrt{-1}\, Y_{rs} = \dfrac{1}{\sqrt{K}} \cdot \dfrac{\bar{\omega}^r \omega^s}{(q\omega+1)^2}, \quad X_{sn+1} + \sqrt{-1}\, Y_{sn+1} = \\
\qquad = \dfrac{1}{K} \cdot \dfrac{q\omega - 1}{(q\omega + 1)^2} \cdot \omega^s.
\end{cases}
$$

En différentiant les formules (37), et remplaçant le résultat dans (32) on obtient

$$
(38)\qquad ds^2 = \frac{\varepsilon_s |d\omega^s|^2}{(q\omega+1)^2} + q\frac{[\varepsilon_s(\omega^s d\bar{\omega}^s - \bar{\omega}^s d\omega^s)]^2}{(q\omega+1)^4}, \quad (s = 1, \ldots, n\,;\ \text{sommer})
$$

qui constitue justement la métrique complexe de l'espace sphérique quasi-symplectique V_{2n}, et si on fait dans (38) les substitutions (20) on obtient

$$
(39)\qquad ds^2 = \frac{\varepsilon_s[(dz^{2s-1})^2 + (dz^{2s})^2]}{(1+qz)^2} - \frac{4q\,dZ^2}{(1+qz)^4},
$$

qui constitue la forme réelle de la métrique de l'espace sphérique quasi-symplectique V_{2n}.

De (20), (37) on obtient les formules

$$
(40)\quad \begin{cases}
X_s = \dfrac{1}{2\sqrt{2q}} \cdot \dfrac{(z^{2s-1})^2 + (z^{2s})^2}{(qz+1)^2}, \quad X_{n+1} = \dfrac{1}{8q\sqrt{2q}} \cdot \left(\dfrac{qz-1}{qz+1}\right)^2, \\
X_{rs} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}} \cdot \dfrac{z^{2r-1}z^{2s-1} + z^{2r}z^{2s}}{(qz+1)^2}, \quad Y_{rs} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}} \cdot \dfrac{z^{2r}z^{2s-1} - z^{2r-1}z^{2s}}{(qz+1)^2}, \\
X_{sn+1} = \dfrac{1}{4q} \cdot \dfrac{qz-1}{(qz+1)^2} \cdot z^{2s-1}, \quad Y_{sn+1} = \dfrac{1}{4q} \cdot \dfrac{qz-1}{(qz+1)^2} \cdot z^{2s}.
\end{cases}
$$

On peut donc énoncer le

Théorème 6. *Les formules* (40) *réalisent un plongement topologique rationnel et isométrique de l'espace sphérique quasisymplectique* V_{2n}, *ayant la métrique* (21) *dans l'espace pseudoeuclidien* ${}^{M}E_N$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Vrănceanu G. — *Asupra unei clase de spații riemanniene omogene.* Studii și cerc. matem., 1954, t. V, nr. 1—2, p. 173—223.
2. Vrănceanu G. — *La géométrisation des espaces symplectiques.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 229, 1949, p. 386—388.
3. Vrănceanu G. — *Lecții de geometrie diferențială,* Edit. didactică și pedagogică, Buc. 1964, vol. II, p. 367—378.

4. Teleman C. — *Sur certains espaces symétriques.* Bull. Sci. Acad. R. S. R., t. VII, nr. 4, p. 977—1 002.
5. Grecu E. — *O clasă de spații simetrice* V_{4p} *cu metrică nedefinită.* St. și cerc. matem., 1970, t. 22, nr. 6, p. 843—866.
6. Rozenfeld B. A. — *Necvklidovi geometrii.* Moscova, 1955.

SCUFUNDAREA NATURALĂ A SPAȚIILOR SFERICE CVASISIMPLECTICE

Rezumat

Se consideră clasa de spații sferice cvasisimplectice V_{2n}. Acestea sînt definite ca subspații neolonome V^{2n}_{2n+1} pe hipersferele S_{2n+1} ale spațiului pseudoeuclidian ${}^{2m}E_{2n+2}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, cu ajutorul unei ecuații Pfaff, necomplet integrabilă.

Se consideră apoi problema scufundării naturale și izometrice a spațiului V_{2n} într-un spațiu pseudoeuclidian ${}^{M}E_N$, unde $N = (n+1)^2$; $M = 2m(n-m+1)$ și se găsesc formulele care realizează o scufundare topologică rațională a spațiului V_{2n} în ${}^{M}E_N$.