ESPACES PSEUDOLINÉAIRES RÉELS

PAR

D. RIMER

1. **Introduction.** En [5, p. 80], nous avons introduit la notion d'espace à structure de coordonnées sur une partie de R^n, en adaptant la notion correspondante définie par Veblen et Whitehead en [10, p. 24]. En [6—9], nous avons présenté certaines applications de cet espace pour la représentation géométrique de la structure d'une population statistique, ayant plusieurs facteurs.

L'étude de la structure algébrique de cet espace nous a conduit à la notion d'espace pseudolinéaire réel et, implicitement, d'espace pseudoaffine réel. Nous allons les définir et en donner certaines propriétés et applications.

2. **Espaces pseudolinéaires réels.** Soit l'ensemble des nombres réels, R, n parties non vides V^i de R, $(i = 1, \ldots, n)$, $(n \geq 3)$ et l'ensemble $\mathfrak{L}^n = \prod_{i=1}^{n} V^i$.

Définition 2.1. *Nous nommons espace pseudolinéaire réel de dimension n, l'ensemble $\mathfrak{L}^n$ muni de deux opérations, dont au moins la deuxième est partielle:*

I. *l'addition* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$ *qui satisfait aux axiomes:*

I.1. *Si* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$, $\mathbf{y} + \mathbf{z} \in \mathfrak{L}^n$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \in \mathfrak{L}^n$, *alors:* $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \in \mathfrak{L}^n$ *et* $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{L}^n$.

I.2. $\exists \mathbf{o} \in \mathfrak{L}^n$, *tel que* $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$.

I.3. $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$, $\exists (-\mathbf{x}) \in \mathfrak{L}^n$, *tel que* $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{o}$.

I.4. *Si* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$, *alors* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$.

II. *la multiplication par des scalaires réels, qui satisfait aux axiomes :*

II.1. $1.\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$.

II.2. *Si* $(\lambda\mu)\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$ *et* $\mu\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$, *alors* $\lambda(\mu\mathbf{x}) \in \mathfrak{L}^n$ *et* $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$, $\forall \lambda, \mu \in R$ *et* $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$.

II.3. *Si* $(\lambda + \mu)\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$, $\lambda\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$ *et* $\mu\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$, *alors* $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$ *et* $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

II.4. *Si* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$, $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathfrak{L}^n$, $\lambda\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$ *et* $\lambda\mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$, *alors* $\lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$ *et* $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

II.5. $\lambda.\mathbf{o} \in \mathfrak{L}^n$, $0.\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$, $(-1).\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$, $\forall \lambda \in R$, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$.

De tels espaces existent. Par exemple : 1) $\mathfrak{L}^n = Z \times Q \times R^{n-2}$; 2) $\mathfrak{L}^n = A \times R^{n-1}$, où $A = \{x \in Z \mid -10 \leqslant x \leqslant 10\}$. Dans le premier exemple, seulement l'opération externe est partielle, dans le deuxième, toutes les deux sont des opérations partielles. Les opérateurs chez le premier espace sont les éléments de R, respectivement Q ou Z, suivant que les éléments de $\mathfrak{L}^n$ sont de la forme $(0, 0, x^3, \ldots, x^n)$, $(0, x^2, x^3, \ldots, x^n)$, $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. De la même manière on établit les opérateurs chez le deuxième espace.

Conséquence 2.1. *On démontre les propositions suivantes :*

α) *Si* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$ *et* $(-\mathbf{x}) + \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^n$, *alors l'équation* $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$ *a une solution unique en* $\mathfrak{L}^n$.

β) $0.\mathbf{x} = \mathbf{o}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^n$; $\lambda.\mathbf{o} = \mathbf{o}$, $\forall \lambda \in R$.

γ) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Les démonstrations des deux dernières propositions utilisent l'axiome II.5.

Définition 2.2. *Soit un système de* p *vecteurs* $(\mathbf{v}_h)_{1 \leqslant h \leqslant p}$ *de* $\mathfrak{L}^n$. *Un vecteur* $\mathbf{v}$ *de* $\mathfrak{L}^n$ *sera nommé combinaison pseudolinéaire des vecteurs* $(\mathbf{v}_h)$ *s'il y a* p *nombres réels* $(\lambda^h)_{1 \leqslant h \leqslant p}$, *tels que :*

1) $\lambda^1\mathbf{v}_1 \in \mathfrak{L}^n, \ldots, \lambda^p\mathbf{v}_p \in \mathfrak{L}^n$, $\lambda^h\mathbf{v}_h \in \mathfrak{L}^n$ (h — indice de sommation),

2) $\mathbf{v} = \lambda^h\mathbf{v}_h$.

L'expression $\lambda^h\mathbf{v}_h$ *sera nommée combinaison pseudolinéaire des vecteurs* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ *et le système des vecteurs sera un système de vecteurs pseudolinéairement dépendants.*

Remarque 2.1. Vu les axiomes I.1 et I.4, l'ordre des termes dans la combinaison pseudolinéaire est arbitraire.

Conséquence 2.2. *Le vecteur* $\mathbf{o}$ *est une combinaison pseudolinéaire de toute famille de vecteurs de* $\mathfrak{L}^n$ (on utilise la conséquence 2.1 (β)).

Définition 2.3. *Un système de* s *vecteurs* $(\mathbf{v}_l)_{1 \leqslant l \leqslant s}$, $s \leqslant n$, *de* $\mathfrak{L}^n$, *sera nommé pseudolinéairement indépendant si, pour chaque combinaison pseudolinéaire* $\lambda^l\mathbf{v}_l \in \mathfrak{L}^n$ (l — indice de sommation), *l'égalité* $\lambda^l\mathbf{v}_l = \mathbf{o}$ *implique* $\lambda^1 = \ldots = \lambda^s = 0$.

Les vecteurs $(\mathbf{v}_l)$ *seront dits alors pseudolinéairement indépendants.*

Définition 2.4. *Un système de* n *vecteurs* $(\mathbf{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de* $\mathfrak{L}^n$ *sera nommé une base de* $\mathfrak{L}^n$ *si :*

1. *les vecteurs* $(\mathbf{v}_i)$ *sont pseudolinéairement indépendants,*

2. *chaque vecteur* $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}^n$ *est une combinaison pseudolinéaire unique des vecteurs* $(\mathbf{v}_i)$, $\mathbf{v} = t^i\mathbf{v}_i$.

Les scalaires $(t^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, *déterminés de manière unique seront nommés les coordonnées du vecteur* $\mathbf{v}$ *dans la base* $(\mathbf{v}_i)$.

Théorème 2.1. *Soit l'espace linéaire réel* R^n ($n \geqslant 3$) *et un système* $B = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ *de vecteurs de* R^n, *dont* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ *sont linéairement indépendants* (en R^n) *et* $\mathbf{u}$ *est donné par*

$$\mathbf{u} = \alpha^j\mathbf{e}_j \quad (j = 1, \ldots, n-1 : \quad \alpha^j \in R). \tag{2.1}$$

Alors il y a, au moins un espace pseudolinéaire réel $\mathfrak{L}^n$, *pour lequel* B *est une base.*

Démonstration. Il faut construire un ensemble $\mathfrak{L}^n = \{(t^1, \ldots, t^n) \in R^n\}$, muni de l'addition et de la multiplication par des scalaires réels, qui satisfait aux axiomes I.1—I.4, II.1—II.5 et, de plus

$$t^1\mathbf{u} + t^{j+1}\mathbf{e}_j = \mathbf{o} \Rightarrow t^i = 0, \tag{2.2}$$

$$t_1^1\mathbf{u} + t_1^{j+1}\mathbf{e}_j = t_2^1\mathbf{u} + t_2^{j+1}\mathbf{e}_j \Rightarrow t_1^i = t_2^i. \tag{2.3}$$

Vu (2.1) et l'indépendance linéaire des vecteurs $(\mathbf{e}_j)$, les deux systèmes d'implications (2.2) et (2.3) deviennent :

$$t^1\alpha^j + t^{j+1} = 0 \Rightarrow t^i = 0, \tag{2.2'}$$

$$(t_1^1 - t_2^1)\,\alpha^j + (t_1^{j+1} - t_2^{j+1}) = 0 \Rightarrow t_1^i = t_2^i. \tag{2.3'}$$

(2.2′) et (2.3′) peuvent avoir lieu seulement dans certaines conditions restrictives et conduisent à divers espaces pseudolinéaires réels. En voici quelques-uns :

$$\alpha_1^1 \in I = R - Q\,;\ V_1^c \subseteq Q (c = 1, 2),\ V_1^b \subseteq R,\ (b = 3, \ldots, n) \tag{2.4}$$

$$\mathfrak{L}_1^n = \prod_{i=1}^{n} V_1^i,$$

$$\alpha_2^1 \text{ — nombre transcendent}\,;\ V_2^1 \subseteq R,\ V_2^2 \subseteq Q,\ V_2^b \subseteq R\,; \tag{2.5}$$

$$\mathfrak{L}_2^n = \prod_{i=1}^{n} V_2^i,$$

$$\alpha_3^1 = \frac{p}{q} \in Q,\ (p, q) = 1,\ \alpha^a \in R\ (a = 2, \ldots, n-1)\,; \tag{2.6}$$

$$V_3^1 = \left\{ x \in Z \,\middle|\, |x| < \left|\frac{q}{2}\right| \right\},\ V_3^2 \subseteq Z,\ V_3^b \subseteq R,\ \mathfrak{L}_3^n = \prod_{i=1}^{n} V_3^i.$$

Le théorème est démontré.

Remarque 2.2. Si

$$V_1^c = Q \quad (c = 1,\ 2),\quad V_1^b = R,\quad (b = 3, \ldots, n), \tag{2.5'}$$

$$V_2^1 = R,\ V_2^2 = Q,\ V_2^b = R, \tag{2.6'}$$

alors

$$\mathfrak{L}_c^n = \prod_{i=1}^{n} V_c^i \tag{2.7}$$

sont des espaces pseudolinéaires réels à n dimensions, pour lesquels la seule opération partielle est la multiplication par des scalaires réels. En même temps, chacun d'eux est un espace linéaire à n dimensions sur Q.

3. Espaces pseudoaffines réels. En partant de la définition de l'espace ponctuel affine [2, p. 217], nous allons introduire une notion correspondante, par la

Définition 3.1. *Soit $\mathfrak{L}^n$ un espace pseudolinéaire réel à n dimensions, pour lequel seulement l'opération externe soit partielle. $\mathfrak{A}$ — un ensemble arbitraire et une application φ: $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A} \to \mathfrak{L}^n$ qui associe à chaque couple $(A, B) \in \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ un élement $\mathbf{AB} = \mathbf{v} \in \mathfrak{L}^n$. Si φ satisfait aux conditions :*

1) *$\exists O \in \mathfrak{A}$, de manière que $\forall S \in \mathfrak{A}$, l'application $\varphi(O, S) = \mathbf{OS} = \mathbf{v} \in \mathfrak{L}^n$, soit bijective.*

2) *$\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$, $\forall A, B, C \in \mathfrak{A}$,*

alors $\mathfrak{A}$ sera nommé espace ponctuel pseudoaffine réel à n dimensions, attaché à $\mathfrak{L}^n$. Il sera noté $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}^n)$ et ses éléments seront nommés points.

Les notions de repère et de changements de repère ont les mêmes significations que dans la théorie des espaces affines.

Remarque 3.1. De la définition 3.1 il résulte qu'on ne peut pas associer à chaque espace pseudolinéaire réel un espace pseudoaffine réel. Il est nécessaire que l'addition soit une opération interne, partout définie en $\mathfrak{L}^n$ et donc, $\mathfrak{L}^n$ soit groupe abélien.

Exemple 3.1. Soient les espaces pseudolinéaires (2.7). Les applications $\varphi_c : \mathfrak{L}_c^n \times \mathfrak{L}_c^n \to \mathfrak{L}^n$, $(c = 1,\ 2)$, définies par

$$\varphi_c(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{w} - \mathbf{v},\ \forall \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathfrak{L}_c^n,$$

satisfont aux conditions de la définition 3.1. Elles déterminent donc, sur $\mathfrak{L}_c^n$, une structure d'espace pseudoaffine réel à n dimensions.

Exemple 3.2. Si dans l'espace affine réel A_n, rapporté à un repère $(O ; \mathbf{e}_i)$, on construit les ensembles M_c donnés par

$$M_c = \{S \in A_n \mid S = t^i\mathbf{e}_i,\ (t^1, \ldots, t^n) \in L_c^n(2.7)\},$$

on vérifie que M_c sont des espaces pseudoaffines réels, à n dimensions, associés à $\mathfrak{L}_c^n$.

Théorème 3.1. *Si A_{n-1} est un espace affine réel associé à l'espace linéaire réel R^{n-1}, alors il y a au moins un espace pseudoaffine réel à n dimensions $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}^n)$, tel que $\mathfrak{A} \subset A_{n-1}$.*

Demonstration. Soit $(O ; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ un repère en A_{n-1}, l'espace pseudolinéaire réel à n dimensions, $\mathfrak{L}_1^n(2.7)$ et le vecteur $\mathbf{u}_1$ donné par (2.1) et (2.4) : $\mathbf{u}_1 = \alpha^j\mathbf{e}_j$, $\alpha^1 \in I = R - Q$, $\alpha^a \in R$, $(a = 2, \ldots, n-1)$. Dans le plan $(O : \mathbf{u}_1, \mathbf{e}_1)$ on construit la grille

$$g_1 = {}_1P \in A_{n-1} \mid P = t^1\mathbf{u}_1 + t^2\mathbf{e}_1 :\ t^1 \in Q,\ t^2 \in Q\} \tag{3.2}$$

et, par les noeuds P de g_1 on considère les variétés linéaires à $n-2$ dimensions W_{n-2}, données par

$$W_{n-2} = A_{n-2} + \mathbf{OP}, \tag{3.3}$$

où A_{n-2} est l'espace affine engendré par $(\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$.

Notons par $\mathfrak{M}_1$ l'ensemble des points des variétés W_{n-2}. $\mathfrak{M}_1$ est le produit direct de g_1 et A_{n-2}. Vu les bijections : $g_1 \longleftrightarrow Q^2$, $A_{n-2} \longleftrightarrow R^{n-2}$, il résulte la bijection : $\mathfrak{M}_1 \longleftrightarrow \mathfrak{L}_1^n$. On a ainsi l'application bijective $\varphi_1 : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{L}_1^n$, $\varphi_1(S) = \mathbf{OS} = \mathbf{v} \in \mathfrak{L}_1^n$, $\forall S \in \mathfrak{M}_1$. Alors, à chaque couple de points $S_1, S_2 \in \mathfrak{M}_1$, correspondant à $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathfrak{L}_1^n$, on peut associer le vecteur $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \in \mathfrak{L}_1^n$ et, vu l'exemple 3.1, on a, sur $\mathfrak{M}_1$, la structure d'espace pseudoaffine réel n-dimensionel, associé à $\mathfrak{L}_1^n$. Notons cet espace par $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{L}_1^n)$.

De la même sorte on peut construire l'espace pseudoaffine réel $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{L}_2^n)$, en considérant $\mathbf{u}_2 = \alpha_2^j\mathbf{e}_j$ avec α_2^1 — transcendent et $\mathfrak{L}_2^n = R \times Q \times R^{n-2}$. Pour ces deux espaces pseudoaffines, les repères sont $R_c = (O ; \mathbf{u}_c, \mathbf{e}_j)$. Ils sont nommés *repères pseudoaffines*. Évidemment, considérés comme ensembles de points, on a

$$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset A_{n-1}.$$

Le théorème est démontré.

Le groupe fondamental G de l'espace $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{L}_1^n)$, est donné par

$$t^{c'} = A_c^{c'}\, t^c + B^{c'}$$

$$t^{b'} = A_b^{b'}\, t^b + B^{b'}$$

(3.4) avec

$$A_c^{c'},\ B^{c'} \in Q,\quad \det(A_c^{c'}) \neq 0,\ (c, c' = 1,\ 2 ;\ b, b' = 3, \ldots, n)$$

$$A_b^{b'},\ B^{b'} \in R,\quad \det(A_b^{b'}) \neq 0.$$

(3.4) constitue un sousgroupe du groupe affine ; il transforme la grille g_1 (3.2) en soi-même, menant un noeud en un autre. L'espace, $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{L}_1^n)$ est homogène par rapport à ce groupe.

Le groupe fondamental de l'espace $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{L}_2^n)$ est aussi (3.4), à une modification :

$$A_c^{1'},\ B^{1'} \in R. \tag{3.4'}$$

Pour

$$A_1^{1'} = 1,\ A_2^{1'} = B^{1'} = 0,$$

on obtient un sousgroupe G_1 de G, intransitif, l'orbite d'un point $T \in \mathfrak{M}$, étant formée des variétés W_{n-2}, dont les origines P sont caractérisées par le même t^1.

Proposition 3.1. *Soient F_c les ensembles des applications bijectives de M_c ou $\mathfrak{M}_c$ sur $\mathfrak{L}_c^n$. Les familles d'ensembles $(M_c, \mathfrak{L}_c^n, F_c, G_c)$, $(\mathfrak{M}_c, \mathfrak{L}_c^n, F_c, G_c)$ constituent des espaces à structure de coordonnées sur $\mathfrak{L}_c^n$, suivant la définition donnée en* [5].

En effet, M_c, respectivement $\mathfrak{M}_c$, sont les espaces géométriques, $\mathfrak{L}_c^n$ — les espaces arithmétiques, F_c — les ensembles de systèmes préferentiels de coordonnées et G_c — les groupes de transformations de coordonnées. On vérifie que les axiomes y donnés sont satisfaits.

4. Considérations sur une topologie de $\mathfrak{L}_c^n$, M_c, $\mathfrak{M}_c$. Soit l'espace R^n, organisé en espace topologique, dans lequel une base de voisinages d'un point est formée par l'ensemble des cubes n-dimensionnels, ayant le centre au point respectif et l'arête égale à un nombre rationnel.

Nous organisons les espaces $\mathfrak{L}_c^n$, $(c = 1, 2)$ (2.7), comme des sousespaces topologiques de R^n, munis de la topologie induite par la topologie de R^n, les voisinages en $\mathfrak{L}_c^n$ étant les intersections des voisinages de R^n avec $\mathfrak{L}_c^n$. Les espaces topologiques ainsi obtenus seront notés par $(\mathfrak{L}_c^n, \tau_c)$. Nous définissons des topologies analogues sur les espaces pseudoaffines $M_c(\mathfrak{L}_c^n)$ de l'exemple 3.2 et notons les espaces topologiques obtenus par (M_c, τ_c').

Soient les espaces pseudoaffines $\mathfrak{M}_c(\mathfrak{L}_c^n)$ construits dans le théorème 3.1 et les espaces topologiques $(\mathfrak{L}_c^n, \tau_c)$. Considérons les applications bijectives.

$$\varphi_c : \mathfrak{M}_c \to \mathfrak{L}_c^n \tag{4.1}$$

qui associent à chaque point $S_c \in \mathfrak{M}_c$ l'élément correspondant $(t_c^1, \ldots, t_c^n) \in \mathfrak{L}_c^n$, où (t_c^i) sont les coordonnées de S_c dans le repère $(O; \mathbf{u}_c, \mathbf{e}_j)$. On obtient ainsi, sur $\mathfrak{M}_c$, la topologie τ_c'', la préimage de la topologie τ_c de $\mathfrak{L}_c^n$ relative à l'application φ_c. Nous notons ces espaces par $(\mathfrak{M}_c, \tau_c'')$. Il résulte immédiatement la

Proposition 4.1. *L'application* (4.1) *ainsi que l'application*

$$\psi_c : M_c \to \mathfrak{L}_c^n,\ (c = 1, 2), \tag{4.2}$$

définie de la même manière que (4.1) *et l'application*

$$\Phi_c : M_c \to \mathfrak{M}_c,\ \Phi_c = \varphi_c^{-1} \cdot \psi_c \tag{4.3}$$

sont des homéomorphismes.

Proposition 4.2. *Les espaces $(\mathfrak{L}_c^n, \tau_c)$, $(c = 1, 2)$, sont localement compacts.*

En effet, on peut considérer les intersections des intervalles n-dimensionnels fermés, d'arête a, $a < \infty$, avec $\mathfrak{L}_c^n$. En les organisant comme des sousespaces topologiques de $\mathfrak{L}_c^n$, avec la topologie induite par τ_c, il résulte qu'elles sont compactes. Les espaces $(\mathfrak{L}_c^n, \tau_c)$ étant séparés et chaque point ayant un voisinage compact, ils sont localement compacts.

Le même résultat pour (M_c, τ_c') et $(\mathfrak{M}_c, \tau_c'')$.

Proposition 4.3. *Les espaces $(\mathfrak{M}_c, \tau_c')$, $(c = 1, 2)$, ne sont pas connexes.*

En effet, si par un point $T_c(x_0^i)$, avec $x_0^2 \in I = R - Q$ et $x_0^1 \in R$, $x_0^b \in R$, $(b = 3, \ldots, n)$, on mène un $(n-2)$-plan π, parallèle aux variétés W_{n-2}, alors chacun des espaces $\mathfrak{M}_c$ est décomposé en deux parties A_c, B_c et l'on a: $A_c \cup B_c = \mathfrak{M}_c$, $A_c \cap B_c = \Phi$. Pour chaque point $S_c \in A_c$ il y a une sphère $\sigma_c(S_c, \rho_c)$ avec $\rho_c < |T_c - S_c|$ et l'on a : $\sigma_c \cap B_c = \Phi$ et, donc $S_c \notin B_c'$, $A_c \cap B_c' = \Phi$. De la même manière on obtient $A_c' \cap B_c = \Phi$.

Les ensembles W_{n-2} sont les composantes connexes.

Le même résultat pour $(\mathfrak{L}_c^n, \tau_c)$ et (M_c, τ_c').

On peut considérer diverses figures et les étudier dans les espaces M_c, $\mathfrak{M}_c$.

Définition 4.1. *Soit B une variété dans l'espaces affine A_n. Nous nommons pseudovariétés correspondantes à B en $M_c \subset A_n (c = 1, 2)$ et en $\mathfrak{M}_c \subset A_{n-1}$ les ensembles*

$$B_c' = B \cap M_c, \quad B_c'' = \Phi_c(B_c')$$

où Φ_c est donné par (4.3).

Les caractérisations analytiques des pseudovariétés s'obtiennent en ajoutant aux équations de la variété B les restrictions imposées aux coordonnées, par la définition de $\mathfrak{L}_c^n$.

Exemple 4.1. Soient $S_0, \ldots, S_n$ un système de $(n+1)$ points de l'espace pseudoaffine $\mathfrak{M}_c(\mathfrak{L}_c^n)$, $(c = 1, 2)$, tel que les vecteurs $S_0 S_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ soient pseudolinéairement indépendants. Un *pseudosymplexe* $(n+1)$-dimensionnel de $\mathfrak{M}_c$ sera l'ensemble σ_c donné par

$$\sigma_c(S_0, \ldots, S_n) = \left\{ S \in \mathfrak{M}_c \mid S = \sum_{p=0}^{n} t^p S_p,\ t^p \geqslant 0,\ \sum_{p=0}^{n} t^p = 1,\ (t^1, \ldots, t^n) \in \mathfrak{L}_c^n \right\}. \tag{44}$$

Considéré comme une figure de l'espace affine A_{n-1}, le pseudosymplexe consiste des symplexes $(n-2)$-dimensionnels, situés dans les variétés W_{n-2}.

Dans le pseudosymplexe 3- ou 4-dimensionnel (qui est une figure de l'espace affine A_2, respectivement A_3) on peut représenter les objets d'une population statistique ayant 4 ou 5 facteurs, par des points, les coordonnées barycentriques $t^0, \ldots, t^p$ indiquant les poids des composantes. Les voisinages des points, définis plus haut réunissent les objets ayant une composition structurelle rapprochée. Cette possibilité a été relevée par nous en [6, 7] et utilisée effectivement par nous, en [8, p. 65—69], [9, p. 112—114] et par Gheorghe Popa en [4, p. 44—52] et dans sa thèse.

Remarque 4.1. Si dans la géométrie descriptive, les figures de l'espace à trois dimensions sont représentées par leurs épures, en deux ou trois plans et, pour les figures de l'espace à quatre dimensions un tel problème ne peut être posé, les espaces pseudoaffines $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^3)$ et $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^4)$, nous permettent de nous faire une idée intuitive sur la figure considérée (de A_3, respectivement de A_4), en connaissant l'intersection de cette figure avec les droites W_1, respectivement avec les plans W_2.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Algèbre*, Livre 2, Hermann, Paris, 1947.
2. Cruceanu V. — *Elemente de algebră liniară și geometrie*. Universitatea „Al. I. Cuza", Iași, 1971.
3. Gheorghiev Gh., Oproiu V. — *Geometrie diferențială*, p. I. Universitatea „Al. I. Cuza", Iași, 1971.
4. Popa Gheorghe, *Chimismul unor minerale de mangan*. An. șt. Univ. Iași, secția Geologie, t. XVII, 1971, p. 43—55.
5. Rimer D. — *Espace à structure de coordonnées sur une partie de R_n*. Bull. Math., t. 14 (62), no. 1, 1970, pp. 75—85.
6. Rimer D. — *Une meilleure utilisation du tétraèdre pour la représentation géométrique des roches à quatre composantes*. Bull. Soc. franc. Minéral. et Cristallogr., 91, 1968, pp. 513—515.
7. Rimer D. — *Sur la représentation géométrique des roches quinaires*. Bull. Soc. franc. Minéral. et Cristallogr., 92, 1969, pp. 508—509.
8. Rimer D. — *Reprezentarea grafică cu ajutorul diagramei de structură*. Rev. de statistică, XVIII, no. 10, 1969, pp. 59—69.
9. Rimer D. — *Diagrammes quaternaires et quinaires utilisables dans la géographie de la population*. An. șt. Univ. Iași, secția Geografie, t. XVII, 1971, pp. 109—115.
10. Veblen O., Whitehead J. H. C. — *The Foundations of Differential Geometry*. Cambridge Univ. Press, 1932.

SPAȚII PSEUDOLINIARE REALE

Rezumat

Se definesc noțiunile de spațiu pseudoliniar real, vectori pseudoliniar independenți, bază și se construiesc spații pseudoliniare de dimensiune n, ale căror baze sînt sisteme de n vectori liniar dependenți în R^n. Se definește apoi noțiunea de spațiu pseudoafin și se construiesc spații pseudoafine n-dimensionale, ale căror puncte sînt părți proprii ale unor spații afine $(n-1)$-dimensionale.

Se definește o topologie pe aceste spații. Se definesc pseudovarietățile ca figuri ale spațiilor pseudoafine și se indică două exemple de asemenea pseudovarietăți cu aplicațiile lor în alte științe.