ASUPRA UNEI PROBLEME A LUI FRANK HARARY

Rezumat

În această Notă sînt expuse cîteva rezultate privitoare la următoarea problemă pusă de Frank Harary: fie p grafuri $\overline{G}^j = (\overline{V}^j, \overline{U}^j)$, $1 \leqslant j \leqslant p$, cu cîte p vîrfuri, fiecare avînd cel puțin un vîrf izolat. Să se determine un graf $G = (V, U)$, cu p vîrfuri, astfel încît graful G^j, obținut din G prin înlăturarea muchiilor incidente cu vîrful v_j, să fie izomorf cu graful $\overline{G}^j$, $(1 \leqslant \leqslant j \leqslant p)$.

Se arată cum se poate determina numărul de vîrfuri de ordin i, x_i, ale grafului G. Se atașează oricărui graf un sistem de vectori $(p-1)$-dimensionali și se expune un algoritm pentru construcția unui graf care are același sistem de vectori pentru grafurile G^j ca și pentru grafurile $\overline{G}^j$, date inițial.

ALGEBRA SPINORILOR PESTE UN CORP OARECARE

DE

AGNETA VESCAN

Pînă în prezent algebra spinorilor a fost definită numai peste corpul numerelor reale și complexe. În această lucrare vom extinde definiția pentru un corp de bază oarecare, comutativ, de caracteristică diferită de 2. (Vezi [1] și [2]).

Fie deci R_n un spațiu vectorial n-dimensional peste un corp comutativ K (de caracteristică $\neq 2$) și $f(x, y)$ o formă biliniară simetrică, definită pe $R_n \times R_n$. Fie e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, o bază ortogonală relativ la forma biliniară $f(x, y)$. Mai considerăm spațiul liniar $\times^p R_n$ al tensorilor de p ori contravarianți. Vom numi multivector un tensor de p ori contravariant antisimetric în toți indicii. Un multivector se numește simplu dacă este produsul exterior al unui număr de vectori dați într-o anumită ordine.

Se știe (vezi [4], [5]) că un spinor φ este un sistem format dintr-un scalar, un vector, un bivector, ..., un n-vector, și că poate fi scris descompus după multivectorii de bază în felul următor:

$$\varphi = \varphi^0 + \Sigma \varphi^{i_1} e_{i_1} + \Sigma \varphi^{i_1 i_2} \underset{(2)}{e_{i_1 i_2}} + \cdots +$$

$$\cdots + \Sigma \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k} \underset{(k)}{e_{i_1 i_2 \ldots i_k}} + \cdots + \varphi^{12 \ldots n} \underset{(n)}{e_{12 \ldots n}},$$

sumele se extind la toate combinările numerelor $1, 2, \ldots, n$ luate cîte k, k fiind numărul de indici. Deci $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. În această descompunere φ^0 este scalarul, φ^{i_1} $(i_1 = 1, 2, \ldots, n)$ componentele vectorului, ..., $\varphi^{12 \ldots n}$ componenta n-vectorului, formînd în același timp componentele spinorului. Observăm că spinorul poate fi definit ca suma directă dintre un scalar, un vector, un bivector, ..., un n-vector.

Această definiție poate fi păstrată și în cazul general, componentele spinorului φ fiind elemente din corpul K.

Operațiile de adunare și înmulțire cu un scalar se definesc în modul obișnuit, iar mulțimea spinorilor formează un spațiu liniar 2^n-dimensional peste corpul K, numit spațiu spinorial și notat cu S_{2^n}. În continuare vom defini produsul a doi spinori dînd legea de înmulțire a multivectorilor de bază.

Definiție. *Produsul lui* $\underset{(k)}{e_{i_1 i_2 \cdots i_k}}$ *cu* $\underset{(l)}{e_{j_1 j_2 \cdots j_l}}$ *este*

$$\underset{(k)}{e_{i_1 i_2 \cdots i_k}} \underset{(l)}{e_{j_1 j_2 \cdots j_l}} = (-1)^N \underset{(s)}{e_{q_1 q_2 \cdots q_s}} \prod_{k \in A \cap B} f(e_k, e_k),$$

unde $q_1, q_2, \ldots, q_s$ *este suma submulțimilor de numere naturale* $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *și* $B = \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ *în inelul Boole al părților numerelor naturale* $1, 2, \ldots, n$, *iar* N *este numărul inversiunilor în șirul de indici* $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l$. *Dacă intersecția* $A \cap B$ *este vidă atunci în locul produsului punem* 1.

Se arată ușor că mulțimea spinorilor înzestrată cu aceste legi de compoziție formează o algebră pe care o notăm C_n.

Observăm următoarele:

1. Produsul spinorial a doi vectori de bază diferiți e_{i_1} și e_{i_2} va fi

$$e_{i_1} e_{i_2} = \underset{(2)}{e_{i_1 i_2}} = -\underset{(2)}{e_{i_2 i_1}} = -e_{i_2 i_1} \quad \text{cu} \quad i_1 \neq i_2,$$

iar a doi vectori de bază egali:

$$e_{i_1} e_{i_1} = (e_{i_1})^2 = f(e_{i_1}, e_{i_1}).$$

2. Dacă φ și ψ sînt doi spinori care se reduc la doi vectori diferiți

$$\varphi = \sum_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1} e_{i_1}; \quad \psi = \sum_{i_1=1}^{n} \psi^{i_1} e_{i_1},$$

produsul lor va fi

$$\varphi\psi = \sum_{i_1 i_2 = 1}^{n} (\varphi^{i_1}\psi^{i_2} - \varphi^{i_2}\psi^{i_1}) \underset{(2)}{e_{i_1 i_2}} + \sum_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1}\psi^{i_1} f(e_{i_1}, e_{i_1}),$$

iar

$$\psi\varphi = \sum_{i_1 i_2 = 1}^{n} (\psi^{i_1}\varphi^{i_2} - \psi^{i_2}\varphi^{i_1}) \underset{(2)}{e_{i_1 i_2}} + \sum_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1}\psi^{i_1} f(e_{i_1}, e_{i_1}),$$

deci

$$\varphi\psi + \psi\varphi = 2 \sum_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1}\psi^{i_1} f(e_{i_1}, e_{i_1}) = 2 f(\varphi, \psi).$$

Dacă φ și ψ sînt ortogonali, atunci $f(\varphi, \psi) = 0$, deci $\varphi\psi = -\psi\varphi$, și invers. Observăm că de aici rezultă din nou punctul 1.

În particular

$$\varphi\varphi = \varphi^2 = f(\varphi, \varphi) = \sum_{i_1=1}^{n} (\varphi^{i_1})^2 f(e_{i_1}, e_{i_1}).$$

Aceste proprietăți rămîn valabile în orice bază ortogonală față de forma biliniară $f(x, y)$.

În cazul particular al unui spațiu euclidian real forma biliniară $f(x, y)$ se înlocuiește cu produsul scalar, baza ortogonală cu o bază ortonormată și se obțin toate rezultatele cunoscute.

Algebra C_n a spinorilor peste un corp oarecare K se bucură de unele proprietăți care au fost demonstrate în cazul corpului de bază complex sau real. De exemplu se pot defini semispinorii pari și impari, se poate arăta că submulțimea semispinorilor pari formează o subalgebră C_n^p, iar a celor impari un subspațiu liniar C_n^m în C_n; amîndoi fiind de dimensiune 2^{n-1} și că orice spinor este suma directă a unui semispinor par și a unui semispinor impar: $\varphi = \varphi' + \varphi''$.

În continuare vom presupune că determinantul matricei formei biliniare f este pătratul unui element din corpul K, adică putem scrie

$$(1) \qquad |A| = \prod_{i=1}^{n} f(e_i, e_i) = \alpha^2; \quad \alpha \in K.$$

În acest caz vom obține o serie de rezultate asemănătoare celor pe care le avem cînd K este corpul complex sau real. Fie spinorii:

$$\omega = \frac{1}{2\alpha}(\alpha + \underset{(n)}{e_{12\cdots n}}); \qquad \omega' = \frac{1}{2\alpha}(\alpha - \underset{(n)}{e_{12\cdots n}}),$$

care au următoarele proprietăți:

1. $\omega + \omega' = 1$.

2. $\omega^2 = \dfrac{1}{4\alpha^2}[\alpha^2 + 2\alpha \underset{(n)}{e_{12\cdots n}} + (\underset{(n)}{e_{12\cdots n}})^2]$,

dar

$$(\underset{(n)}{e_{12\cdots n}})^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha^2.$$

Avem pentru $n = 2h$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{2h(h-1)}{2}} = (-1)^{h(2h-1)} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } h \text{ par}, \\ -1 & \text{pentru } h \text{ impar}, \end{cases}$$

și pentru $n = 2h + 1$ obținem același rezultat. Deci

$$(\underset{(n)}{e_{12\cdots n}})^2 = \begin{cases} \alpha^2 & \text{pentru } h \text{ par}, \\ -\alpha^2 & \text{pentru } h \text{ impar}, \end{cases} \qquad n \text{ arbitrar},$$

și atunci $\omega^2 = \omega$ pentru orice n, dar numai pentru h par.

În aceleași condiții și $\omega'^2 = \omega'$, deci în condițiile obținute, ω și ω' sînt idempotente.

3. $$\omega\omega' = \frac{1}{4\alpha^2}[\alpha^2 - (\underset{(n)}{e_{12\cdots n}})^2] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}[\alpha^2 - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\alpha^2] = \begin{cases} 0 \text{ pentru } n \text{ arbitrar și } h \text{ par,} \\ 1/2 \text{ pentru rest,} \end{cases}$$

deci în primul caz ω și ω' sînt și divizori ai lui zero.

4. Pentru n par ($n = 2h$) ω și ω' sînt elemente centrale în C'_n. În adevăr, pe de o parte ω este un spinor par, deoarece $\underset{(n)}{e_{12\cdots n}}$ este par, pe de altă parte orice spinor par este o combinație liniară de multivectori de bază de ordin par; însă orice multivector de bază de ordin par este un produs de bivectori de bază și avem $e_i e_j \omega = \omega e_i e_j$, ceea ce înseamnă că ω comută cu orice spinor par: $\omega\varphi' = \varphi'\omega$. Vom nota cu Z' centrul lui C'_n. La fel obținem că și $\omega' \in Z'$.

Pentru n impar ($n = 2h + 1$), ω și ω' sînt elemente centrale în algebra spinorială C_n. În acest caz ω și ω' sînt impari $e_i\omega = \omega e_i$, $e_i\omega' = \omega' e_i$ pentru orice vector de bază e_i, ceea ce înseamnă că ω și ω' comută cu orice spinor. Vom nota cu Z centrul lui C_n.

Teoremă. *Pentru n oarecare ($n = 2h$ sau $n = 2h + 1$) și h par, spinorii de forme $\varphi^{(1)} = \omega\varphi'$ și $\varphi^{(2)} = \omega'\varphi'$, unde $\varphi' \in C'_n$, formează subalgebre în C_n.*

Demonstrație. Avem

$$\varphi^{(1)} + \psi^{(1)} = \omega\varphi' + \omega\psi' = \omega(\varphi' + \psi') \text{ și } \alpha\varphi^{(1)} = \alpha(\omega\varphi') = \omega(\alpha\varphi'),$$

unde $\varphi' + \psi'$ și $\alpha\varphi'$ sînt spinori pari, și

$$\varphi^{(1)}\psi^{(1)} = (\omega\varphi')(\omega\psi') = \omega^2\varphi'\psi' = \omega(\varphi'\psi'),$$

$\varphi'\psi'$ fiind un spinor par. Deci suma, produsul cu un scalar și produsul sînt tot spinori de forma considerată. Demonstrația este analogă pentru spinorii de forma $\varphi^{(2)} = \omega'\varphi'$.

Aceste subalgebre le vom nota cu A^1_n și A^2_n.

Observații: 1. Subalgebrele A^1_n și A^2_n nu au spinori comuni în afară de 0. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $\omega\varphi' = \omega'\psi'$. Înmulțind la dreapta cu ω obținem $\omega\varphi' = 0$, deci φ' trebuie să fie nul.

2. Pentru $n = 2h$, ω și ω' fac parte din C'_n, deci $\omega\varphi'$ și $\omega'\varphi'$ sînt spinori pari, de unde rezultă că subalgebrele A^1_n și A^2_n sînt subalgebre chiar în C'_n.

3. Algebra C'_n a spinorilor pari este omomorfă cu subalgebrele A^1_n și A^2_n, deoarece fiecărui spinor par îi corespunde un spinor, și numai unul, din A^1_n, respectiv din A^2_n, iar operațiile se păstrează. Observăm că acest omomorfism este surjectiv.

Teoremă. *Pentru $n = 2h + 1$ și h par algebra C_n se descompune în suma directă a subalgebrelor A^1_n și A^2_n care în acest caz, sînt izomorfe cu C'_n.*

Demonstrația este asemănătoare cu cea din [3], însă trebuie folosite ω și ω' definite în această lucrare.

Teoremele demonstrate în [3] și [6] în legătură cu idealele proprii din C_n rămîn valabile, dar cu mici modificări. Modificările trebuie efectuate în cazul $n = 2h + 1$ și anume h trebuie să fie par, deoarece în demonstrații se folosește proprietatea $\omega\omega' = 0$ care este valabilă numai în acest caz.

Pentru a determina centrul algebrei C_n nu mai avem nevoie de condiția (1). Ca și în cazul corpului de bază complex sau real avem

Teoremă: *Pentru n par centrul Z al algebrei C_n se reduce la corpul de bază, iar pentru n impar conține spinorii de forma*

$$\gamma = \gamma^0 + \gamma^{12\cdots n}\underset{(n)}{e_{12\cdots n}}.$$

Demonstrație. În demonstrație, care de altfel este asemănătoare cu cea din [6], trebuie să folosim aplicațiile liniare

$$f_k(\varphi) = \frac{1}{2f(e_k, e_k)}[f(e_k, e_k)\varphi + e_k\varphi e_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Aceste aplicații au proprietatea: Condiția necesară și suficientă pentru ca spinorul φ să fie un element central este ca el să fie invariant la orice aplicație liniară $f_k (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Într-adevăr dacă $\varphi \in Z$ atunci avem

$$f_k(\varphi) = \frac{1}{2f(e_k, e_k)}[f(e_k, e_k)\varphi + \varphi e_k e_k] = \frac{1}{2f(e_k, e_k)}2f(e_k, e_k)\varphi$$

și invers, fie $f_k(\varphi) = \varphi$, adică

$$\frac{1}{2f(e_k, e_k)}[f(e_k, e_k)\varphi + e_k\varphi e_k] = \varphi,$$

de unde

$$e_k\varphi e_k = f(e_k, e_k)\varphi:$$

înmulțind acum la dreapta cu e_k obținem $e_k\varphi = \varphi e_k$. În continuare demonstrația este asemănătoare cu cea din [6].

Observăm că din această teoremă rezultă și direct că pentru $n = 2h + 1$, ω și ω' sînt elemente centrale.

Cu teoremele de reprezentare ale algebrei spinorilor ne vom ocupa într-o lucrare viitoare.

BIBLIOGRAFIE

1. Chevalley Cl. — *The algebraic Theory of Spinors*. New York, Columbia University Press, 1955, cap. II.
2. Dieudonné J. — *La géométrie des groupes classiques*. Berlin, Springer, 1955, cap. II.
3. Rașevski P. K. — *Teoria spinorov*. UMN, t. X, 2 (64), 1955.
4. Vescan A. — *Algebra spinorilor*. An. șt. Univ. Iași, Secț. Ia. Matematică, Tom X, (1964), p. 269–280.
5. Vescan A. — *Contribuțiuni la studiul proprietăților algebrice ale spinorilor*. An. șt. Univ. Iași, Secț. Ia. Matematică, Tom. XI, 1965, p. 1–11.
6. Vescan A. — *Noi proprietăți ale algebrei spinorilor*. An. șt. Univ. Iași, Secț. Ia. Matematică, Tom XII, 1966, p. 11–17.

THE ALGEBRA OF SPINORS OVER AN ARBITRARY FIELD

Summary

In this paper we define the algebra of spinors in a linear space, which is finite-dimensional, over a commutative field (of characteristic $\neq 2$), in which is given a bilinear symmetric form. Further the properties of this algebra are studied.

A FIXED POINT THEOREM IN UNIFORM SPACES

BY

N. GHEORGHIU and E. ROTARU

This Note proves a fixed point theorem in uniform spaces suggested by a theorem of Edelstein [1] stated for metric spaces. In comparison with the usual condition of contraction of Banach's theorem, in this of Edelstein a condition of local contraction is suggested. Other two fixed point theorems in uniform spaces are to be noted in [2] and [3].

An application is indicated for linear operators in locally convex spaces.

Theorem 1. *Let X be a uniform sequentially complete space and let $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ be a saturated and separated by semimetrics set defining the uniform topology of X. Let f be an application from X into itself which is assumed to satisfy the following conditions:*

A_1) *There are a mapping $\varphi : A \to A$, and numbers $\varepsilon_\alpha > 0$, $\lambda_\alpha \in [0, 1]$ for $\alpha \in A$ such that*

$$\rho_\alpha(x, y) \leqslant \varepsilon_\alpha \text{ implies } \rho_\alpha(fx, fy) \leqslant \lambda_\alpha \rho_{\varphi(\alpha)}(x, y) \tag{1}$$

for any $\alpha \in A$;

A_2) *There is $x_0 \in X$ such that for each $\alpha \in A$ there exists a finite set of points $x_0 = u_0, u_1, \ldots, u_p = fx_0$ (eventually dependent of α) satisfying the inequalities*

$$\rho_{\varphi^n(\alpha)}(u_{i-1}, u_i) \leqslant \varepsilon_\alpha \tag{2}$$

for any $n \in N$, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$;