Proof. It is enough to prove that the conditions of Theorem 2 imply the assumptions of Theorem 1 with $fx = y + Tx$. Certainly, A_1 is satisfied due to B_1 and (10) ; A_3 is implied by B_3. The proof is achieved showing that B_2 implies A_2, α being fixed. To this end let M be a positive number, which can depend on α, so that

$$p_{\varphi^n(\alpha)}(y) \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Now fixing a natural number s, (12) gets the form :

$$p_{\varphi^n(\alpha)}\left(\frac{y}{s}\right) \leqslant \frac{M}{s}. \tag{13}$$

or

$$p_{\varphi^n(\alpha)}\left(\frac{i-1}{s}y, \frac{i}{s}y\right) = p_{\varphi^n(\alpha)}\left(\frac{y}{s}\right) \leqslant \frac{M}{s} = \varepsilon_\alpha \tag{14}$$

for any $n \in N$ and $i = 1, 2, \ldots, s$, which shows that the condition A_2 is carried out with $x_0 = 0$, $x_1 = y$, $u_i = y/s$ for $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, s$.

BIBLIOGRAPHY

1. Edelstein M. — *An extension of Banach's contraction principle.* Proc. AMS 12(1961). 7—10.
2. Gheorghiu N. — *Teorema contracțiilor în spații uniforme.* Stud. cerc. mat. 19 (1967).
3. Popa E. — *Espaces pseudométriques et pseudonormés.* An. șt. Univ. Iași, Mat. XIV (1968), 383—390.
4. Marinescu Gh. — *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice.* Ed. Acad. R.S.R. București, 1959.

O TEOREMĂ DE PUNCT FIX IN SPAȚII UNIFORME

Rezumat

În această Notă se demonstrează o teoremă de punct fix în spații uniforme pentru aplicații local contractante ; în continuare se aplică acest rezultat pentru operatori liniari continui pe spații local convexe secvențial complete.

ESPACES H-BORNOLOGIQUES

PAR

TEODOR PRECUPANU

Nous avons défini dans cette Note les espaces H-bornologiques pour la catégorie des espaces linéaires topologiques H-localement convexes, par analogie avec les espaces bornologiques introduits pour la catégorie des espaces linéaire topologiquies localement convexes ([1], ch. 3). Rappelons qu'un espace linéaire topologique est dit H-localement convexe si la topologie peut être définie à l'aide d'une famille de seminormes hilbertiennes. Conformément à la théorie générale des espaces H-localement convexes, [6], [2]§ 4 D et [7], la place des ensembles convexes est prise par les ensembles H-convexes.

Definition 0. *On dit qu'une partie M d'un espace linéaire est H-convexe si pour chaque $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $x, y \in M$ il existe $\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant 0$ avec les propriétés suivantes :*

H_1. $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2)$,

H_2. $\alpha x + \beta y \in \alpha_1 M$,

H_3. $\alpha x - \beta y \in \beta_1 M$.

On peut observer immédiatement qu'une intersection de parties H-convexes n'est pas toujours une partie H-convexe et donc nous n'avons pas la possibilité d'introduire la notion d'enveloppe H-convexe pour une partie arbitraire.

A l'aide de la notion de partie H-convexe on a donné une caractérisation simple pour les espaces H-localement convexes ([6], th. B).

Théorème 0. *Un espace linéaire topologique est H-localement convexe si et seulement si la topologie peut être définie à l'aide d'un système fondamental de voisinages équilibrés et H-convexes de l'origine.*

Soient X et Y deux espaces linéaires mis en dualité par une forme bilinéaire B. Les topologies faibles $\sigma(X, Y)$ et $\sigma(Y, X)$ sont H-localement convexes parce que les seminormes $x \to |B(x, y)|$ où y parcourt Y, et respectivement $y \to |B(x, y)|$, où x parcourt X, sont hilbertiennes. En effet, elles proviennent des semiproduits scalaires $(x_1, x_2) \to B(x_1, y)\overline{B(x_2, y)}$ et $(y_1, y_2) \to B(x, y_1)\overline{B(x, y_2)}$. En particulier, la topologie affaiblie $\sigma(X, X^*)$ est toujours H-localement convexe. D'autre part, si τ est une topologie localement convexe sur un espace linéaire X et $\mathcal{H}$ est la famille de toutes les seminormes hilbertiennes continues pour la topologie τ, alors la topologie H-localement convexe $\tau_{\mathcal{H}}$ engendrée par $\mathcal{H}$ sur X, satisfait à la relation :

$$\sigma(X, X^*) \leqslant \tau_{\mathcal{H}} \leqslant \tau.$$

Il suit que certaines propriétés de la topologie τ reviennent aux propriétés de la topologie H-localement convexe asociée $\tau_{\mathcal{H}}$.

Dans ce qui suit nous supposons que toutes les topologies qui interviennent sont séparées.

Définition 1. *On dit qu'un espace H-localement convexe X est H-bornologique si toute partie H-convexe de X qui absorbe toutes les parties bornées de X est un voisinage de l'origine dans X.*

Il résulte immédiatement que tout espace H-localement convexe bornologique est H-bornologique.

Théorème 1. *Pour un espace H-localement convexe séparé X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1°. *X est H-bornologique,*

2°. *toute seminorme hilbertienne sur X, qui est bornée dans toute partie bornée de X, est continue,*

2'°. *tout semiproduit scalaire sur X, qui est borné dans toute partie bornée de X, est continu,*

3°. *toute application linéaire T de X dans un espace arbitraire H-localement convexe Y, qui transforme les parties bornées de X en parties bornées de Y, est continue,*

3'°. *toute application linéaire T de X dans un espace de Hilbert arbitraire, qui transforme les parties bornées de X en parties bornées de Y, est continue*

4°. *si τ_0 est la topologie de X, alors*

$$\tau_0 = \sup\{\tau : M(\tau) = M(\tau_0)\}$$

où par $M(\tau)$ on désigne l'ensemble de toutes les parties bornées dans X pour une topologie H-localement convexe τ.

Démonstration. Pour une seminorme hilbertienne $|\cdot|$ sur X qui est bornée dans toute partie bornée, l'ensemble $U = \{x : |x| \leqslant 1\}$ est H-convexe, équilibré et absorbe toutes les parties bornées de X, donc (1) → (2).

Si $T : X \to Y$ est une application linéaire et $|\cdot|_i = |T.|_i$, $i \in I$, où $\{|\cdot|_i ; i \in I\}$ est une famille de seminormes hilbertiennes qui engendre la topologie sur X, alors les seminormes $\{|\cdot|_i : i \in I\}$ sont bornées ou continues si et seulement si l'application linéaire T est bornée ou continue, et par suite (2) → (3). Les implications (2) → (2'), (4) → (1) et (3) → (3') sont évidentes et l'affirmation (3') - (3) résulte par le plongement de X dans un produit d'espaces de Hilbert ([7], th. 2. a.). Enfin, comme dans le cas des espaces localement convexes, on peut établir qu'un espace H-localement convexe qui a la propriété (4) est H-bornologique.

Corollaire 1. *Soit X un espace H-bornologique et Y un espace H-localement convexe. Une application linéaire $T : X \to Y$ est continue si et seulement si elle est continue par des suites.*

Corollaire 2. *Tout espace H-localement convexe métrisable est H-bornologique.*

Remarques. 1. La condition pour que l'application linéaire soit bornée peut être remplacée par la condition équivalente qu'elle transforme les suites convergentes vers zéro en suites bornées.

2. Si X est un espace localement convexe, τ sa topologie, alors la topologie H-localement convexe associée $\tau_{\mathcal{H}}$ (définie ci-dessus) est H-bornologique mais la réciproque n'est pas toujours vraie. En general, si τ^b est la plus fine topologie H-localement convexe sur X pour laquelle les parties bornées sont les mêmes que pour τ, alors elle est une topologie H-bornologique (appelée *la topologie H-bornologique associée*) en vertu du théorème 1. 4°. On déduit d'ici qu'une application linéaire $T : X \to Y$, où X et Y sont des espaces linéaires H-localement convexes, est bornée si et seulement si elle est continue pour la topologie H-bornologique asociée sur X.

Théorème 2. a) *Tout espace quotient d'un espace H-bornologique par un sous-espace linéaire fermé est H-bornologique ;*

b) *Tout espace somme directe ou produit d'une suite d'espaces H-bornologiques est H-bornologique ;*

c) *Tout espace limite inductive d'une suite d'espaces H-bornologiques est H-bornologique.*

Démonstration. Les affirmations a) et b) résultent du théorème 1.2°, compte tenu des propriétés correspondantes de stabilité des topologies H-localement convexes qui ont été établies dans [7], prop. 3. D'autre part, si $X = \sum_{n \in N} X_n$, où les X_n sont des espaces H-localement convexes avec les topologies déterminées par les familles de seminormes hilbertiennes $\mathcal{H}_n = \{|\cdot|_{i_n} : i_n \in I_n\}$, alors X est H-localement convexe parce que-on remarque — sa topologie peut être déterminée par la famille de seminormes hilbertiennes

$$\mathcal{P} = \{|\cdot|_{i,c} : i \in \prod_{n \in N} I_n,\ c = (c_n) \in s\}, \text{ où } |x|_{i,c} = \Big(\sum_{n \in N} c_n^2 |x_n|_{i_n}^2\Big)^{1/2}$$

pour chaque $x = \sum_{n \in N} x_n \in \sum_{n \in N} X_n$. En effet, les seminormes de $\mathcal{P}$ sont évidemment continues pour la topologie de la somme directe et inversement, si $|\cdot|$ est une seminorme continue pour la somme directe, alors les restrictions sont continues ; donc pour chaque $n \in N$ il y a $i_n \in I_n$ et $k_n > 0$ tels que :

$$|x| \leqslant k_n |x|_{i_n}$$

pour chaque $x \in X_n$, et

$$|x| = |\sum_{n \in N} x_n| \leqslant \sum_{n \in N} k_n |x_n|_{i_n} \leqslant (\sum_{n \in N} 2^{-n})^{1/2} (\sum_{n \in N} 2^n k_n^2 |x_n|_{i_n}^2)^{1/2} = |x|_{i,c}$$

pour chaque $x = \sum_{n \in N} x_n \in \sum_{n \in N} X_n$, où $i = (i_n) \in \prod_{n \in N} I_n$, et $c = (2^{n/2} k_n) \in s$ c'est-à-dire la seminorme $|\cdot|$ est continue pour la topologie H-localement convexe engendrée par $\mathcal{P}$. On voit que l'affirmation b) a lieu parce que chaque seminorme bornée sur les ensembles bornés de $X = \sum_{n \in N} X_n$ est continue. Enfin, la dernière assertion du théorème résulte aussitôt de a) et b).

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Espaces vectoriels topologiques.* Act. Sci. Ind., Paris, 1955.
2. Cotlar M. — *Equipación con espacios de Hilbert.* Curso, Univ. de Buenos Aires, 1968.
3. De Wilde M. — *Espaces de fonctions à valeurs dans un espace linéaire à semi-normes.* Mémoires de la Soc. Roy. des Sci. de Liège, 1966.
4. Gelfand I. M. et Vilenkin N.Y. — *Les distributions.* Tome 4, Dunod, Paris, 1967.
5. Maurin K. — *Methods of Hilbert spaces.* Warszava, 1967.
6. Precupanu T. — *Sur les produits scalaires dans des espaces vectoriels topologiques.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13, 1968, p. 85.
7. Precupanu T. — *Espaces linéaires à semi-normes hilbertiennes.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, 15, 1969, p. 83.

SPAŢII H-BORNOLOGICE

Rezumat

Prin analogie cu spaţiile bornologice introduse pentru clasa spaţiilor liniare topologice local convexe, se introduc în această Notă spaţiile H-bornologice pentru clasa spaţiilor H-local convexe. Pentru aceste tipuri de spaţii se stabileşte o teoremă de caracterizare cu mai multe condiţii echivalente (teorema 1) şi se pun în evidenţă cîteva proprietăţi de stabilitate (teorema 2).

ALMOST PERIODIC SOLUTIONS BY EXPONENTIAL CONVERGENCE

BY

IOAN MUNTEAN

1. We discuss in this note the system of n ordinary differential equations

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1}$$

where $\dot{x} = dx/dt$, the column vector $x = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n)$ runs over R^n and $X(t, x)$ is a given column vector function $\mathrm{col}\,(X_1(t, x), \ldots, X_n(t, x))$. Assume that $X_i : [0, +\infty[\times R^n \to R$, $i = 1, \ldots, n$, are continuous together with their partial derivatives $X_{ij} = \partial X_i / \partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Solutions of (1) are said to be *exponentially convergent* if there exist positive numbers c and L such that for each pair of solutions $x(t)$, $y(t)$ defined on the interval $[0, +\infty[$ we have

$$|x(t) - y(t)| \leqslant L\,|x(0) - y(0)|\,e^{-ct} \quad \text{for } t \geqslant 0, \tag{2}$$

where $|\cdot|$ is the Euclidean norm in R^n.

Remark. Exponential convergence of solutions implies the uniqueness of periodic or almost periodic solutions of (1).

Denote by M^* the transpose matrix of a matrix M and by J the Jacobian functional matrix $\partial X / \partial x = (X_{ij})_{i,j = 1,2,\ldots,n}$. The following theorem on exponential convergence is known ([4], Theorem 1):

Theorem A. *Suppose that there exist a number $\varepsilon > 0$ and a $n \times n$ positive definite constant symmetric matrix Q such that all eigenvalues of the matrix $J^*Q + QJ$ are $\leqslant -\varepsilon$. Then the solutions of* (1) *are exponentially convergent.*

The hypotheses of this theorem imply that for the quadratic form $V(x) = x^*Qx$ one finds