ASUPRA GEOMETRIEI PROIECTIVE DIFERENȚIALE A VARIETĂȚILOR UNIPARAMETRICE DE CONURI DE ORDINUL AL II-LEA

Rezumat

În această lucrare sînt studiate varietățile uniparametrice de conuri nedegenerate de ordinul al II-lea din spațiul proiectiv cu n dimensiuni P_n. Folosind metode invariante, se construiește o echipare invariantă a varietății uniparametrice de conuri, definite prin vecinătățile de ordinul întîi. Această echipare permite să se construiască o serie de tensori legați de varietatea de conuri și să se dea sensul lor geometric. Sînt considerate de asemenea figuri geometrice definite de acești tensori.

LE p-INDEX D'UNE VARIÉTÉ

PAR

L. VANHECKE

Introduction. Dans quelques travaux récents [1] [2], B a n g - y e n - C h e n a étudié certaines surfaces pseudo-ombilicales ou minimales V^2 de courbure gaussienne constante immergées dans un espace riemannien $R^m(c)$ de courbure constante c. Dans [4] l'auteur a généralisé les résultats principaux de B. Y. C h e n pour les V^n $(n \geqslant 2)$.

V^n étant une C^∞-variété orientable, soit π une immersion isométrique $V^n \to R^{n+N}(c)$. Si V^n satisfait aux conditions suivantes :

i) la courbure riemannienne de V^n est constante ;

ii) la connexion normale est triviale ;

iii) dans le cas où la codimension $N > 1$, il existe une seconde forme fondamentale qui possède des valeurs propres différentes par rapport au ds^2; nous dénommons la variété en question *une variété* K_0. D'autre part, soit V^n une variété dont l'espace tangent en chaque point est non dégénéré. Nous nommerons *le p-index de* V^n le nombre des tangentes deux à deux orthogonales et telles qu'il existe pour chacune de ces tangentes une variété normale quand le point tangent varie sur la variété.

Il convient de rappeler maintenant que dans [4] nous avons établi les résultats suivants pour un espace elliptique P_e :

— *Une hypersurface minimale* K_0 *de* P_e^{n+1} *est soit totalement géodésique, soit isométrique à l'espace euclidien n-dimensionnel.*

— *Une variété minimale* K_0 *à n dimensions de* P_e^{n+N} $(N > 1)$ *est isométrique à l'espace euclidien n-dimensionnel.*

— *Soit* $V^n \subset P_e^{n+2}$ *une variété* K_0 *pseudo-ombilicale et de codimension 2. Alors* V^n *est une variété ombilicale d'une* P_e^{n+1} *ou isométrique à l'espace euclidien à n dimensions.*

— *Soit* $V^n \subset P_e^{n+N}$ $(N > 2)$ *une variété* K_0 *pseudo-ombilicale et de courbure moyenne constante. Cette variété est isométrique à l'espace euclidien à n dimensions.*

L'isométrie est toujours locale.

Des résultats analogues à ceux de plus haut sont obtenus pour *les variétés* K_{0e}, c.-à-d. les variétés K_0 qui sont soit minimales ou des variétés

dont la seconde forme fondamentale correspondante au point de courbure moyenne H (point qui sera défini par la suite) possède des valeurs propres constantes par rapport au ds^2. Les résultats établis dans ce travail se rapportent à l'espace elliptique P_e^{n+N} mais il est aisé de montrer qu'ils sont aussi valables pour toute variété immergée dans un espace riemannien à courbure constante. En particulier, dans le cas d'un espace elliptique P_e^1 on est conduit à une configuration des surfaces K_{0e} dont l'existence sera démontrée. Nous nous bornons ici à donner le

Théorème principal. *Soit K_{0e} une variété n-dimensionnelle et $\pi : V^n \to P_e^{n+N}$ une immersion isométrique de V^n dans un espace elliptique à $n+N$ dimensions. Si π est ni minimale ni pseudo-ombilicale avec courbure moyenne constante, alors le p-index de V^n est positif.*

1. Soit P_e^{n+N} un espace elliptique à $n+N$ dimensions dont on suppose que la courbure a été réduite à l'unité par une homothétie préalable et soit $\pi : V^n \to P_e^{n+N}$ une immersion isométrique d'une C^∞-variété n-dimensionelle et orientable.

$X_0(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ étant le point générique de V^n, associons à X_0 un simplexe rectangle ou orthonormé $S_{X_0} = \{X_A\}$, $(A, B, C = 0, 1, \ldots, n+N)$ et supposons que l'espace tangent dual en X_0 à V^n, noté par $T_{X_0}(V^n)$, est déterminé par les points X_i $(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$. $\omega^i(u^j \mid du^j)$ est la base duale de $T_{X_0}(V^n)$. Dans ces conditions la variété V^n est structurée par la connexion

$$dX_A = \omega_A^B X_B, \tag{1}$$

où ω_A^B sont les 1-formes de connexion associées à l'immersion π. Les deux groupes d'équations de structure pour une variété quelconque $V^n \subset P_e^{n+N}$ sont, comme on le sait, condensés dans

$$d \wedge \omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B, \quad \omega_A^B + \omega_B^A = 0. \tag{2}$$

Posons

$$\omega_A^B = \gamma_{Ai}^B \omega^i, \tag{3}$$

où γ_{Ai}^B sont les coefficients de connexion. V^n étant une variété intégrale du système

$$\omega^r = 0, \quad r, s, t = n+1, \ldots, n+N,$$

on trouve aussitôt par différentiation extérieure :

$$\gamma_{ij}^r = \gamma_{ji}^r. \tag{4}$$

On obtient ainsi

$$d \wedge \omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \qquad \omega_i^j + \omega_j^i = 0,$$

$$d \wedge \omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j, \quad \Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l, \tag{5}$$

$$d \wedge \omega_r^s = \omega_r^t \wedge \omega_t^s + \Omega_r^s, \quad \Omega_r^s = \frac{1}{2} R_{rkl}^s \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$R_{ikl}^j + R_{ilk}^j = 0, \qquad R_{rkl}^s + R_{rlk}^s = 0.$$

De là, on déduit aussitôt

$$R_{ikl}^j = \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \sum_r (\gamma_{il}^r \gamma_{jk}^r - \gamma_{ik}^r \gamma_{jl}^r), \tag{6}$$

$$R_{rkl}^s = \sum_i (\gamma_{il}^r \gamma_{ik}^s - \gamma_{ik}^r \gamma_{il}^s). \tag{7}$$

Nous dirons d'après [5] que la variété V^n est *à connexion normale triviale* si

$$R_{rkl}^s = 0 \tag{8}$$

et que V^n a *une courbure riemannienne constante* si

$$R_{ikl}^j = -K(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \quad K = \text{const}, \tag{9}$$

où K est la courbure gaussienne de V^n. (En générale K est définie par

$$R = n(1-n)K \tag{10}$$

où R est la courbure scalaire).

Les secondes formes fondamentales φ_r associées à l'immersion π sont définies par

$$\varphi_r = -(dX_0, dX_r) = \omega_i^r \omega^i = \gamma_{ij}^r \omega^i \omega^j. \tag{11}$$

Dans l'espace P_e^{n+N} la forme φ qui correspond au point

$$X = x^r X_r, \qquad \sum (x^r)^2 = 1,$$

de l'espace totalement normal est alors

$$\varphi(X) = x^r \varphi_r. \tag{12}$$

Si

$$\varphi(X) = \rho ds^2$$

nous dirons que la variété est *ombilicale par rapport au point X*. Si

$$\gamma^r = \text{trace}\,[\gamma_{ij}^r] = 0, \tag{13}$$

nous dirons que l'immersion π *est minimale*. S'il existe un r tel que $\gamma^r \neq 0$, le point $H \in P_e^{n+N}$, défini par

(14) $$H = f\gamma^r X_r \,,\ f \text{ facteur de normalisation.}$$

décrit une variété que nous appellerons *la variété de courbure moyenne associée à* π. Le point H (correspondant au vecteur unitaire de Bompiani) est *le point de courbure moyenne* et

(15) $$\frac{1}{n}\left\{\sum_r (\gamma^r)^2\right\}^{1/2}$$

est la *courbure moyenne de* V^n.

La variété est *pseudo-ombilicale* si elle est ombilicale par rapport au point de courbure moyenne, c.-à-d. si

(16) $$\varphi(H) = \varrho ds^2.$$

2. Soit maintenant X_0 le point générique de V^n et $X_0 \cup T_{X_0}(V^n)$ l'espace tangent en X_0 à V^n. Associons à tout point X_0 une tangente de V^n. Cette tangente est la droite générique d'un système de droites dépendant de n paramètres. *Le p-index de* V^n est le nombre des tangentes deux à deux orthogonales et telles qu'il existe pour chacune de ces tangentes une variété normale quand X_0 varie sur la variété. Il est évident que $0 \leqslant p\text{-index} \leqslant n$.

De la définition d'un simplexe rectangle et de celle du p-index, il résulte qu'on peut toujours choisir le simplexe S_{X_0} de manière que les droites des systèmes normaux considérés coïncident avec p des arêtes (X_0, X_i). Dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que le système $[X_0 X_i]$ soit normal est $d \wedge \omega^i = 0$. On peut donc dire que, après un choix convenable du simplexe S_{X_0}, le p-index de V^n est égal au nombre des formes ω^i qui sont fermées. On obtient ainsi le

Théorème 1. *Le p-index d'une variété n-dimensionnelle* V^n *est égal à la dimension de la variété si et seulement si* V^n *est isométrique (localement) à un espace euclidien n-dimensionnel.*

3. Il y a beaucoup de publications qui traitent des problèmes liés aux immersions des variétés K_0 définies dans l'introduction. Les résultats établis dans [4] peuvent être reformulés de la manière suivante :

Théorème 2. *Une hypersurface minimale* K_0 *de* P_e^{n+1} *est soit totalement géodésique ou le p-index est égal à la dimension n. Une variété minimale* K_0 *à n dimensions de* P_e^{n+N} $(N > 1)$ *a un p-index égal à sa dimension.*

Théorème 3. *Si* $V^n \subset P_e^{n+2}$ *est une variété* K_0 *pseudo-ombilicale et de codimension 2, alors* V^n *est une variété ombilicale d'une* P_e^{n+1} *pour laquelle le p-index est égal à n.*

Si $V^n \subset P_e^{n+N}$ $(N > 2)$ *est une variété* K_0 *pseudo-ombilicale et de courbure moyenne constante, alors le p-index de cette variété est égal à la dimension n.*

4. *Nous dirons maintenant que la variété* K_0 *est une variété* K_{0c} *si elle est soit minimale soit une* V^n *qui possède une seconde forme fondamentale* $\varphi(H)$ *avec des valeurs propres constantes par rapport au* ds^2.

Il est alors clair que les variétés K_0 minimales ou pseudo-ombilicales avec courbure moyenne constante appartiennent à l'ensemble des variétés K_{0c}. Le but principal de cet étude est d'établir un théorème analogue pour tous les autres types des variétés K_{0c}, notées par $\bar{K}_{0c}$.

V^n étant alors une variété $\bar{K}_{0c}$, supposons qu'on a choisi le simplexe S_{X_0} de manière que $H = X_{n+1}$. Le caractère K_0 de la variété V^n permet de diagonaliser toutes les formes fondamentales φ_r. Dans ce cas, on devra écrire :

(17) $$\omega_i^{n+1} = -\gamma_{ii}^{n+1}\,\omega_i^0, \qquad \gamma_{ii}^{n+1} = a_i \qquad (a_i = \text{const.}),$$

(18) $$\omega_i^{r^*} = -\gamma_{ii}^{r^*}\,\omega_i^0, \qquad r^*, s^* = n+2, \ldots, n+N.$$

et de (6) et (9) on obtient facilement

(19) $$\sum_{r^*} (\gamma_{ii}^{r^*})^2 = \gamma^{n+1}\gamma_{ii}^{n+1} - (\gamma_{ii}^{n+1})^2 + (n-1)(K+1),$$

(20) $$\sum_{r^*} \gamma_{ii}^{r^*}\gamma_{jj}^{r^*} + \gamma_{ii}^{n+1}\gamma_{jj}^{n+1} + K + 1 = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

La differentiation extérieure de (17) et de (18) nous donne respectivement

(21) $$\omega_i^{r^*} \wedge \omega_{r^*}^{n+1} = (\gamma_{jj}^{n+1} - \gamma_{ii}^{n+1})\,\omega_i^j \wedge \omega_j^0.$$

(22) $$d\gamma_{ii}^{r^*} \wedge \omega_i^0 + \gamma_{ii}^{r^*}\,\omega_i^j \wedge \omega_j^0 - \gamma_{jj}^{r^*}\omega_i^j \wedge \omega_j^0 + \omega_i^{s^*} \wedge \omega_{s^*}^{r^*} + \omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^{r^*} = 0.$$

En multipliant (22) par $\gamma_{ii}^{r^*}$ et en faisant la sommation par rapport à l'indice r^*, on obtient

(23) $$\sum_{r^*}\gamma_{ii}^{r^*}\,d\gamma_{ii}^{r^*} \wedge \omega_i^0 + \sum_{r^*}(\gamma_{ii}^{r^*})^2\,\omega_i^j \wedge \omega_j^0 - \sum_{r^*}\gamma_{ii}^{r^*}\gamma_{jj}^{r^*}\,\omega_i^j \wedge \omega_j^0 +$$
$$+ \sum_{r^*}\gamma_{ii}^{r^*}\,\omega_i^{s^*} \wedge \omega_{s^*}^{r^*} + \sum_{r^*}\gamma_{ii}^{r^*}\,\omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^{r^*} = 0\,.$$

D'autre part, la différentiation de (19) donne $\sum_{r^*}\gamma_{ii}^{r^*}\,d\gamma_{ii}^{r^*} = 0$ et de $\omega_{r^*}^{s^*} + \omega_{s^*}^{r^*} = 0$ on obtient tout de suite

$$\sum_{r^*}\gamma_{ii}^{r^*}\,\omega_i^{s^*} \wedge \omega_{s^*}^{r^*} = -\sum_{r^*}\gamma_{ii}^{r^*}\gamma_{ii}^{s^*}\,\omega_i^0 \wedge \omega_{s^*}^{r^*} = 0\,.$$

A l'aide de ces relations et de (19), (20) et (21) on obtient pour (23) :

$$\{\gamma^{n+1}\gamma_{ii}^{n+1} - (\gamma_{ii}^{n+1})^2 + (n-1)(K+1)\}\,\omega_i^j \wedge \omega_j^0 +$$
$$+ (\gamma_{ii}^{n+1}\gamma_{jj}^{n+1} + K + 1)\,\omega_i^j \wedge \omega_j^0 - (\gamma_{jj}^{n+1} - \gamma_{ii}^{n+1})\,\gamma_{ii}^{n+1}\,\omega_i^j \wedge \omega_j^0 = 0$$

et compte tenu de (2), on arrive finalement à

(24) $$\{n(K+1) + \gamma^{n+1}\gamma_{ii}^{n+1}\}\,d \wedge \omega_i^0 = 0.$$

En notant par h la courbure moyenne scalaire de la variété V^n, on peut écrire $\gamma^{n+1} = nh$. La substitution de h dans (24) donne

$$(K + 1 + h\gamma_{ii}^{n+1})\, d \wedge \omega_i^0 = 0 \tag{25}$$

et par conséquent on a les cas suivants :

(i) $d \wedge \omega^j = 0$ pour tout j et le p-index de V^n égal à n ;

$$\text{(ii)} \qquad (\forall j)\; K + 1 + h\gamma_{jj}^{n+1} = 0 \tag{26}$$

et puisque $h = 0$, on déduit $(\forall j)\; \gamma_{jj}^{n+1} = h$, ce qui prouve que π est pseudo-ombilicale, résultat contraire à l'hypothèse faite.

(iii) $d \wedge \omega^j = 0$ pour $j \in$ un ensemble $[\;\;]$ non vide ($|\;\;|$ = ensemble d'indices) et $K + 1 + h\gamma_{jj}^{n+1} = 0$ pour $j \notin [\;\;]$. Dans ce cas on a p-index de $V^n = \#[\;\;]$ et ceci implique que p est un nombre positif. Mais h étant différent de zéro, on a :

$$\gamma_{jj}^{n+1} = \gamma_{kk}^{n+1} = -\frac{K+1}{h}, \quad k, j \notin [\;\;].$$

Si les valeurs propres qui correspondent au point H sont différentes, on trouve p-index $= n - 1$ et pour l'autre valeur propre γ_{ii}^{n+1} on obtient

$$\gamma_{ii}^{n+1} = -\frac{K+1}{h}.$$

On peut donc formuler le

Théorème 4. *Soit V^n une variété $\overline{K}_{0c}$ à n dimensions de P_e^{n+N}. On a en général $0 <$ p-index de $V^n \leqslant n$ et si le p-index $= r < n$, alors $\varphi(H)$ possède $n - r$ valeurs propres par rapport au ds^2 qui sont égales à $-\dfrac{K+1}{h}$, K et h étant respectivemet la courbure gaussienne et moyenne de la variété. Si les valeurs propres sont toutes différentes, on a $n - 1 \leqslant p$-index $\leqslant n$ et dans le cas où le p-index est égal à $n - 1$ l'autre valeur propre est $-\dfrac{K+1}{h}$.*

Remarque. Dans le cas où $0 < p$-index $< n$ on tire de (19) et (26)

$$\sum_r (\gamma_{ii}^r)^2 + K + 1 = 0. \tag{27}$$

La sommation par rapport à i nous donne

$$\sigma = -n(K + 1) \tag{28}$$

où

$$\sigma = \sum_{r,i} (\gamma_{ii}^r)^2 \tag{29}$$

est la norme ou le carré de la longueur de la seconde forme fondamentale de l'immersion π. Alors $K \leqslant -1$ car $\sigma \geqslant 0$. On peut même dire que $K < -1$ pour $N > 1$ car $K = -1$ entraîne $\sigma = 0$ et cela veut dire que V^n est totalement géodésique. Nous avons exclus ce cas pour $N > 1$.

5. Supposons maintenant que la variété V^n est une surface K_{0c} immergée dans P_e^4. Dans ce cas on a les relations suivantes :

$$\omega_1^3 = \gamma_{11}^3\, \omega_0^1, \quad \omega_2^3 = \gamma_{22}^3\, \omega_0^2, \quad \gamma_{11}^3 \text{ et } \gamma_{22}^3 \text{ const.}, \tag{30}$$

$$\omega_1^4 = \gamma_{11}^4\, \omega_0^1, \quad \omega_2^4 = \gamma_{22}^4\, \omega_0^2, \quad \gamma^4 = 0 \tag{31}$$

et

$$\gamma_{11}^3\, \gamma_{22}^3 + \gamma_{11}^4\, \gamma_{22}^4 = -(K + 1). \tag{32}$$

Supposons en plus que la surface V^2 est une surface $\mathcal{B}$ de Bianchi, c-à-d. isométrique au plan euclidien. On devra donc écrire $d \wedge \omega^1 = d \wedge \omega^2 = 0$, et de là on obtient

$$\omega_1^2 = 0. \tag{33}$$

La différentiation extérieure de (30) donne à l'aide de (33)

$$\omega_3^4 = 0. \tag{34}$$

La seule forme de torsion est donc nulle et cela signifie que la variété est à torsion gaussienne nulle. Dans ce cas les points X_0, X_3 et X_4 sont des points génériques de surfaces qui déterminent une configuration comme celle étudiée en [3].

Les relations (31) et (32) nous montrent en plus que les valeurs propres qui correspondent au point X_4 sont aussi constantes et cela entraîne, après un calcul qui ne présente pas de difficulté, que les trois variétés considerées sont toutes des surfaces K_{0c}.

Il est aisé d'établir le théorème d'existence de telles surfaces. En effet, le système de Pfaff $\sum$ déterminant une telle surface est :

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0, \\ &\omega_1^3 = \gamma_{11}^3\, \omega_0^1, \quad \omega_2^3 = \gamma_{22}^3\, \omega_0^2, \\ &\omega_1^4 = \gamma_{11}^4\, \omega_0^1, \quad \omega_2^4 = \gamma_{11}^4\, \omega_0^2, \\ &\omega_1^2 = 0, \quad \omega_3^4 = 0, \\ &d\gamma_{11}^3 = d\gamma_{22}^3 = d\gamma_{11}^4 = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Les nombres caractéristiques de ce système fermé sont donc

$$r = 1, \quad s_0 = 11, \quad s_1 = 0. \tag{36}$$

Le système $\sum$ est alors en involution et conformément au test de Cartan la solution générale dépend de 11 constantes arbitraires.

Remarque. Le fait que la torsion gaussienne de V^2 est nulle est un cas spécial de la propriété suivant laquelle *la torsion gaussienne de chaque variété K_0 de codimension 2 est nulle.*

Katholieke Universiteit te Leuven
Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. Chen B. Y. — *Pseudo-umbilical Surfaces with Constant Gauss Curvature*, sous presse.
2. Chen B. Y. — *Minimal Surfaces with Constant Gauss Curvature*, Proc. Amer. Math. Soc., 34,2(1972).
3. Rosca R., Vanhecke L., Verstraelen L. — *Triade rectangulaire de variétés $\mathfrak{B}$ (de Bianchi) bidimensionnelles immergées dans un espace elliptique à quatre dimensions et généralisation dans un espace elliptique à 2 + n dimensions*, Glasnik Matematički, 7(27) (1972).
4. Vanhecke L. — *Pseudo-umbilical and minimal manifolds with constant riemannian curvature*, sous presse.
5. Kenmotsu K. — *Some remarks on minimal submanifolds*, Tôhoku Math. Journ., 22 (1970).

p-INDEXUL UNEI VARIETĂȚI

Rezumat

Fie $x : V^n \to P_e^{n+N}$ o imersie izometrică a unei varietăți V^n cu n dimensiuni într-un spațiu eliptic $(n+N)$-dimensional P_e^{n+N}. „p-indexul" lui V^n este numărul de tangente două cîte două ortogonale în fiecare punct din V^n astfel că, pentru fiecare din aceste tangente, există o varietate normală cînd punctul tangent variază pe varietate.

Fie acum K_{0c} o varietate V^n cu curbură riemanniană constantă avînd conexiune normală trivială și pentru care a doua formă fundamentală corespunzătoare punctului de curbură medie H posedă valori proprii constante în raport cu ds^2. În prezenta lucrare se studiază p-indexul unei asemenea varietăți K_{0c}. În particular, în cazul unui spațiu eliptic P_e^4, sîntem conduși la o configurație de suprafețe K_{0c} a cărei existență este demonstrată.

ON SOME SPECIAL CURVES ON THE SURFACE OF REFERENCE OF A RECTILINEAR CONGRUENCE. II

BY

H. K. N. TRIVEDI & S. C. RASTOGI

In the previous paper [9] of this series we have studied properties of a curve $C : x^i = x^i(s)$ $(i = 1, 2, 3)$, on the surface of reference $S : x^i = x^i(u^\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$ of a rectilinear congruence represented by the unit vector with contravariant components $\lambda^i = \lambda^i(u^\alpha)$ which is such that $d\lambda^i/ds$ is perpendicular to X^i (the contravariant components of the normal to S). The purpose of this paper is to study some more properties of this curve.

1. Preliminaries. At any point $P(x^i)$, of S, λ^i may be expressed as

$$\lambda^i = p^\alpha x^i_{,\alpha} + qX^i, \tag{1.1}$$

where p^α and q are the parameters.

Differentiating (1.1) with respect to s and using the equations of Gauss and Weingarten

$$x^i_{,\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} X^i, \tag{1.2 a}$$

and

$$X^i_{,\beta} = -d_{\beta\gamma} g^{\gamma\delta} x^i_{,\delta}, \tag{1.2 b}$$

and the fact that $d\lambda^i/ds$ is perpendicular to X^i we get

$$d\lambda^i/ds = (p^\gamma_{,\alpha} - qd_{\alpha\sigma} g^{\sigma\gamma}) x^i_{,\gamma} u'^\alpha \equiv \mu^\gamma_\alpha x^i_{,\gamma} u'^\alpha \tag{1.3}$$

and

$$(q_{,\alpha} + p^\beta d_{\alpha\beta}) u'^\alpha = 0, \tag{1.4}$$

primes having been used for differentiation with respect to s.

[1]) the numbers in square brackets refer to the references in end.