SUR LA DÉFORMATION PLASTIQUE PLANE DES CORPS ORTHOTROPES AVEC CONSOLIDATION

PAR

V. DIACONIŢA

Dans ce travail on montre l'existence et l'unicité de la solution faible du problème de la déformation plastique plane des corps orthotropes avec consolidation.

Le travail comprend trois parties. Dans la première partie on traite de la plasticité des corps orthotropes homogènes avec consolidation dans lesquels les limites d'écoulement augmentent proportionnellement avec un paramètre qui dépend de l'histoire de la déformation. La formulation mathématique du problème de la déformation plastique plane est faite dans la deuxième partie du travail. Dans la dernière partie, en utilisant les résultats de Browder [1] de la théorie des opérateurs monotones dans l'espace de Hilbert, on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème.

1. Considérations sur la plasticité des corps orthotropes avec consolidation. Si l'on considère que la pression hydrostatique n'influence pas l'écoulement, alors la condition de plasticité pour les corps orthotropes sans consolidation se présente sous la forme ([3], ch. XII), [6]:

$$
\begin{aligned}
K_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + K_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + K_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\
+ K_{44}\,\sigma_{23}^2 + K_{55}\,\sigma_{31}^2 + K_{66}\,\sigma_{12}^2 = 1,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

où K_{ij} sont les paramètres qui caractérisent l'état d'écoulement anisotrope et σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes.

En désignant par X_{ij} les limites d'écoulement à l'extension et au glissement par rapport aux axes d'anisotropie nous avons :

$$
(1.2)\qquad
\begin{aligned}
2K_{23} &= \frac{1}{X_{22}^2} + \frac{1}{X_{33}^2} - \frac{1}{X_{11}^2}, & K_{44} &= \frac{1}{X_{23}^2},\\
2K_{31} &= \frac{1}{X_{33}^2} + \frac{1}{X_{11}^2} - \frac{1}{X_{22}^2}, & K_{55} &= \frac{1}{X_{31}^2},\\
2K_{12} &= \frac{1}{X_{11}^2} + \frac{1}{X_{22}^2} - \frac{1}{X_{33}^2}, & K_{66} &= \frac{1}{X_{12}^2}.
\end{aligned}
$$

De (1.2) on observe que les coefficients K_{44}, K_{55}, K_{66} sont positifs, mais les autres peuvent être négatifs, et

$$
K_{23} + K_{31} > 0,\ K_{31} + K_{12} > 0,\ K_{12} + K_{23} > 0,\quad K_{23} + K_{31} + K_{12} > 0.
$$

Nous considérons, comme en [3, ch. XII], que les limites d'écoulement augmentent proportionnellement, c'est-à-dire $X_{11} = hX_{11}^0$, $X_{22} = hX_{22}^0$ .... où nous avons noté avec l'indice zéro les valeurs initiales des limites d'écoulement et où h est un paramètre monotone croissant à partir de 1 et qui exprime la grandeur de la consolidation. Les paramètres K_{ij} décroissent comme $1/h^2$. En tenant compte de ce fait, de (1.1) nous déduisons :

$$
(1.3)\qquad
\begin{aligned}
&K_{23}^0(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + K_{31}^0(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + K_{12}^0(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 +\\
&+ K_{44}^0\sigma_{23}^2 + K_{55}^0\sigma_{31}^2 + K_{66}^0\sigma_{12}^2 = h^2,
\end{aligned}
$$

où nous avons noté par K_{ij}^0 les valeurs initiales de K_{ij}.

Pour écrire les équations qui caractérisent les corps orthotropes avec consolidation du type considéré ci-dessus il est nécessaire de connaître h comme une fonction des déformations ε_{ij}.

Dans ce but nous introduisons les expressions [2] :

$$
(1.4)\qquad
\begin{aligned}
\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{B}}\,[&K_{23}^0(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + K_{31}^0(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 +\\
&+ K_{12}^0(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + K_{44}^0\sigma_{23}^2 + K_{55}^0\sigma_{31}^2 + K_{66}^0\sigma_{12}^2]^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
(1.5)\qquad
\begin{aligned}
\bar{\Gamma} = \sqrt{B}\Big[\frac{1}{A^2}\{&K_{23}^0(K_{31}^0\varepsilon_{22} - K_{12}^0\varepsilon_{33})^2 + K_{31}^0(K_{12}^0\varepsilon_{33} - K_{23}^0\varepsilon_{11})^2 +\\
&+ K_{12}^0(K_{23}^0\varepsilon_{11} - K_{31}^0\varepsilon_{22})^2\} + \frac{4}{K_{44}^0}\,\varepsilon_{23}^2 + \frac{4}{K_{55}^0}\,\varepsilon_{31}^2 + \frac{4}{K_{66}^0}\,\varepsilon_{12}^2\Big]^{1/2},
\end{aligned}
$$

où

$$
(1.6)\qquad B = 2(K_{23}^0 + K_{31}^0 + K_{12}^0),\quad A = K_{23}^0K_{31}^0 + K_{31}^0K_{12}^0 + K_{12}^0K_{23}^0,
$$

que nous nommons intensité généralisée des tensions tangentielles, respectivement intensité généralisée des déformations de glissement. Alors, si le corps est isotrope nous avons

$$
(1.7)\qquad K_{44}^0 = K_{55}^0 = K_{66}^0 = 6K_{23}^0 = 6K_{31}^0 = 6K_{12}^0,
$$

et les expressions introduites (1.4) et (1.5) se réduisent à l'intensité des tensions tangentielles, respectivement l'intensité des déformations de glissement qui jouent un rôle important dans la plasticité des corps isotropes [4, ch. II].

Nous supposons [2] qu'entre $\bar{T}$ et $\bar{\Gamma}$ il existe une relation de la forme

$$
(1.8)\qquad \bar{T} = g(\bar{\Gamma}^2)\bar{\Gamma},
$$

où $g(\bar{\Gamma}^2)$ est une fonction caractéristique du matériel donné.

On admet qu'on peut écrire (1.8) sous la forme :

$$
(1.9)\qquad \bar{\Gamma} = f(\bar{T}^2)\bar{T},
$$

avec $f(\bar{T}^2) = 1/g(\bar{\Gamma}^2)$.

De (1.3) et (1.8) on trouve

$$
(1.10)\qquad h = \sqrt{B}\,g(\bar{\Gamma}^2)\bar{\Gamma}.
$$

Pour $g(\bar{\Gamma}^2) = 1/\sqrt{B}\bar{\Gamma}$ on obtient la condition de plasticité pour les corps orthotropes sans consolidation [3, ch. XII].

Nous supposons que la fonction $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(\bar{T})$ est strictement croissante et donc la fonction $f(\bar{T}^2)$ satisfait à la relation :

$$
(1.11)\qquad f(\bar{T}^2) + 2f'(\bar{T}^2)\bar{T} > 0.
$$

Avec la croissance de l'intensité généralisée des déformations $\bar{\Gamma}$, la consolidation se développe et l'intensité généralisée des tensions tangentielles augmente. De cette manière, à chargement $d\bar{T} > 0$, à déchargement $d\bar{T} \leqslant 0$ et pour $d\bar{T} = 0$ nous avons un processus de chargement neutral.

En tenant compte de (1.9) les relations entre les déformations et les tensions peuvent être mises sous la forme

$$
(1.12)\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{K_{31}^0K_{12}^0}{3AV^*}\,\sigma^* + \frac{1}{B}f(\bar{T}^2)\,[(K_{12}^0 + K_{31}^0)\sigma_{11} - K_{12}^0\sigma_{22} - K_{31}^0\sigma_{33}],\\
\varepsilon_{22} &= \frac{K_{12}^0K_{23}^0}{3AV^*}\,\sigma^* + \frac{1}{B}f(\bar{T}^2)\,[(K_{23}^0 + K_{12}^0)\sigma_{22} - K_{23}^0\sigma_{33} - K_{12}^0\sigma_{11}],
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{K_{23}^0 K_{31}^0}{3AV^*}\sigma^* + \frac{1}{B}f(\bar{T}^2)\,[(K_{31}^0 + K_{23}^0)\,\sigma_{33} - K_{31}^0\,\sigma_{11} - K_{23}^0\,\sigma_{22}],$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{K_{44}^0}{2B}f(\bar{T}^2)\,\sigma_{23}, \qquad \varepsilon_{31} = \frac{K_{55}^0}{2B}f(\bar{T}^2)\,\sigma_{31}, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{K_{66}^0}{2B}f(\bar{T}^2)\,\sigma_{12},$$

où, d'après [6]

$$\sigma^* = A_{klmn}\,\sigma_{kl}\,\delta_{mn}\,; \quad \sigma^* = 3V^*\varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{kl} = \tilde{C}_{klmn}\,\sigma_{mn},$$

$$\tilde{A}_{kkll} = 2G^*[\tilde{C}_{kkll} - \tilde{\Omega}(\tilde{C}_{11kk} + \tilde{C}_{22kk} + \tilde{C}_{33kk})(\tilde{C}_{11ll} + \tilde{C}_{22ll} + \tilde{C}_{33ll})],$$

$$\tilde{A}_{klmn} = 0 \text{ pour } k \neq l, \quad \tilde{\Omega} = V^*\left(1 - \frac{3V^*}{2G^*}\right),$$

$$\frac{1}{V^*} = \tilde{C}_{1111} + \tilde{C}_{2222} + \tilde{C}_{3333} + 2(\tilde{C}_{2233} + \tilde{C}_{3311} + \tilde{C}_{1122}),$$

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2}{3}(\tilde{C}_{1111} + \tilde{C}_{2222} + \tilde{C}_{3333} + \tilde{C}_{2233} + \tilde{C}_{3311} - \tilde{C}_{1122}).$$

Si le corps est isotrope nous avons donc (1.7) et les relations (1.12) se réduisent aux relations du cas isotrope avec consolidation [4, ch. 11].

2. La formulation mathématique du problème de la déformation plane. On considère un corps homogène avec profil simplement connexe Ω et frontière S régulière. On suppose que le matériel est orthotrope avec consolidation (relations (1.8) ou (1.9)).

Notons par $u_i (i = 1, 2, 3)$ les composantes du vecteur de déplacement ; pour le problème des déformations planes nous avons :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0. \tag{2.1}$$

Les seules déformations différentes de zéro en vertu de (2.1) sont ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} qui dépendent de x_1 et x_2.

D'autre part, de (1.12), vu que $\varepsilon_{33} = 0$, on trouve

$$\sigma_{33} = \frac{K_{31}^0\,\sigma_{11} + K_{23}^0\,\sigma_{22}}{K_{31}^0 + K_{23}^0}. \tag{2.2}$$

Nous avons étudié le problème de déformation plane en supposant que le corps est incompressible ($\varepsilon = 0$).

Les relations entre les déformations et les tensions dans notre cas se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{A}{B(K_{31}^0 + K_{23}^0)}f(\bar{T}^2)\,[\sigma_{11} - \sigma_{22}], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{A}{B(K_{31}^0 + K_{23}^0)}f(\bar{T}^2)\,[\sigma_{22} - \sigma_{11}], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{K_{66}}{2B}f(\bar{T}^2)\,\sigma_{12}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où

$$\bar{T}^2 = \frac{1}{B}\left\{\frac{A}{K_{31}^0 + K_{23}^0}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + K_{66}^0\,\sigma_{12}^2\right\}. \tag{2.4}$$

Pour les tensions σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} nous avons le système d'équations déterminé par :

I. Les équations de l'équilibre, qui se réduisent à

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \tag{2.5}$$

II. Les équations de compatibilité, qui en vertu de (2.3) prennent la forme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{A}{B(K_{31}^0 + K_{23}^0)}f(\bar{T}^2)\,[\sigma_{11} - \sigma_{22}]\right\} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{A}{B(K_{31}^2 + K_{23}^0)}f(\bar{T}^2)\,[\sigma_{22} - \sigma_{11}]\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\left\{\frac{K_{66}^0}{B}f(\bar{T}^2)\sigma_{12}\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

III. Les conditions à la limite

$$\begin{aligned} \sigma_{11}\cos(n, x_1) + \sigma_{12}\cos(n, x_2) &= X_n^1, \\ \sigma_{12}\cos(n, x_1) + \sigma_{22}\cos(n, x_2) &= X_n^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où X_n^1 et X_n^2 sont les projections sur Ox_1 et Ox_2 des forces extérieures appliquées sur la frontière S, et n le vecteur de la normale extérieure.

En introduisant la fonction d'Airy par

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}, \tag{2.8}$$

les équations d'équilibre (2.5) sont identiquement satisfaites.

En introduisant les valeurs (2.8) en (2.6) on trouve pour la détermination de la fonction $u(x_1, x_2)$ l'équation non linéaire

$$
\begin{aligned}
(2.9)\qquad Pu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{A}{B(K_{31}^0+K_{23}^0)}f(\overline{T}^2)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]\right\}+ \\
+\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\left[\frac{K_{66}^0}{B}f(\overline{T}^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{A}{B(K_{31}^0+K_{23}^0)}f(\overline{T}^2)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right]\right\}=0,
\end{aligned}
$$

où

$$
(2.10)\qquad \overline{T}^2=\frac{1}{B}\left[\frac{A}{K_{31}^0+K_{23}^0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+K_{66}^0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right].
$$

Les conditions à la limite (2.7) se réduisent à

$$
(2.11)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\cos(n,x_1)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\cos(n,x_2)=X_n^1, \\
-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\cos(n,x_1)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos(n,x_2)=X_n^2.
\end{aligned}
$$

Les conditions (2.11) sont équivalentes à

$$
(2.12)\qquad
\begin{aligned}
u\,|_S &= \varphi_1(s), \\
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S &= \varphi_2(s).
\end{aligned}
$$

Nous concluons donc que la solution du problème de la déformation plastique plane revient à la détermination de la fonction $u(x_1, x_2)$ qui satisfait dans Ω à l'équation (2.9) et sur S aux conditions (2.12).

3. L'existence et l'unicité de la solution faible du problème de la déformation plastique plane. On cherche à réduire ce problème donné à un problème avec conditions homogènes sur la frontière.

Soit v une fonction admise par l'opérateur P qui satisfait aux conditions (2.12). En posant $u = w + v$, nous avons pour la détermination de la fonction $w(x_1, x_2)$ qui satisfait aux conditions:

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
Pw \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{A}{B(K_{31}^0+K_{23}^0)}f(\overline{T}^2)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right]\right\}+\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\left[\frac{K_{66}^0}{B}f(\overline{T}^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]+ \\
+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{A}{B(K_{31}^0+K_{23}^0)}f(\overline{T}^2)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]\right\}=\eta(x_1,x_2), \\
w\,|_S=0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_S=0.
\end{aligned}
$$

où

$$
(3.2)\qquad \overline{T}^2(w)=\frac{1}{B}\left[\frac{A}{K_{31}^0+K_{23}^0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+K_{66}^0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right].
$$

Soit $L_2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $\overline{\Omega}$ avec le produit scalaire et la norme.

$$
< w, v > = \int_\Omega wv\,d\Omega, \qquad \| w \|^2 = \int_\Omega w^2 d\,\Omega.
$$

On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact dans Ω. On introduit l'espace $W_2^2(\Omega)$ par

$$
W_2^2(\Omega)=\left\{w \mid w,\ \frac{\partial w}{\partial x_1},\ \frac{\partial w}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\in L_2(\Omega)\right\};
$$

les dérivées sont prises dans le sens de la théorie des distributions. L'espace $W_2^2(\Omega)$ est un espace Hilbert avec produit scalaire et la norme notés par (,) et $|.|$

On désigne encore par $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W_2^2(\Omega)$.

Lemme 3.1. *La norme dans $W_2^2(\Omega)$ sur le sousespace $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ est équivalente avec*

$$
\left\{\int_\Omega \overline{T}^2(w)\,d\,\Omega\right\}^{1/2}.
$$

Démonstration. En effet, d'une part

$$
\begin{aligned}
|w|^2_{W_2^2(\Omega)}=\int_\Omega w^2 d\Omega+\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right]d\Omega+ \\
+\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right]d\Omega\leqslant \\
(3.3)\qquad \leqslant(1+\varkappa+\varkappa^2)\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right]d\Omega\leqslant \\
\leqslant\frac{1+\varkappa+\varkappa^2}{KB}\int_\Omega\left[\frac{A}{K_{31}^0+K_{23}^0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(K_{66}^0-\frac{2A}{K_{31}^0+K_{23}^0}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+ \\
+\frac{A}{K_{31}^0+K_{23}^0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right]d\Omega=\frac{1+\varkappa+\varkappa^2}{K}\int_\Omega\overline{T}^2(w)d\Omega=\gamma\,|w|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Ici nous avons utilisé l'inégalité de Friedrichs [5, ch. II] et la relation

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega = 0, \quad \text{pour } w \in \mathring{W}_2^2(\Omega); \tag{3.4}$$

mais

$$K = \min \left\{ \frac{A}{K_{31}^0 + K_{23}^0}, \ \frac{1}{2} \left(K_{66}^0 - \frac{2A}{K_{31}^0 + K_{23}^0} \right) \right\}, \ K_{66}^0 - \frac{2A}{K_{31}^0 + K_{23}^0} > 0,$$

$$\gamma = \frac{1 + \varkappa + \varkappa^2}{K} \tag{3.5}$$

$\varkappa$ est la constante de Friedrichs.

D'autre part

$$|w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} = \int_\Omega \overline{T}^2(w) d\Omega \leqslant \frac{K_1}{B} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] d\Omega \leqslant \int_\Omega w^2 d\Omega + \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega + \tag{3.6}$$

$$+ \frac{K_1}{B} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] d\Omega \leqslant \delta \, |w|^2_{W_2^2(\Omega)}$$

où

$$\delta = \max \left(1, \frac{K_1}{B} \right),$$

$$K_1 = \max \left\{ \frac{A}{K_{31}^0 + K_{23}^0}, \ \frac{1}{2} \left(K_{66}^0 - \frac{2A}{K_{31}^0 + K_{23}^0} \right) \right\}. \tag{3.7}$$

De (3.3) et (3.6) il résulte

$$\frac{1}{\delta} |w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} \leqslant |w|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \gamma \, |w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} \tag{3.8}$$

et le lemme est démontré.

Dans ce qui suit nous avons considéré

$$|w|^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} = \int_\Omega \overline{T}^2(w) d\Omega = \frac{1}{B} \int_\Omega \left[\frac{A}{K_{31}^0 + K_{23}^0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(K_{66}^0 - \frac{2A}{K_{31}^0 + K_{23}^0} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \frac{A}{K_{31}^0 + K_{23}^0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] d\Omega.$$

Nous supposons que la fonction du matériel f satisfait aux conditions:

a) la fonction $f(\xi^2)$ est trois fois continument différentiable dans Ω;

b) $c_1 < f(\xi^2) < c_2$, $c_1, c_2 =$ ctes positives;

c) $c_3 \leqslant f(\xi^2) + 2f'(\xi^2)\xi^2 < c_4$; $c_3, c_4 =$ ctes. positives.

Considérons l'opérateur P défini de $W_2^2(\Omega)$ à $L_2(\Omega)$. Pour $w, v \in W_2^2(\Omega)$ nous attachons à l'équation (3.1) la forme Dirichlet non linéaire [1]:

$$a(w, v) = < \frac{A}{B(K_{31}^0 + K_{23}^0)} f(\overline{T}^2) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} > +$$

$$+ < \frac{K_{66}^0}{B} f(\overline{T}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} > + \tag{3.9}$$

$$+ < \frac{A}{B(K_{31}^0 + K_{23}^0)} f(\overline{T}^2) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right], \ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} >,$$

ou

$$a(w, v) = \int_\Omega f(\overline{T}^2)(w) \ \overline{T}^2(w, v) \, d\Omega, \tag{3.10}$$

où

$$\overline{T}^2(w, v) = \frac{A}{B(K_{31}^0 + K_{23}^0)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) +$$

$$\frac{K_{66}^0}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{3.11}$$

Définition 3.1. [1]. *La fonction $w = w(x_1, x_2)$ s'appelle solution faible de l'équation $(3.1)_1$ satisfaisant aux conditions homogènes à la limite, si seulement si pour chaque $v \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ on a*

$$a(w, v) = < \eta, v > \quad \text{avec } w \in \mathring{W}_2^2(\Omega). \tag{3.12}$$

Nous allons montrer que le problème (3.12) est équivalent à la solution d'une équation fonctionnelle dans $\mathring{W}_2^2(\Omega)$. De (3.10), en tenant compte de la condition b) et l'inégalité de Cauchy

$$\overline{T}^2(w, v) \leqslant \overline{T}(w) . \overline{T}(v) \tag{3.13}$$

il résulte

$$a(w, v) \leqslant c_2 \, |w|_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} \, |v|_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}. \tag{3.14}$$

L'inégalité (3.14) montre que pour chaque w fixé dans $\mathring{W}_2^2(\Omega)$, $a(w, v)$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $\mathring{W}_2^2(\Omega)$. Du théorème de représentation des fonctionnelles linéaires sur un espace Hilbert, il résulte que pour w fixé dans $\mathring{W}_2^2(\Omega)$, Gw est uniquement déterminé, $Gw \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ et

$$(Gw, v) = a(w, v) \text{ pour tout } v \in \mathring{W}_2^2(\Omega). \tag{3.15}$$

D'autre part considérons $\eta \in L_2(\Omega)$; il existe ω unique qui appartient à $\mathring{W}_2^2(\Omega)$, tel que

$$< \eta, v > = (\omega, v). \tag{3.16}$$

De (3.15) et (3.16) il résulte que la résolution du problème (3.1) est équivalente à la résolution de l'équation

$$Gw = \omega, \quad w \in \mathring{W}_2^2(\Omega), \quad \omega \text{ fixe dans } \mathring{W}_2^2(\Omega). \tag{3.17}$$

Théorème 3.1. *Si la fonction du matériel f satisfait aux conditions* a) *b), c), alors*

$$a(w, w - v) - a(v, w - v) \geqslant \alpha^2 \mid w - v \mid^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}, \quad w, v \in \mathring{W}_2^2(\Omega). \tag{3.18}$$

Démonstration. En effet, en posant $h = tw + (1 - t)v$, $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} a(w, w - v) - a(v, w - v) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\{ \int_\Omega f(\overline{T}^2(h)) \overline{T}^2(h, w - v)\, d\Omega \right\} dt = \\ &= \int_0^1 \int_\Omega \left\{ f(\overline{T}^2(h)) \overline{T}^2(w - v) + 2f'(T^2(h)) [\overline{T}^2(h, w - v)]^2 \right\} d\Omega\, dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dans (3.9), en utilisant l'inégalité de Cauchy (3.13), on trouve

$$a(w, w - v) - a(v, w - v) \geqslant \int_\Omega \left\{ \int_0^1 [f(\overline{T}^2(h)) - 2f_2'(\overline{T}^2(h)) \overline{T}^2(h)] dt \right\} \overline{T}^2(w - v)\, d\Omega, \tag{3.20}$$

où $2f_2'$ désigne la partie négative de la fonction f'.

Si $f' \geqslant 0$, alors $f_2' = 0$; d'où, vu (3.20) et la condition b), on obtient

$$a(w, w - v) - a(v, w - v) \geqslant c_1 \int_\Omega \overline{T}^2(w - v)\, d\Omega = c_1 \mid w - v \mid^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}. \tag{3.21}$$

Si $f' < 0$, alors $f_2' = -f'$; d'où, vu (3.20) et condition c), on obtient

$$a(w, w - v) - a(v, w - v) \geqslant c_3 \int_\Omega \overline{T}^2(w - v)\, d\Omega = c_3 \mid w - v \mid^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}. \tag{3.22}$$

De (3.21) et (3.22), il résulte

$$a(w, w - v) - a(v, w - v) \geqslant \alpha^2 \int_\Omega \overline{T}^2 (w - v)\, d\Omega = \alpha^2 \mid w - v \mid^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}, \tag{3.23}$$

avec $\alpha^2 = \min(c_1, c_3)$ et le théorème est démontré.

Théorème 3.2. *Si la fonction du matérial f satisfait aux conditions a) et b), alors*

$$a(w, w) \geqslant \beta^2 \mid w \mid^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Démonstration. En mettant dans (3.10) $v = w$, on obtient

$$a(w, w) = \int_\Omega f(T^2(w)) \overline{T}^2(w)\, d\Omega. \tag{3.25}$$

En utilisant la condition $b)$ nous avons

$$a(w, w) \geqslant c_1 \int_\Omega \overline{T}^2(w)\, d\Omega = \beta^2 \mid w \mid^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} \tag{3.26}$$

et le théorème est démontré avec $\beta^2 = c_1$.

En tenant compte des théorèmes 3.1 et 3.2, on peut démontrer le

Théorème 3.3. *Si la fonction du matériel f satisfait aux conditions a), b), c), alors*

1. *L'opérateur G est strictement monotone.*
2. *L'opérateur G est coercitif.*
3. *L'opérateur G est demi-continu.*

Démonstration. 1. Si l'on tient compte de (3.15) on obtient

$$\begin{aligned} (Gw, w - v) &= a(w, w - v), \\ (Gv, w - v) &= a(v, w - v), \end{aligned} \tag{3.27}$$

mais, vu le théorème 3.1, nous avons

$$(Gw - Gv, w - v) \geqslant \alpha^2 \mid w - v \mid^2_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}. \tag{3.28}$$

Cela prouve que l'opérateur G est strictement monotone.

2. Puisque $a(w, w) = (Gw, w)$, selon le théorème 3.2 il résulte

$$(Gw, w) \geqslant \beta^2 \, | w |^2_{\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)}$$

d'où

$$\frac{(Gw, w)}{| w |^2_{\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)}} \to \infty \text{ quand } | w |_{\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)} \to \infty, \tag{3.29}$$

c-est-à-dire l'opérateur G est coercitif.

3. Si l'on tient compte de (3.14) et (3.15) il résulte que l'opérateur G est borné. Pour montrer que l'opérateur est demicontinu, on démontre que pour chaque suite w_n convergente vers w dans $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ il existe une sous-suite de Gw_n convergente faiblement à Gw.

De ce théorème et aussi du théorème de Browder [1] il résulte le

Théorème 3.4. *Si la fonction du matériel f satisfait aux conditions a), b), c), alors le problème de la déformation plastique plane pour les corps orthotropes avec consolidation admet une solution unique, faible, appartenant à l'espace $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega_2)$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Browder E. F. — *Variational boundary value problems for elliptic equations arbitrary order*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 50 (1963), p. 31—47.
2. Diaconiţa V. — *Sur la torsion plastique des barres orthotropes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser, Sci. techn., XIX, No. 1 (1971), p. 32—40.
3. Hill R. — *Matematicheskaya teoriya plastichnosti*, Moskva, 1956.
4. Kachanov M. L. — *Osnovy teorii plastichnosti*, Moskva, 1969.
5. Mikhlin S. G. — *Problema minimuma kvadratichnogo funkţionala*, Moskva—Leningrad, 1952.
6. Olszak W., Urbanowski W. — *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos. 8 (1956), p. 671—694.

ASUPRA DEFORMĂRII PLASTICE PLANE A CORPURILOR ORTOTROPE CU CONSOLIDARE

Rezumat

În această lucrare se consideră problema existenţei şi unicităţii soluţiei problemei stării de deformare plastică plană pentru corpuri ortotrope cu consolidare. Se consideră acel tip de consolidare în care limitele de curgere cresc proporţional cu un parametru ce depinde de istoria de deformare. Teorema 3.4 arată existenţa şi unicitatea soluţiei slabe a problemei puse.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN THE THEORY OF INCOMPRESSIBLE MICROPOLAR FLUIDS

BY

VALERIU SAVA

1. Introduction. Theories of fluids with deformable microstructure were given by Eringen [1] and Allen, De Silva and Kline [3]. A subclass of these fluids is that of the micropolar fluids defined by Eringen [2].

The purpose of the present paper is to define the weak solution of the boundary-value problem in the stationary case and homogeneous boundary conditions, for the incompressible micropolar fluids, as they were defined in [2], and to prove the existence and the uniqueness of the solution. In Sec. 2 we give the basic equations and the boundary condition for the theory of incompressible micropolar fluids. The functional spaces are introduced and the weak solution for the boundary-value problem is defined in Sec. 3. In Sec. 4, the existence and uniqueness of the solution is proved.

2. Basic Equations. Throughout this paper we employ a rectangular coordinate system x_1, x_2, x_3. All vectors are referred to this system. A comma represents partial differentiation with respect to space variable x_k, and a superposed dot indicates material differentiation.

Now we list the basic equations in the linear theory of incompressible micropolar fluids.

$$v_{i,i} = 0, \tag{2.1}$$

$$t_{ij,i} + \rho(f_j - \dot{v}_j) = 0, \tag{2.2}$$

$$m_{ij,i} + \varepsilon_{jik} t_{ik} + \rho(l_j - a^2 \dot{\varphi}_j) = 0, \tag{2.3}$$

$$t_{ij} = -\pi\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + k(v_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\varphi_k). \tag{2.4}$$

$$m_{ij} = \alpha\varphi_{r,r}\delta_{ij} + \beta\varphi_{i,j} + \gamma\varphi_{j,i}. \tag{2.5}$$