lytically on ε, i. e. one can determine a positive number ε_0 such that for $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_k^{(n)}}{n!} \varepsilon^n ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^{(n)}}{n!} \varepsilon^n ,$$

are uniformily convergent.

These results justify the method used in [2] for the integration of the equations of non-linear thermoelasticity.

REFERENCES

1. Green A. E. and J. E. Adkins — *Large Elastic Deformation and Non-linear Continuum Mechanics*, Oxford. Clarendon Press. 1960.
2. Ieşan D. — *Asupra teoriei termoelasticităţii neliniare*, An. şt. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, ser. nouă, sect. I Mat., Tom XII (1967), f. 1, 162.
3. Kupradze V. D., Gegelia T. G., Bashelishvili M. O., Burchuladze T. V. — *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, (in Russian), Tbilisi. (1968).
4. Miranda C. — *Problemi di esistenza in Analisi Funzionale*, Quaderni Matematici della Scuola Normale Superiore di Pisa 1948.
5. Stoppelli F. — *Un teorema di esistenza ed unicita relativo alle equazioni dell'Elastostatica isoterma per deformazioni finite*, Ricerche Mat. 3, 247—267 (1954).
6. Stoppelli F. — *Sulla sviluppabilità in serie di potenze di un parametro delle soluzioni delle equazioni dell'Elastostatica isoterma*, Ricerche Mat. 4, 58—73 (1955).

O TEOREMĂ DE EXISTENŢĂ, UNICITATE ŞI ANALITICITATE PENTRU SOLUŢIA ECUAŢIEI TERMOELASTICITĂŢII NELINIARE

Rezumat

În acest articol se demonstrează o teoremă de existenţă şi unicitate pentru ecuaţiile termoelasticităţii neliniare în cazul cînd mărimile forţei masice, sursei de căldură şi a datelor pe frontieră sînt proporţionale cu un parametru ε.

Dacă energia liberă şi componentele fluxului termic sînt funcţii analitice, se arată că soluţia depinde analitic de parametru.

ÜBER PERFEKTE UND KRITISCH IMPERFEKTE GRAPHEN

VON

E. OLARU

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir endliche ungerichtete Graphen $G = (X, U)$, die keine Schlingen enthalten und in denen je zwei verschiedene Knotenpunkte durch höchstens eine Kante verbunden sind. Dabei bezeichnet X die Knotenpunktmenge und U die Kantenmenge von G.

Der Graph $G' = (X', U') = [X']_G$ heißt *Teilgraph* des Graphen G, wenn $X' \subseteq X$ und wenn zwei Knotenpunkte in G' genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie auch in G durch eine Kante verbunden sind; wir sagen auch $[X']_G$ ist der durch die Knotenpunktmenge X' aufgespannte Teilgraph von G. Ist X' eine echte Untermenge von X, so nennen wir $[X']_G$ einen echten Teilgraphen von G und wir schreiben $[X']_G \subset G$. Ein vollständiger Teilgraph von G heißt eine *Clique* in G. Mit $\omega(G)$ bezeichnen wir die *Dichte* von G, d. h. die maximale Anzahl der Knotenpunkte, deren Menge eine Clique in G aufspannt.

Eine Teilmenge $S \subseteq X$ heißt eine *Menge unabhängiger Knotenpunkte* (in Bezug auf G), wenn es gilt

$$[S]_G = (S, \varnothing).$$

Die maximale Anzahl der unabhängigen Knotenpunkte von G bezeichnen wir mit $\alpha(G)$; $\alpha(G)$ ist die *Stabilitätszahl* des Graphen G. Eine Menge S von in G unabhängigen Knotenpunkten mit genau $\alpha(G)$ Elementen wollen wir ein *Stabilitätssystem* des Graphen G nennen. Der Graph $G^* = (X^*, U^*)$ heißt einen *Kreis* $L_k (k \geqslant 3)$ (oder einen k-Kreis), wenn man die Knotenpunkte von G derart als Folge $x_1, x_2, \ldots, x_k$ anordnen kann, daß

$$U^* = \{(x_i, x_{i+1})\}_{i=1,2,\ldots,k} \quad (x_{k+1} = x_1)$$

gilt.

Die Anzahl k der Kanten heißt die *Länge* des Kreises, und man nennt den Kreis gerade oder ungerade, je nachdem, ob k eine gerade oder unge-

rade Zahl ist. Wir sagen: x_i und x_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, k;\ x_{i+1} = x_i)$ liegen auf L_k benachbart. Ist der Kreis L_k ein Untergraph des Graphen G (d. h. die Knotenpunkte und Kanten von L_k sind auch Knotenpunkte und Kanten von G), so sagen wir, daß L_k ein Kreis in G ist. Eine Kante von G, die zwei auf einem Kreis L_k (in G) nicht benachbart liegende Knotenpunkte des Kreises verbindet, heißt eine *Sehne* von L_k. Ein *Loch* des Graphen G ist ein Kreis L_k von $G (k \geqslant 4)$, der keine Sehne besitzt.

Der Graph $G = (X, U)$ mit $n(G) = |X| > 1$ sei zusammenhängend und es sei $\varnothing \neq X' \subset X$. X' heißt eine *trennende Knotenpunktmenge* von G, wenn der Graph $[X - X']_G$ nicht zusammenhängend ist. Ist X' eine trennende Knotenpunktmenge von G, und ist $[K]_G$ eine solche Komponente von $[X - X']_G$, daß jeder Knotenpunkt aus X' mit mindestens einem Knotenpunkt aus K (durch eine Kante) verbunden ist, so heißt $[K]_G$ *eine bezüglich X' normale Komponente*. Ist X' eine trennende Knotenpunktmenge von G und gibt es mindestens zwei bezüglich X' normale Komponenten von $[X - X']_G$, so heißt X' eine *normale trennende Knotenpunktmenge* des Graphen G.

Der zu G *komplementäre Graph* $\bar{G}$ ist der Graph mit der gleichen Knotenpunktmenge wie G, in dem zwei verschiedene Knotenpunkte genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie es in G nicht sind. Es gilt offensichtlich

$$\alpha(\bar{G}) = \omega(G), \quad \omega(\bar{G}) = \alpha(G).$$

2. Perfekte und punktkritisch α-imperfekte Graphen. Es bezeichne $Z = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ eine beliebige m-Zerlegung der Knotenpunktmenge X des Graphen G (d. h. es gelte: $X_i \neq \varnothing$, $X_i \cap X_j = \varnothing$, $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m)$), die eine der folgenden Eigenschaften besitzt:

(e) Die Graphen $[X_i]_G$ sind Cliquen in G $(i = 1, 2, \ldots, m)$;

(f) $[X_i]_G = (X_i, \varnothing)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Die minimale Anzahl der Mengen, aus denen eine Zerlegung mit der Eigenschaft (e), bzw. (f), bestehen kann (die *Cliquenüberdeckungszahl* bzw. die *chromatische Zahl* von G) bezeichnen wir mit $\nu(G)$ bzw. $\chi(G)$. Es gilt

$$\nu(G) \geqslant \alpha(G), \quad \chi(G) \geqslant \omega(G).$$

Definition 1. *Ein Graph G mit der Eigenschaft, dass für jeden Teilgraphen $G' \subseteq G$ die Beziehung $\nu(G') = \alpha(G')$ $(\chi(G') = \omega(G'))$ gilt, heisst α-perfekt, bzw. χ-perfekt; ein Graph der zugleich α-perfekt und χ-perfekt ist, heisst perfekt.*

Bekanntlich sind die α-perfekten Graphen (bzw. χ-perfekten) von einer Reihe bekannter Graphentheoretiker untersucht worden. Diesbezüglich wurde folgende Vermutung ausgenprochen;

Ein Graph G ist genau dann α-perfekt (und auch χ-perfekt), wenn weder G noch sein Komplement $\bar{G}$ ein ungerades Loch enthält (Berge-Gilmore).

Definition 2. *Ein Graph $G = (X, U)$ heisst punktkritisch α-imperfekt (kurz α-kritisch), wenn es gilt:*

(a) $\nu(G) > \alpha(G)$;

(b) *Für jedes $x \in X$ ist der Graph $G - x = [X - \{x\}]_G$ α-perfekt.*

Bemerkung. Die Bedingung (b) ist äquivalent mit

(b') $\nu(G') = \alpha(G')$ für jeden echten Teilgraphen $G' \subset G$.

Wir haben in [2] gezeigt, daß sich mit Hilfe der kritisch α-imperfekten Graphen viele bekannte Sätze über perfekte Graphen einheitlich und relativ einfach beweisen lassen und neue interessante Resultate erhalten werden. Man kann leicht feststellen (vgl. [2], Hilfssatz 1), daß ein α-imperfekter Graph mindestens einen α-kritischen Teilgraphen enthält, und folglich ist die Berge-Gilmoresche Vermutung mit folgender äquivalent:

Ein Graph G ist genau dann α-kritisch, wenn G oder sein Komplement $\bar{G}$ ein ungerader Kreis der Länge grosser als drei ist.

Ein ungerader Kreis L_{2k+1} und sein Komplement $\bar{L}_{2k+1}$ $(k \geqslant 2)$ sind, wie man leicht sehen kann, reguläre Graphen G vom Grade $r(G) = n(G) - 2\alpha(G) + 1$. Es ist zu vermuten, daß jeder α-kritische Graph G regulär vom Grade $r(G) = n(G) - 2\alpha(G) + 1$ ist.

Der Kürze halber benutzen wir folgende Bezeichnungen: $H = (Y, V)$ sei ein beliebiger Graph. Sind $Y', Y'' \subset Y$ und $Y' \cap Y'' = \varnothing$, so soll $Y' \rho_H Y''$ folgendes bedeuten: für jedes Paar von Knotenpunkten $y' \in Y'$ und $y'' \in Y''$ gibt es in H eine Kante, die y' und y'' verbindet; $Y' \bar{\rho}_H Y''$ bedeutet: es gibt in H keine Kante derart, daß sie zwei Knotenpunkte $y' \in Y'$, $y'' \in Y''$ verbindet. Besteht Y' aus einem einzigen Knotenpunkt y, so werden wir $y \rho_H Y''$ (anstatt $\{y\} \rho_H Y''$) schreiben, wenn $Y' \rho_H Y''$ gilt.

Ein α-kritischer Graph und sein Komplement sind zusammenhängende Graphen (vgl. [2], Satz 4).

Weiter wollen wir folgendes beweisen:

Satz 1. *Ist T ein derartige trennende Knotenpunktmenge des α-kritischen Graphen $G = (X, U)$, so dass $\alpha([X - T]_G) = \alpha(G)$ gilt, so spannt T einen zusammenhängenden Teilgraphen in dem zu G komplementäre Graphen $\bar{G}$ auf.*

Beweis. Es sei $T \subset X$ eine die Bedingung des Satzes erfüllende trennende Knotenpunktmenge des Graphen G, so daß der von T in $\bar{G}$ aufgespannte Teilgraph $[T]_{\bar{G}}$ kein zusammenhängender Graph ist. Dann kann die Menge T in zwei Teilen A und B derart zerlegt werden, daß gilt.

$$A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ A \cap B = \varnothing,\ A \cup B = T \text{ und } A \rho_G B.$$

Da $G - T = [X - T]_G$ definitionsgemäß nicht zusammenhängend ist, kann er in zwei Teilgraphen $G_1 = [X_1]_G$ und $G_2 = [X_2]_G$ so zerlegt werden, daß

$$X_1 \neq \emptyset,\ X_2 \neq \emptyset,\ X_1 \cap X_2 = \emptyset,\ X_1 \cup X_2 = X - T \text{ und } X_1 \bar{\rho}_G X_2,$$

gilt.

Folgende Beziehung ist unmittelbar klar

$$\alpha([X - T]_G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2) = \alpha(G). \tag{1}$$

Da $B \neq \emptyset$ ist, haben wir $[X_1 \cup X_2 \cup A]_G \subset G$, und folglich gilt wegen (b')

$$\nu([X_1 \cup X_2 \cup A]_G) = \alpha([X_1 \cup X_2 \cup A]_G) = \alpha(G). \tag{2}$$

Es sei nun Z eine $\alpha(G)$-Zerlegung (deren Existenz durch (2) gesichert worden ist) des Graphen $[X_1 \cup X_2 \cup A]_G$. $A_1(A_2)$ sei die Menge derjenigen Knotenpunkte von A, die in der Zerlegung Z zu denjenigen Cliquen gehören, die auch Knotenpunkte aus X_1 (bzw. X_2) enthalten. Es gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cup A_2 = A$, denn zwei Knotenpunkte $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ können nicht zur gleichen Clique gehören (da $X_1 \bar{\rho}_G X_2$ gilt) und in der Zerlegung Z keine Clique existiert, die nur aus Knotenpunkten aus A besteht (wegen (1) und (2)). Wie man leicht sieht, gilt

$$\alpha([X_1 \cup A_1]_G) = \alpha(G_1), \tag{3}$$

$$\alpha([X_2 \cup A_2]_G) = \alpha(G_2). \tag{4}$$

Analog haben wir

$$\nu([X_1 \cup X_2 \cup B]_G) = \alpha([X_1 \cup X_2 \cup B]_G) = \alpha(G).$$

Mit Hilfe einer $\alpha(G)$-Zerlegung des Graphen $[X_1 \cup X_2 \cup B]_G$ definieren wir genau wie oben die Mengen B_1 und B_2, die folgende Beziehungen erfüllen

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cup B_2 = B,$$

$$\alpha([X_1 \cup B_1]_G) = \alpha(G_1), \tag{5}$$

$$\alpha([X_2 \cup B_2]_G) = \alpha(G_2). \tag{6}$$

Wir zeigen noch

$$\alpha([X_1 \cup A_1 \cup B_1]_G) = \alpha(G_1), \tag{7}$$

$$\alpha([X_2 \cup A_2 \cup B_2]_G) = \alpha(G_2). \tag{8}$$

Ein Stabilitätssystem des Graphen $[X_1 \cup A_1 \cup B_1]_G$ (bzw. des Graphen $[X_2 \cup A_2 \cup B_2]_G$) kann auf folgende Weise gebildet werden:

– Es enthält nur Knotenpunkte aus X_1 (bzw. X_2); dann gilt offensichtlich die Behauptung, oder

– es enthält Knotenpunkte aus $X_1 \cup A_1$ $(X_2 \cup A_2)$; dann kann das Stabilitätssystem keinen Knotenpunkt aus B_1 (bzw. B_2) enthalten, da $A_1 \rho_G B_1$ $(A_2 \rho_G B_2)$ gilt.

Analog ist der Fall, in dem das Stabilitätssystem Knotenpunkte aus $X_1 \cup B_1$ (bzw. $X_2 \cup B_2$) enthält. Aus (3) und (5) bzw. (4) und (6) ergibt sich die Behauptung.

Nun haben wir

$$[X_1 \cup A_1 \cup B_1]_G \subset G,\ [X_2 \cup A_2 \cup B_2]_G \subset G \text{ (da } X_2 \neq \emptyset \text{ und } X_1 \neq \emptyset)$$

und folglich gilt wegen (b'), (7), (8) und (1):

$$\nu(G) = \nu([X_1 \cup X_2 \cup A \cup B]_G) \leqslant \nu([X_1 \cup A_1 \cup B_1]_G) + \nu([X_2 \cup A_2 \cup B_2]_G) =$$
$$= \alpha([X_1 \cup A_1 \cup B_1]_G) + \alpha([X_2 \cup A_2 \cup B_2]_G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2) = \alpha(G),$$

im Widerspruch zur Eigenschaft (a) α-kritischer Graphen. Der Satz 1 ist damit bewiesen.

Folgerung 1. *Ist der Graph G α-kritisch, so spannt keine trennende Knotenpunktmenge von G eine Clique in G auf.*

Beweis. Wir nehmen an, daß der α-kritische Graph G eine trennende Knotenpunktmenge besitzt, die in G eine Clique aufspannt. Diese sei mit Q bezeichnet, dann gilt offensichtlich

$$\alpha(G - Q) = \alpha(G).$$

Der Graph $[Q]_G$ besteht nur aus isolierten Knotenpunkten, also ist er kein zusammenhängender Graph, im Widerspruch zum Satz 1.

Bemerkung. Mit Hilfe der Folgerung 1 kann man sofort folgenden bekannten Satz beweisen (vgl. [2], Folgerung des Satzes 1): *Ist der Graph H trianguliert, so ist H α-perfekt* (Hajnal-Surányi).

Für einen beliebigen Graphen $H = (Y, V)$ seien die Graphen $H^1_{(y)}$ und $H^2_{(y)}$ $(y \in Y)$ folgendermaßen definiert:

$$H^1_{(y)} = [Y^1]_H, \quad H^2_{(y)} = [Y^2]_H,$$

wobei

$$Y^1 = \{ y^1 / y^1 \in Y \text{ und } y \bar{\rho}_H y^1 \},$$
$$Y^2 = \{ y^2 / y^2 \in Y \text{ und } y \rho_H y^2 \}.$$

Dann gilt

Folgerung 2. *Ist der Graph $G = (X, U)$ α-kritisch, so ist $\bar{G}^2_{(x)} = [X^2]_{\bar{G}}$ für jedes $x \in X$ ein zusammenhängender Graph.*

Beweis. Die Knotenpunktmenge X^2 ist für jedes $x \in X$ offensichtlich eine trennende Knotenpunktmenge des Graphen G. Außerdem gilt

$$\alpha([X - X^2]_G) = \alpha([X^1 \cup \{x\}]_G) = \alpha(G),$$

da bekanntlich jeder Knotenpunkt des α-kritischen Graphen G zu mindestens $\alpha(G)$ Stabilitätssystemen gehört. Aus Satz 1 ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung. Mit Hilfe der Folgerung 2 kann man einfach (vgl. [2], Satz 5) folgenden wichtigen Satz beweisen:

Ist der Graph H transitiv orientierbar, so ist H α-perfekt. (Dilworth).

Folgerung 3. *Ist der Graph G α-kritisch, so ist die Menge X^2 (X^1) der Nachbarn eines beliebigen Knotenpunktes x von G (bzw. von $\bar{G}$) eine normale trennende Knotenpunktmenge des Graphen G (bzw. $\bar{G}$).*

Beweis. Wir geben den Beweis für den Graphen $\bar{G}$ an. Der Graph $[X - X^1]_{\bar{G}}$ ist offensichtlich nicht zusammenhängend, und gemäß Folgerung 2 besitzt er genau zwei Komponenten: $G^2_{(x)} = [X^2]_{\bar{G}}$ und $[\{x\}]_{\bar{G}}$. Da definitionsgemäß $X^1 \rho_G x$ gilt, bleibt zu zeigen, daß jeder Knotenpunkt aus X^1 mit mindestens einem Knotenpunkt aus X^2 durch eine Kante verbunden ist. Gibt es einen Knotenpunkt $x^1 \in X^1$, so daß $x^1 \bar{\rho}_G X^2$ (d. h. $x^1 \rho_G X^2$) gilt, so ist $X^2 \cup \{x^1\}$ eine trennende Knotenpunktmenge des Graphen G mit der Eigenschaft, daß

$$\alpha([X - (X^2 \cup \{x^1\})]_G) = \alpha([(X^1 - \{x^1\}) \cup \{x\}]_G) =$$
$$= \alpha([X^1 - \{x^1\}]_G) + \alpha([\{x\}]_G) = \alpha(G)$$

gilt, da für jedes $x^1 \in X^1$ die Beziehung $\alpha([X^1 - \{x^1\}]_G) = \alpha(G) - 1$ gilt (vgl. [2], Hilfssatz 4, Beziehung 2). Die trennende Knotenpunktmenge $X^2 \cup \{x^1\}$ des Graphen G erfüllt folglich die Bedingung des Satzes 1. Der Graph $[X^2 \cup \{x^1\}]_G$ ist aber gemäß unserer Annahme nicht zusammenhängend, im Widerspruch zum Satz 1. Analog beweist man, daß zu jedem Knotenpunkt x die Menge X^2 eine normale trennende Knotenpunktmenge von G ist. (Siehe auch [2], Folgerung des Hilfssatzes 5).

Zum Schluß wollen wir eine Beweismethode für die Berge-Gilmoresche Vermutung für Graphen H mit $\alpha(H) = 2$ angeben, die vermutlich auch für Graphen mit beliebiger Stabilitätszahl verallgemeinert werden kann. Dazu zeigen wir:

Satz 2. *Ein Graph G mit der Stabilitätszahl $\alpha(G) = 2$ ist genau dann α-kritisch, wenn G oder sein Komplement $\bar{G}$ ein ungerader Kreis der Länge grösser als drei ist.*

Beweis. Ein ungerader Kreis L_{2k+1} und sein Komplement $\bar{L}_{2k+1}$ $(k \geqslant 2)$ sind offensichtlich α-kritische Graphen. Um zu zeigen, daß der α-kritische Graph G oder sein Komplement $\bar{G}$ ein ungerader Kreis der Länge größer als drei ist, genügt es die Existenz eines ungeraden Loches in G oder in $\bar{G}$ zu beweisen. Da ein solches Loch L (und auch sein Komplement) nicht α-zerlegbar (d. h. $\nu(L) \neq \alpha(L)$) ist, muß G bzw. $\bar{G}$ mit diesem Loch zusammenfallen. Es sei $G = (X, U)$ ein 2-kritischer Graph und x ein beliebiger Knotenpunkt von G. Dann gilt $\alpha(G - x) = \alpha(G)$. $Z = \{A_1, A_2\}$ sei eine beliebige 2-Zerlegung des Graphen $G - x$.

Wir betrachten die Mengen

$$A^1_i = \{x^1_i / x^1_i \in A_i \text{ und } x^1_i \bar{\rho} x\ ^{*)} \quad (i = 1, 2),$$
$$A^2_i = \{x^2_i / x^2_i \in A_i \text{ und es gibt } x^1_j \in A^1_j \text{ mit } x^1_j \bar{\rho} x^2_i\} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2),$$
$$A_{im-1} = \{x_{im-1} / x_{im-1} \in A_i \text{ und es gibt } x^m_j \in A^m_j \text{ mit } x^m_j \bar{\rho} x_{im-1}\}$$
$$(i \neq j;\ i, j = 1, 2;\ m = 2, 3, \ldots)$$

und

$$A^{m+1}_i = A_{im-1} - A^{m-1}_i \quad (i = 1, 2;\ m = 2, 3, \ldots).$$

Es gelten

$$x \bar{\rho} A^1_i,\ x \rho (A_i - A^1_i) \quad (i = 1, 2).$$
$$A^1_1 \rho A^1_2 \ (da\ \alpha(G) = 2 \text{ ist}).$$
$$A^1_i \neq \emptyset \ (i = 1, 2).$$

Aus $A^1_1 \rho A^1_2$ und aus der Definition der Mengen A^2_i ergibt sich weiter

$$A^2_i \cap A^1_i = \emptyset \text{ und folglich } x \rho A^2_i \ (i = 1, 2),$$
$$A^2_i \rho A^1_i \ (i = 1, 2),$$
$$A^1_i \rho (A_j - A^2_j) \ (i \neq j;\ i, j = 1, 2),$$
$$A^2_i \rho^* A^1_j \ (i \neq j;\ i, j = 1, 2).$$

($A \rho^* B$ bedeutet: Zu jedem $a \in A$ gibt es mindestens ein $b \in B$, so daß $a \bar{\rho}_G b$ gilt). Die Mengen A^2_i $(i = 1, 2)$ sind nicht leer, da aus $A^2_i = \emptyset$ für mindestens ein i die Beziehung $A^1_i \rho A_j$ $(i \neq j)$ folgt, und dann ist eine der Zerlegungen $\{(A_1 - A^1_1) \cup \{x\},\ A_2 \cup A^1_1\}$ oder $\{A_1 \cup A^1_2,\ (A_2 - A^1_2) \cup \cup \{x\}\}$ eine 2-Zerlegung des Graphen G, im Widerspruch zur Eigenschaft (a) α-kritischer Graphen.

Wir wollen nun folgendes zeigen:

(A) *Es gibt eine endliche natürliche Zahl $m \geqslant 2$, so dass zwei Knotenpunkte $x^m_1 \in A^m_1$ und $x^m_2 \in A^m_2$ derart existieren, dass $x^m_1 \bar{\rho} x^m_2$ gilt.*

Gilt die Behauptung (A) für $m = 2$ nicht (d. h. es gilt $A^2_1 \rho A^2_2$), so ergibt sich

$$(1) \quad \begin{aligned} & A^k_i \rho A^l_j \quad (i, j = 1, 2;\ k, l = 1, 2 \text{ und } l \neq k \pm 1 \text{ falls } i \neq j), \\ & A^2_i \rho x \quad (i = 1, 2), \\ & A^2_i \rho^* A^1_j \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2), \\ & A^1_i \bar{\rho} x \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

---

*) Anstatt ρ_G, $\bar{\rho}_G$, ρ^*_G schreiben wir einfach ρ, $\bar{\rho}$, ρ^*.

Außerdem gilt $A_{i1} \nsubseteq A_i^1$, denn sonst würde $\{(A_1 - A_1^1) \cup A_2^2 \cup \{x\}, (A_2 - A_2^2) \cup A_1^1\}$ (für $i = 1$) oder $\{(A_1 - A_1^2) \cup A_2^1, (A_2 - A_2^1) \cup A_1^2 \cup \{x\}\}$ (für $i = 2$) eine 2-Zerlegung des Graphen G bilden. Folglich haben wir $A_i^3 = A_{i1} - A_i^1 \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$. Da $A_1^2 \rho A_2^2$ gilt, ergibt sich $A_i^3 \cap A_i^2 = \emptyset$ $(i = 1, 2)$. Daraus und aus der Definition von A_i^3 folgt

$$
(1') \qquad \begin{aligned}
& A_i^3 \rho A_j^l \quad (i, j = 1, 2;\ l = 1, 2 \text{ und } l \neq 2 \text{ falls } i \neq j),\\
& A_i^3 \rho x \quad (i = 1, 2),\\
& A_i^3 \rho^* A_j^2 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2).
\end{aligned}
$$

Wir nehmen an, daß die Aussage (A) für keine Zahl m mit $2 \leqslant m \leqslant p$ eintritt, d. h. die nicht leeren Mengen $A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^p$ $(i = 1, 2)$ erfüllen die Beziehungen

$$
(p-1) \qquad \begin{aligned}
& A_i^k \rho A_j^l \quad (i, j = 1, 2;\ k, l = 1, 2, \ldots, p \text{ und } l \neq k \pm 1 \text{ falls } i \neq j),\\
& A_i^s \rho x \quad (i = 1, 2;\ s = 2, 3, \ldots, p),\\
& A_i^s \rho^* A_j^{s-1} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2;\ s = 2, 3, \ldots, p),\\
& A_i^1 \bar{\rho} x \quad (i = 1, 2).
\end{aligned}
$$

Wenn $A_{ip-1} \subseteq A_i^{p-1}$ für mindestens ein i gilt, dann ist eine der folgenden Zerlegungen eine 2-Zerlegung des Graphen G: Für $p = 2n$:

$$\{(A_1 - \bigcup_{t=1}^{2n-1} A_1^t) \cup (\bigcup_{t=2}^{2n} A_2^t \cup \{x\}),\ (A_2 - \bigcup_{t=2}^{2n} A_2^t) \cup (\bigcup_{t=1}^{2n-1} A_1^t)\} \quad (\text{für } i = 1),$$

oder

$$\{(A_1 - \bigcup_{t=2}^{2n} A_1^t) \cup (\bigcup_{t=1}^{2n-1} A_2^t),\ (A_2 - \bigcup_{t=1}^{2n-1} A_2^t) \cup (\bigcup_{t=2}^{2n} A_1^t \cup \{x\}\} \quad (\text{für } i = 2);$$

für $p = 2n + 1$:

$$\{(A_1 - \bigcup_{t=2}^{2n} A_1^t) \cup (\bigcup_{t=1}^{2n+1} A_2^t),\ (A_2 - \bigcup_{t=1}^{2n+1} A_2^t) \cup (\bigcup_{t=2}^{2n} A_1^t \cup \{x\}\} \quad (\text{für } i = 1),$$

oder

$$\{(A_1 - \bigcup_{t=1}^{2n+1} A_1^t) \cup (\bigcup_{t=2}^{2n} A_2^t \cup \{x\}),\ (A_2 - \bigcup_{t=2}^{2n} A_2^t) \cup (\bigcup_{t=1}^{2n+1} A_1^t)\} \quad (\text{für } i = 2).$$

Folglich ist $A_{ip-1} \nsubseteq A_i^{p-1}$, d. h. $A_i^{p+1} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$.
Da $A_i^p \rho A_j^l$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2;\ l = 1, 2, \ldots, p-2, p)$ (wegen Beziehungen $(p-1)$) gilt, ergibt sich $A_{ip-1} \cap A_i^l = \emptyset$ $(i = 1, 2;\ l = 1, 2, \ldots, p-2, p)$. Daraus und aus Definition von A_i^{p+1} folgt

$$
((p-1)') \qquad \begin{aligned}
& A_i^{p+1} \rho A_j^l \quad (i, j = 1, 2;\ l = 1, 2, \ldots, p \text{ und } l \neq p \text{ falls } i \neq j),\\
& A_i^{p+1} \rho x \quad (i = 1, 2)\\
& A_i^{p+1} \rho^* A_j^p \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2).
\end{aligned}
$$

Tritt die Behauptung (A) für keine Zahl $m \geqslant 2$ ein, so gibt es notwendigerweise eine derartige endliche Zahl q, daß mindestens eine der Beziehungen $A_i = \bigcup_{t=0}^{q} A_i^t$ $(i = 1, 2)$ gilt (da A_i $(i = 1, 2)$ endliche Mengen sind). Daraus ergibt sich $A_{iq-1} \subseteq A_i^{q-1}$, und das hat die widersprüchliche Folge, daß $\nu(G) = 2$ ist. Die Aussage (A) ist damit bewiesen.

Es sei $m = p + 1$ $(p \geqslant 1)$ die erste Zahl, für die (A) eintritt. Man kann leicht die Existenz eines regulären Teilgraphen vom Grade $2p$ und mit $2p + 3$ Knotenpunkten im Graphen G beweisen, indem man die Beziehungen $(p-1)$ und $((p-1)')$ benutzt. Das Komplement eines solchen Teilgraphen ist, wie man leicht sieht, ein Loch in $\bar{G}$ der Länge $2p + 3$. Der Kürze halber zeigen wir das nur für den Fall $p = 2$. Wir nehmen also an, daß (1) und (1′) gelten, und es gibt zwei Knotenpunkte $x_1^3 \in A_1^3$ und $x_2^3 \in A_2^3$ mit $x_1^3 \bar{\rho} x_2^3$. Es gibt gemäß letzter Beziehung aus (1′) zwei Knotenpunkte $x_1^2 \in A_1^2$ und $x_2^2 \in A_2^2$, so daß $x_i^3 \bar{\rho} x_j^2$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2)$ gilt; in A_i^1 gibt es wegen vorletzter Beziehung aus (1) zwei derartige Knotenpunkte x_i^1 $(i = 1, 2)$, daß $x_j^2 \bar{\rho} x_i^1$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2)$ gilt. Außerdem gelten:

$$
\begin{aligned}
& x_i^2 \rho x_i^1 \quad (i = 1, 2);\quad x_1^l \rho x_2^l \quad (l = 1, 2);\quad x_i^k \rho x \quad (i = 1, 2;\quad k = 2, 3);\\
& x_i^3 \rho x_i^k \quad (i, k = 1, 2);\quad x_i^3 \rho x_j^1 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2) \text{ und } x_i^1 \bar{\rho} x \quad (i = 1, 2).
\end{aligned}
$$

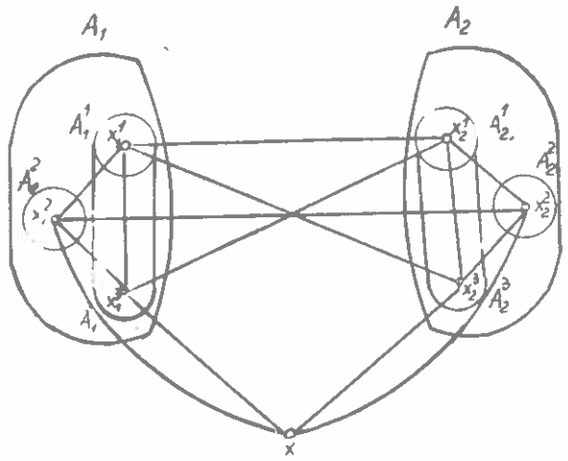

Abb. 1 (in G)

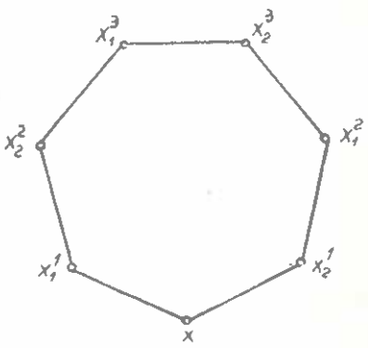

Abb. 1 (in $\bar{G}$)

Der von der Knotenpunktmenge $\{a, a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, a_1^3, a_2^3\}$ in $\overline{G}$ aufgespannte Teilgraph ist das gesuchte Loch (Abb. 1 und 1).

Der Satz 2 ist damit bewiesen.

LITERATUR

1. Gallai T. — *Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken*. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 7 (1962), p. 3—36.
2. Olaru E. — *Beiträge zur Theorie der perfekten Graphen*. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik (EIK) 8 (1972), H 2/3, p. 147—172.

ASUPRA GRAFURILOR PERFECTE ȘI CRITIC IMPERFECTE

Rezumat

Într-o lucrare publicată anterior [2] autorul introduce noțiunea de graf critic α-imperfect, noțiune ce s-a dovedit a fi foarte utilă în studiul grafurilor perfecte. Studiul proprietăților grafurilor critic α-imperfecte a permis demonstrarea în mod unitar și mai simplu a multor teoreme cunoscute și în același timp obținerea unor noi rezultate interesante relative la grafurile perfecte. Astfel, cunoscuta ipoteză a lui Berge și Gilmore asupra grafurilor perfecte este echivalentă cu următoarea: un graf G este atunci și numai atunci critic α-imperfect, dacă G sau complementul său $\overline{G}$ sînt cicluri elementare L_{2k+1} de lungime $2k+1$ ($k \geqslant 2$). Lucrarea de față este strîns legată de cea menționată, demonstrîndu-se alte proprietăți ale grafurilor critic α-imperfecte. O proprietate a anumitor mulțimi de articulație ale unui graf critic α-imperfect, demonstrată în lucrare (teorema 1), are, printre consecințele sale, afirmații cu ajutorul cărora se pot demonstra ușor două teoreme cunoscute (teorema lui Hajnal-Surányi și teorema lui Dilworth) asupra grafurilor α-perfecte.

Lucrarea se încheie cu o metodă de demonstrare a ipotezei Berge-Gilmore pentru grafuri cu numărul de stabilitate doi, metodă care probabil poate fi generalizată pentru grafuri cu orice număr de stabilitate.

ON LINEAR SEQUENTIAL MACHINES WITH VARIABLE STRUCTURE

BY

V. FELEA

Let M be a linear sequential machine with variable structure, with l inputs and m outputs. We denote by $X(t)$, $Y(t)$ the input and output vectors, respectively, at the time t.

For a natural number h, we consider M_1 a linear sequential machine with variable structure, with lh inputs and mh outputs, such that if denote by $X_1(t)$, $Y_1(t)$ the input and output vectors, respectively, at the time t, then we have

$$X_1(r) = \begin{bmatrix} X(rh) \\ X(rh+1) \\ \vdots \\ X(rh+h-1) \end{bmatrix}, \quad Y_1(r) = \begin{bmatrix} Y(rh) \\ Y(rh+1). \\ \vdots \\ Y(rh+h-1) \end{bmatrix}.$$

If the structure of M is known, then the characterizing matrices of M_1 can be constructed.

One obtains in a particular case the series-to-parallel transformations of linear sequential circuits studied by Gill [1].

Definition. *A sequential machine with variable structure is* $M = (S, X, Y, f)$, *where*:

1. *S is a nonempty set of states*;
2. *X is a nonempty set of input symbols*;
3. *Y is a nonempty set of output symbols*;
4. $f : N \to S^{S\times X} \times Y^{S\times X}$.

Thus $f(t) = (\delta_t, \lambda_t)$ with $\delta_t : S\times X \to S$ and $\lambda_t : S\times X \to Y$ for $t = 0, 1, 2, \ldots$. δ_t are called *transition* functions and λ_t *output* functions. Let F be a field and k a non-negative integer. Then F_k denotes the vector