CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES GROUPES BITOPOLOGIQUES

PAR

T. BÎRSAN

La notion d'espace bitopologique a été introduite en 1963 par J. C. Kelly [13] : un espace bitopologique est un ensemble X muni de deux topologies τ_1 et τ_2. Des propriétés de ces espaces se sont occupés J. C. Kelly [13], P. Fletcher [6], E. P. Lane [15], W. J. Pervin [17] et autres.

Dans cette Note nous définissons les notions de groupe bitopologique et semibitopologique après avoir entrepris une étude générale de ces espaces. Les résultats obtenus sont analogues aux résultats des groupes topologiques et les généralisent.

§1. La notion de groupe bitopologique. Propriétés élémentaires et examples. Les notions de groupe semibitopologique et de groupe bitopologique, introduites, sont les correspondantes bitopologiques de celles du groupe semitopologique [10] et du groupe topologique, respectivement.

Dans ce qui suit on désigne par G un groupe arbitraire et par e son élément neutre. De même, on emploie la notation multiplicative pour la loi de composition définie sur le groupe.

Définition 1. *On appelle groupe semibitopologique un groupe G muni de deux topologies τ_1 et τ_2, vérifiant les conditions suivantes :*

I. *pour tout $a \in G$, $x \to ax$ $x \in G$ est une application continue de (G, τ_1) dans (G, τ_1) ;*

I'. *pour tout $a \in G$, $x \to xa$ est une application continue de (G, τ_2) dans (G, τ_2) ;*

II. *l'application $x \to x^{-1}$ est un homéomorphisme de (G, τ_1) sur (G, τ_2).*

On peut caractériser les groupes semitopologiques dans le language des voisinages de la manière suivante :

Proposition 1. *Soient (G, τ_1, τ_2) un groupe semibitopologique et $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) un système fondamental de voisinages ouverts de e par rapport à τ_1 (resp. τ_2). Alors, on a :*

1) $e \in U_i$ pour tout $U_i \in \mathcal{B}_i (i = 1, 2)$:

2) pour tout voisinage $U_i \in \mathcal{B}_i (i = 1, 2)$ et pour tout $x \in U_i$, il existe $V_i \in \mathcal{B}_i$, de sorte que $xV_1 \subset U_1$ (dans le cas $i = 1$) et $V_2 x \subset U_2$ (dans le cas $i = 2$) ;

3) pour tout $U_i \in \mathcal{B}_i$ il y a $U_j \in \mathcal{B}_j$ de sorte que $U_i^{-1} \supset U_j$, où $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Réciproquement, étant données deux bases de filtre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sur un groupe G qui satisfont aux conditions 1), 2) et 3), il y a deux topologies τ_1 et τ_2 sur G de sorte que (G, τ_1, τ_2) est un groupe semibitopologique et $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) est un système fondamental de voisinages ouverts de e par rapport à τ_1 (resp. τ_2). De plus, pour tout $a \in G$ $a\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2 a$) est un système de voisinages ouverts de a par rapport à τ_1 (resp. τ_2) et donc les topologies τ_1 et τ_2 sont uniques.

La proposition est une conséquence des deux lemmes qui suivent.

Lemme 1. *Soient τ une topologie sur un groupe G de sorte que l'application $x \to ax$ soit continue pour tout $a \in G$ et $\mathcal{B}$ un système fondamental de voisinages ouverts de e. Alors :*

1) $e \in U$ pour tout $U \in \mathcal{B}$;

2) pour tout voisinage $U \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in U$, il existe $V \in \mathcal{B}$, de sorte que $xV \subset U$.

Réciproquement, étant donnée une base de filtre $\mathcal{B}$ sur un groupe G qui satisfait aux conditions 1) et 2), il y a une topologie unique τ sur G, de sorte que l'application $x \to ax$ soit continue et $\mathcal{B}$ est un système fondamental de voisinages ouverts de e et, enfin, pour tout point $a \in G$, $a\mathcal{B}$ est un système fondamental de voisinages ouverts de a.

Cet énoncé est une simple modification du théorème 2 [11, p. 29].

On démontre facilement le

Lemme 2. *Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur le groupe G, de sorte que $x \to ax$ soit une application continue de (G, τ_1) dans (G, τ_1) et $x \to xa$ soit une application continue de (G, τ_2) dans (G, τ_2). Soient $\mathcal{B}_i (i = 1, 2)$ une base de filtre $\mathcal{V}_i(e)$ de voisinages de e relatifs à τ_i. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1° l'application $x \to x^{-1}$ est un homéomorphisme de (G, τ_1) sur (G, τ_2) ;

2° $(\mathcal{V}_1(e))^{-1} = \mathcal{V}_2(e)$;

3° pour tout $U_i \in \mathcal{B}_i$, il y a $U_j \in B_j$, de sorte que $U_i^{-1} \supset U_j$ où $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Voici un exemple de groupe semibitopologique :

Exemple 1. Soit le groupe symétrique S_3 ; on note ses éléments par :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soient, compte tenu des notations de la proposition 1, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \{\{s_1, s_4\}\}$. Les conditions 1), 2), 3) de cette proposition sont vérifiées, car $e = s_1$ et $(\mathcal{B}_1)^{-1} = \mathcal{B}_2$. On peut constater que les topologies τ_1 et τ_2 ne coïncident pas, bien que l'élément neutre a le même filtre de voisinages, par rapport à ces topologies ; en effet, $s_2\mathcal{B}_1 = \{\{s_2, s_6\}\}$ et $\mathcal{B}_2 s_2 = \{\{s_2, s_5\}\}$.

L'exemple précédent suggère la nécessité de préciser, dans l'hypothèse $\mathcal{V}_1(e) = \mathcal{V}_2(e)$, les conditions dans lesquelles on a $\tau_1 = \tau_2$. C'est le but de la proposition suivante qu'on trouve dans [4], ch. III, § 1, exercices 2 et 3.

Proposition 2. *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de filtre équivalentes sur G satisfaisant aux conditions 1) et 2) de la proposition 1. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1° $\tau_1 = \tau_2$ (τ_1, τ_2 existent en vertu du lemme 1) ;

2° pour tout $a \in G$ et $V \in V(e)$ on a $aVa^{-1} \in V(e)$;

3° pour tout $a \in G$ $x \to xa$ est une application continue de (G, τ_1) dans (G, τ_1) ;

4° pour tout $a \in G$ $x \to ax$ est une application continue de (G, τ_2) dans $G, \tau_2)$.

Définition 2. *On appelle groupe bitopologique un groupe G muni de deux topologies τ_1 et τ_2, vérifiant les conditions suivantes :*

I. $(x, y) \to xy$ est un application continue de $(G \times G, \tau_1 \times \tau_1, \tau_2 \times \tau_2)$ dans (G, τ_1, τ_2) ;

II. $x \to x^{-1}$ est un homéomorphisme de (G, τ_1) sur (G, τ_2).

Remarques. 1) Dans un groupe bitopologique les applications $x \to ax$ et $x \to xa$ sont des homéomorphismes de (G, τ_i) $(i = 1, 2)$ et on a, pour tout point $a \in G$, $a\mathcal{V}_1(e) = \mathcal{V}_1(e)a$ et $a\mathcal{V}_2(e) = \mathcal{V}_2(e)a$.

2) Évidemment, un groupe bitopologique est également un groupe semibitopologique. Réciproquement, si (G, τ_1, τ_2) est un groupe semibitopologique et $(x, y) \to xy$ est une application continue de $(G \times G, \tau_1 \times \tau_1)$ dans (G, τ_1) (ou de $(G \times G, \tau_2 \times \tau_2)$ dans (G, τ_2)), alors, en vertu du fait que $x \to x^{-1}$ est un homéomorphisme de (G, τ_1) sur (G, τ_2), (G, τ_1, τ_2) est un groupe bitopologique.

3) Les filtres $\mathcal{V}_1(e)$ et $\mathcal{V}_2(e)$ de voisinages de e ont les propriétés suivantes :

1° $e \in U_i$ pour tout $U_i \in \mathcal{V}_i(e)$ $(i = 1, 2)$;

2° pour $U_i \in \mathcal{V}_i(e)$, il existe $V_i \in \mathcal{V}_i(e)$ de sorte que $V_iV_i \subset U_i (i = 1, 2)$;

3° pour tout $a \in G$ et $U_i \in \mathcal{V}_i(e)$ on a $aU_ia^{-1} \in \mathcal{V}_i(e)$ $(i = 1, 2)$;

4° $[\mathcal{V}_1(e)]^{-1} = \mathcal{V}_2(e)$.

Ces quatre propriétés sont caractéristiques. Nous enettons l'énoncé complet de ce résultat habituel.

4) Compte tenu de la proposition 2 et des remarques précédentes, on voit que dans un groupe bitopologique $\tau_1 = \tau_2$ si et seulement si $\mathcal{V}_1(e) = \mathcal{V}_2(e)$.

5) Si (G, τ_1, τ_2) est groupe bitopologique, alors (G, τ_1) et (G, τ_2) sont des groupes semitopologiques [10].

Voici quelques exemples de groupes bitopologiques :

Exemple 2. $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$, c'est-à-dire le groupe additif R muni de la topologie inférieure $\mathcal{J} = \{\emptyset\} \cup \{(x, +\infty) : x \in R\}$ et la topologie supérieure $\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \{(-\infty, x) : x \in R\}$.

Exemple 3. (R, τ_-, τ_+), c'est-à-dire le groupe additif R muni de la topologie τ_- qui a comme base la famille $\{(x - \varepsilon, x] : \varepsilon > 0\}$ et la topologie τ_+ qui a comme base la famille $\{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

On définit [3] *l'adhérence bitopologique* d'une partie A d'un espace bitopologique (X, τ_1, τ_2) comme l'ensemble $\overline{A}^{\tau_1\tau_2} = \overline{A}^{\tau_1} \cap \overline{A}^{\tau_2}$. L'ensemble A est *fermé* (bitopologiquement) si $A = \overline{A}^{\tau_1\tau_2}$. On peut introduire la notion d'ensemble ouvert (bitopologiquement) comme une partie A de sorte que $A = \mathrm{Int}_{\tau_1\tau_2} A = \mathrm{Int}_{\tau_1} A \cup \mathrm{Int}_{\tau_2} A$.

Remarques. 1) Dans un groupe semibitopologique (G, τ_1, τ_2) on a :

a) $(\overline{A}^{\tau_2})^{-1} = \overline{(A^{-1})}^{\tau_1}$, car l'application $x \to x^{-1}$ est un homéomorphisme de (G, τ_1) sur (G, τ_2) ;

b) $(\overline{A}^{\tau_1\tau_2})^{-1} = \overline{(A^{-1})}^{\tau_1\tau_2}$.

2) Dans un groupe bitopologique, si A est fermé (bitopologiquement), alors xA, Ax ont la même propriété ; car, par exemple :

$$xA = x(\overline{A}^{\tau_1} \cap \overline{A}^{\tau_2}) = (x\overline{A}^{\tau_1}) \cap (x\overline{A}^{\tau_2}) = \overline{xA}^{\tau_1} \cap \overline{xA}^{\tau_2},$$

c'est-à-dire xA est fermé (bitopologiquement). Un résultat similaire est valable pour un ensemble ouvert (bitopologiquement).

D'une manière habituelle (par exemple [11, p. 46]) on peut démontrer la

Proposition 3. *Dans un groupe semibitopologique on a :*

$$\overline{A}^{\tau_1} = \bigcap_{V_2 \in \mathcal{V}_2(e)} AV_2, \qquad \overline{A}^{\tau_2} = \bigcap_{V_1 \in \mathcal{V}_1(e)} V_1 A, \qquad \overline{A}^{\tau_1\tau_2} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_1(e)} (VA \cap AV^{-1}).$$

§ 2. Séparation dans les groupes bitopologiques. Proposition 4. *Tout groupe bitopologique est réciproquement régulier.*

Démonstration. Il revient à démontrer que pour tout point $x \in G$ il y a un système fondamental de τ_1-voisinages qui sont τ_2-fermés et un système fondamental de τ_2-voisinages qui sont τ_1-fermés. Il suffit à ce but de considérer seulement le point $e \in G$. Soient $U_1 \in \mathcal{V}_1(e)$ et $V_1 \in \mathcal{V}_1(e)$ de sorte que $V_1V_1 \subset U_1$. En vertu de la proposition 3, il résulte que $\overline{V}^{\tau_2} \subset U_1$. De même, pour tout $U_2 \in \mathcal{V}_2(e)$ il y a $V_2 \in \mathcal{V}_2(e)$ de sorte que $\overline{V}_2^{\tau_1} \subset U_2$.

Par conséquent un groupe bitopologique est un réciproquement R_2-espace [5] et donc, en particulier, il est un réciproquement R_0-espace [5], [16]. Mais, en général, un groupe semibitopologique n'est pas réciproquement R_0-espace, comme c'est le cas de l'espace considéré dans l'exemple 1.

Précisons maintenant les notions qui interviennent dans les propositions qui suivent.

On dit qu'un espace bitopologique (X, τ_1, τ_2) est un

– *réciproquement T_0-espace*, si pour toute paire de points $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe un τ_1-voisinage ou un τ_2-voisinage de l'un de ces points qui ne contient pas l'autre point [16] ;

– *réciproquement T_1-espace*, si pour toute paire de points $x, y \in X$ $x \neq y$, il existe un τ_1-voisinage ou un τ_2-voisinage de x qui ne contient pas y [16] ;

– *réciproquement T_2-espace*, si pour toute paire de points $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe un τ_1-voisinage de x et un τ_2-voisinage de y ou un τ_2-voisinage de x et un τ_1-voisinage de y sans point commun [14, définition 1–3], [3].

Si on remplace dans ces définitions le mot „ou" par „et" on obtient les trois définitions nouvelles : On dit qu'un espace bitopologique (X, τ_1, τ_2) est un

– *réciproquement T_0^*-espace*, si pour toute paire de points $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe un τ_i-voisinage $(i = 1, 2)$ de l'un de ces points qui ne contient pas l'autre point ;

– *réciproquement T_1^*-espace*, si pour toute paire de points $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe un τ_i-voisinage de $x (i = 1, 2)$ qui ne contient pas (ou (G, τ_i) est un T_1-espace, $i = 1, 2$) ;

– *réciproquement T_2^*-espace (réciproquement Hausdorff)*, si pour toute paire de points $x, y \in X$, $x \neq y$, il y a un τ_i-voisinage de $x (i = 1, 2)$ et un τ_j-voisinage de $y (j = 1, 2, i \neq j)$ sans point commun [13].

Proposition 5. *Si (G, τ_1, τ_2) est un groupe bitopologique, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1°. *G est réciproquement T_0-espace ;*

2°. *G est réciproquement T_1-espace ;*

3°. *G est réciproquement T_2-espace.*

Démonstration. Comme on a $3° \Rightarrow 2° \Rightarrow 1°$, il suffit de démontrer que $1° \Rightarrow 3°$. Soient $x, y \in G$, $x \neq y$. En tenant compte de la hypothèse, il existe, par exemple, $V_1 \in \mathcal{V}_1(e)$ de sorte que, par exemple, $x \in xV_1$ et $y \notin xV_1$. Soit $U_1 \in \mathcal{V}_1(e)$ de sorte que $U_1U_1 \subset V_1$. Alors $x \in xU_1$, $y \in yU_1^{-1}$ et $xU_1 \cap yU_1^{-1} = \emptyset$. En effet, si, par absurde, il y a $z = xv_1 = yw_1^{-1}$, où $v_1, w_1 \in U_1$, il résulte que $y = zw_1 = xv_1w_1 \in xU_1U_1 \subset xV_1$. Mais cela est impossible, car $y \notin xV_1$.

Proposition 6. *Si (G, τ_1, τ_2) est un groupe bitopologique, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *G est réciproquement T_2-espace ;*

2° $\{e\} = \bigcap \{V_1 \cap V_2 ;\ V_1 \in \mathcal{V}_1(e),\ V_2 \in \mathcal{V}_2(e)\}$;

3° $\{e\} = \overline{\{e\}}^{\tau_1} \cap \overline{\{e\}}^{\tau_2}$, *c'est-à-dire $\{e\}$ est fermé (bitopologiquement).*

Démonstration. 1° $\Rightarrow$ 2°. Soit $x \notin G$, $x \neq e$. Il existe $V_1 \in \mathcal{V}_1(e)$ de sorte que $x \notin V_1$ ou il existe $V_2 \in \mathcal{V}_2(e)$, de sorte que $x \notin V_2$. Dans les deux situations on a $x \notin V_1 \cap V_2$, donc $x \notin \bigcap \{ V_1 \cap V_2 : V_1 \in \mathcal{V}_1(e), V_2 \in \mathcal{V}_2(e)\}$.

2° $\Rightarrow$ 3°. Soit $x \in G$, $x \notin e$. Alors $x^{-1} \neq e$, et en vertu de l'hypothèse, $x^{-1} \notin \bigcap (V_1 \cap V_2)$. Il y a, par conséquent, $V_1 \in \mathcal{V}_1(e)$ et $V_2 \in \mathcal{V}_2(e)$ de sorte que $x^{-1} \notin V_1$ ou $x^{-1} \notin V_2$. Il suit que $e \notin xV_1$ ou $e \notin V_2x$. Donc $x \notin \overline{\{e\}}^{\tau_1}$ ou $x \notin \overline{\{e\}}^{\tau_2}$, c'est-à-dire $x \notin \overline{\{e\}}^{\tau_1} \cap \overline{\{e\}}^{\tau_2}$. Il résulte que $\{e\} = \overline{\{e\}}^{\tau_1\tau_2}$.

3° $\Rightarrow$ 1°. Soit, en premier lieu, $x \in G$, $x \neq e$. Alors $x \notin \overline{\{e\}}^{\tau_1} \cap \overline{\{e\}}^{\tau_2}$ donc $x \in G - \overline{\{e\}}^{\tau_1}$ ou $x \in G - \overline{\{e\}}^{\tau_2}$. C'est-à-dire $x \in \mathrm{Int}_{\tau_1}(G - \{e\})$ ou $x \in \mathrm{Int}_{\tau_2}(G - \{e\})$. Il en résulte qu'il existe $V_1 \in \mathcal{V}_1(x)$ de sorte que $V_1 \subset G - \{e\}$ ou $V_2 \in \mathcal{V}_2(x)$ de sorte que $V_2 \subset G - \{e\}$. Donc $e \notin V_1 \in \mathcal{V}_1(x)$ ou $e \notin V_2 \in \mathcal{V}_2(x)$.

Soient maintenant $x, y \in G$, $x \neq y$. Alors $xy^{-1} \neq e$ et, en vertu de la première partie, il existe $V_1 \in \mathcal{V}_1(xy^{-1})$ de sorte que $e \notin V_1$ ou $V_2 \in \mathcal{V}_2(xy^{-1})$ de sorte que $e \notin V_2$. Il résulte immédiatement que $x \in V_1y \in \mathcal{V}_1(x)$ et $y \notin V_1y$ ou $x \in V_2y \in \mathcal{V}_2(x)$ et $y \notin V_2y$. Donc le groupe bitopologique G est réciproquement T_2-espace.

En suivant pas à pas les démonstrations des propositions 5 et 6 et remplaçant partout „ou" par „et" on obtient les propositions 7 et 8 respectivement.

Proposition 7. *Si (G, τ_1, τ_2) est un groupe bitopologique, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *G est réciproquement T_0^*-espace ;*

2° *G est réciproquement T_1^*-espace ;*

3° *G est réciproquement T_2^*-espace.*

Proposition 8. *Si (G, τ_1, τ_2) est un groupe bitopologique, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *G est réciproquement T_2^*-espace :*

2° $\{e\} = \bigcap \{ V_1 : V_1 \in \mathcal{V}_1(e)\} = \bigcap \{ V_2 : V_2 \in \mathcal{V}_2(e) \}$;

3° $\{e\} = \overline{\{e\}}^{\tau_1} = \overline{\{e\}}^{\tau_2}$.

Remarques. 1) En tenant compte de la proposition 4 et des propositions précédentes on a : le groupe bitopologique (G, τ_1, τ_2) est réciproquement T_2-espace (réciproquement T_2^*-espace) si et seulement si $\{e\} = \bigcap (\overline{V_1}^{\tau_2} \cap \overline{V_2}^{\tau_1})$ (respectivement, $\{e\} = \bigcap \overline{V_1}^{\tau_2} = \bigcap \overline{V_2}^{\tau_1}$).

2) Le groupe bitopologique $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$ est réciproquement T_2-espace, mais non réciproquement T_2^*-espace.

§ 3. **Sous-groupes d'un groupe bitopologique.** Soient (G, τ_1, τ_2) un groupe bitopologique et H un sous-groupe arbitraire de G. On peut voir facilement que $(H, \tau_1 \cap H, \tau_2 \cap H)$, où $\tau_i \cap H$ $(i = 1, 2)$ est la trace sur H de la topologie τ_i, est de même un groupe bitopologique. Il s'appelle *sous-groupe bitopologique* ou *sous-groupe* du groupe bitopologique donné.

Proposition 9. a) *Si H est un sous-groupe de (G, τ_1, τ_2), alors son adhérence bitopologique $\overline{H}^{\tau_1\tau_2}$ est également un sous-groupe.*

b) *si en outre H est sous-groupe normal, alors $\overline{H}^{\tau_1\tau_2}$ est sous-groupe normal.*

Démonstration. a) Soient $a, b \in \overline{H}^{\tau_1\tau_2}$. Alors $a, b \in \overline{H}^{\tau_1}$ et $a, b \in \overline{H}^{\tau_2}$. Donc $(a, b) \in \overline{H}^{\tau_i} \times \overline{H}^{\tau_i} = \overline{H \times H}^{\tau_i} (i = 1, 2)$ et par conséquent $ab \in \overline{H}^{\tau_i}$ $(i = 1, 2)$. Il résulte que $ab \in \overline{H}^{\tau_1\tau_2}$.

Soit $a \in \overline{H}^{\tau_1\tau_2}$. Alors $a \in \overline{H}^{\tau_i} (i = 1, 2)$ et par conséquent $a^{-1} \in \overline{H}^{\tau_i}$ $(i = 1, 2)$ (en effet, si $a \in \overline{H}^{\tau_1}$ alors $a^{-1} \in (\overline{H}^{\tau_1})^{-1} = (\overline{H^{-1}})^{\tau_2} = \overline{H})^{\tau_2}$. Il résulte que $a^{-1} \in \overline{H}^{\tau_1\tau_2}$.

b) On démontre que pour tout $x \in G$ on $ax\overline{H}^{\tau_1\tau_2}x^{-1} \subset \overline{H}^{\tau_1\tau_2}$. D'abord on remarque que l'application $y \to xyx^{-1}$ est continue par rapport à $\tau_i (i = 1, 2)$. Alors $x\overline{H}^{\tau_i}x^{-1} \subset \overline{xHx^{-1}}^{\tau_i} = \overline{H}^{\tau_i} (i = 1, 2)$. Donc $x\overline{H}^{\tau_1\tau_2}x^{-1} \subset x\overline{H}^{\tau_i}x^{-1} \subset \overline{H}^{\tau_i} (i = 1, 2)$. Il résulte que $x\overline{H}^{\tau_1\tau_2}x^{-1} \subset \overline{H}^{\tau_1\tau_2}$.

Remarque. Il est clair que $\overline{H}^{\tau_1}$ et $\overline{H}^{\tau_2}$ ne sont pas, en général, des groupes. Par exemple, si on prend le sous-groupe $H = \{e\}$ du groupe bitopologique $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$, on a $\overline{H}^{\mathcal{J}} = (-\infty, 0]$ et $\overline{H}^{\mathcal{S}} = [0, +\infty)$.

Proposition 10. *L'adhérence bitopologique de $\{e\}$ est un sous-groupe normal fermé (bitopologiquement), τ_i-compact $(i = 1, 2)$ et réciproquement compact* [2].

Démonstration. Soit $H = \overline{\{e\}}^{\tau_1\tau_2}$. En vertu de la proposition précédente H est un sous-groupe normal. Il est évident que H est fermé (bitopologiquement). Maintenant, démonstrons seulement le fait que H est τ_1-compact. Si $\mathcal{R}$ est un recouvrement de H τ_1-ouvert, alors il y a $D \in \mathcal{R}$, de sorte que $e \in D$. Il suit que $e \in D \cap D^{-1}$. Mais, en tenant compte de la proposition 3, $H = \bigcap \{ V \cap V^{-1} ; V \in V_1(e) \}$. Donc $H \subset D \cap D^{-1}$ et, en particulier, $H \subset D$. C'est-à-dire $\{D\}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{R}$.

On peut formuler la proposition 4 [4, ch. III, § 2] et la proposition 7 [11, p. 54] sous une forme plus générale.

Lemme 1. *Soient un groupe G et une topologie sur G de sorte que l'application $x \to ax$ soit continue pour tout $a \in G$. Si H est un sous-groupe de G ayant un point intérieur, alors H est un sous-groupe ouvert et par conséquent fermé.*

Proposition 11. *Soient (G, τ_1, τ_2) un groupe semibitopologique et H un sous-groupe de G. Alors :*

a) *H est τ_i-ouvert $(i = 1, 2)$ si et seulement si $\mathrm{Int}_{\tau_i} H \neq \emptyset$. Dans ce cas H est également τ_i-fermé ;*

b) *H est ouvert (bitopologiquement) si et seulement si H est τ_1-ouvert ou τ_2-ouvert.*

ment) de (G, τ_1, τ_2) sur $(G/H, \dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$. En supposant que (G, τ_1, τ_2) est groupe semibitopologique, il résulte que l'application φ est ouverte (bitopologiquement), car, si $D \in \tau_i (i = 1, 2)$, alors $DH = HD \in \tau_i$ et par suite $\dot{D} = \varphi(D) \in \dot{\tau}_i$. De même, si $\mathcal{B}_i (i = 1, 2)$ est un système fondamental de voisinages de e par rapport à τ_i, alors $\varphi(\mathcal{B}_i)$ est un système fondamental de voisinages de $\dot{e}$ par rapport à $\dot{\tau}_i$.

En utilisant ces considérations standard on peut voir aisément que, si (G, τ_1, τ_2) est un groupe bitopologique (semibitopologique), alors $(G/H, \dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$ est aussi un groupe bitopologique (semibitopologique). On dit que $(G/H, \dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$ est le groupe quotient de (G, τ_1, τ_2) par rapport à H.

Proposition 13. *Dans un groupe bitopologique (G, τ_1, τ_2), le groupe quotient est réciproquement T_2-espace si et seulement si H est un sous-groupe normal fermé (bitopologiquement).*

Démonstration. Si G/H est réciproquement T_2-espace, alors, en vertu des proposition 5 et 6, l'ensemble $\{\dot{e}\}$ est fermé (bitopologiquement). Comme l'application φ est continue (bitopologiquement), il résulte que $H = \varphi^{-1}(\{\dot{e}\})$ est fermé (bitopologiquement).

D'ailleurs, si H est fermé (bitopologiquement), alors $G - H$ est ouvert (bitopologiquement), d'où, parce que φ est ouvert (bitopologiquement), $G/H - \{\dot{e}\} = \varphi(G - H)$ est ouvert (bitopologiquement, donc $\{\dot{e}\}$ est fermé (bitopologiquement) et par suite G/H est réciproquement T_2-espace.

Proposition 14. *Dans un groupe bitopologique (G, τ_1, τ_2) le groupe quotient G/H est groupe topologique discret si et seulement si H est un sous-groupe normal ouvert (bitopologiquement).*

Démonstration. Si G/H est groupe topologique discret, alors $\dot{\tau}_1 = \dot{\tau}_2 = \mathcal{P}(G/H)$, d'où $\{\dot{e}\}$ est ouvert. Parce que φ est une application continue (bitopologiquement), il résulte que $H = \varphi^{1-}(\{\dot{e}\})$ est ouvert (bitopologiquement).

Si H est ouvert (bitopologiquement), alors $\{\dot{e}\}$ est aussi ouvert (bitopologiquement), parce que l'application φ est ouverte (bitopologiquement). Comme $\{\dot{e}\} = \mathrm{Int}_{\dot{\tau}_1} \{\dot{e}\} \cup \mathrm{Int}_{\dot{\tau}_2} \{\dot{e}\}$, il résulte qu'au moins l'un de $\mathrm{Int}_{\dot{\tau}_1} \{\dot{e}\}$ et $\mathrm{Int}_{\dot{\tau}_2} \{\dot{e}\}$ est non vide, par exemple le premier. Mais alors $\{\dot{e}\} = \mathrm{Int}_{\dot{\tau}_1} \{\dot{e}\}$, $\{\dot{e}\}$ est $\dot{\tau}_1$-ouvert et par suite $\{\dot{e}\}$ est également $\dot{\tau}_2$-ouvert. C'est-à-dire $\dot{\tau}_1 = \dot{\tau}_2 = \mathcal{P}(G/H)$, ce qui démontre notre assertion.

Le lemme et la proposition qui suivent se démontrent de la même manière comme leurs correspondants des groupes topologiques [9].

Lemme 2. *Soit (G, τ_1, τ_2) un groupe bitopologique. Si A est τ_1-fermé et B τ_2-compact alors AB est τ_1-fermé.*

Proposition 15. *Si H est un sous-groupe normal τ_1-compact et τ_2-compact du groupe bitopologique (G, τ_1, τ_2), alors l'application canonique est fermée.*

Proposition 16. *Si K est la composante connexe (bitopologiquement) de e dans le groupe bitopologique (G, τ_1, τ_2), alors le groupe quotient G/K est réciproquement T_2-espace et totalement discontinu* [1].

Démonstration. En vertu de la proposition 12, K est sous-groupe normal fermé (bitopologiquement) et donc, compte tenu de la proposition 13, il est réciproquement T_2-espace. D'ailleurs, en vertu du théorème 5 [1], G/K est totalement discontinu (bitopologiquement).

Proposition 17. *Soient (G, τ_1, τ_2) un groupe bitopologique et H un sous-groupe de G (il n'est pas nécessaire que H soit normal). Si H et G/H sont connexes (bitopologiquement) alors (G, τ_1, τ_2) est connexe (bitopologiquement).*

Démonstration. Des hypothèses de cette proposition il suit que xH est un ensemble connexe (bitopologiquement) pour tout $x \in G$. Alors (G, τ_1, τ_2) est connexe (bitopologiquement) en vertu du théorème 4 [1].

Comme la proposition 20 [11 ; p. 61], on démontre la

Proposition 18. *Soient H et M deux sous-groupes normaux du groupe bitopologique (G, τ_1, τ_2) tels que $G \subset M$. Alors G/M est homéomorphe (bitopologiquement) à $(G/H)/(M/H)$.*

§ 5. **Structures uniformes des groupes bitopologiques.** Partout dans ce paragraphe, (G, τ_1, τ_2) est considéré groupe bitopologique. On note $V_i^s = \{(x, y) ; x^{-1}y \in V_i\}$ et $V_i^d = \{(x, y) ; yx^{-1} \in V_i\}$ $(i = 1, 2)$; de même, $\mathcal{U}_i^s = \{V_i^s ; V_i \in \mathcal{V}_i(e)\}$ et $\mathcal{U}_i^d = \{V_i^d ; V_i \in \mathcal{V}_i(e)\}$ $(i = 1, 2)$. On démontre facilement que $\mathcal{U}_i^s$ et $\mathcal{U}_i^d (i = 1, 2)$ sont des structures quasi-uniformes sur G. On peut voir que $\mathcal{U}_1^s$ et $\mathcal{U}_2^s$ sont structures quasi-uniformes conjuguées ; on dit que la paire $(\mathcal{U}_1^s, \mathcal{U}_2^s)$ est la *structure réciproquement uniforme gauche* sur G. D'une façon similaire on dit que la paire $(\mathcal{U}_1^d, \mathcal{U}_2^d)$ est la *structure réciproquement uniforme droite* sur G. La paire de topologies (τ_1, τ_2) donnée sur G est compatible avec chacune de ces deux structures. Les applications $x \to ax$ et $x \to xa$ sont des isomorphismes de l'espace $(G, \mathcal{U}_1^s, \mathcal{U}_2^s)$ (ou $G, \mathcal{U}_1^d, \mathcal{U}_2^d)$) sur lui même. Enfin, l'application $x \to x^{-1}$ est un isomorphisme de $(G, \mathcal{U}_1^s, \mathcal{U}_2^s)$ sur $(G, \mathcal{U}_2^d, \mathcal{U}_1^d)$.

La proposition suivante apporte une précision en ce qui concerne les propriétés de séparation des groupes bitopologiques.

Proposition 19. *Tout groupe bitopologique est réciproquement complètement régulier.*

Démonstration. On a vu que tout groupe bitopologique est quai-uniformisable [15] ; ce fait est réalisé par la structure réciproquement uniforme gauche ou droite. Alors, en vertu des théorèmes 1 et 2 [6] ou du théorème 4.2 [15], le groupe bitopologique est réciproquement complétement régulier.

Un espace réciproquement uniforme $(X, \mathcal{U}, \mathcal{U}^{-1})$ est quasi-pseudo-métrisable s'il y a une paire (p, q) de quasi-pseudo-métriques conjuguées, de sorte qu'elle induit sur X la structure réciproquement uniforme $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{-1})$.

Le lemme suivant est connu [7] et se démontre en utilisant le lemme de métrisation de [12].

Lemme 3. *Un espace réciproquement uniforme $(X, \mathcal{U}, \mathcal{U}^{-1})$ est quasi-pseudo-métrisable si $\mathcal{U}$ (et donc $\mathcal{U}^{-1}$) possède une base dénombrable du filtre des entourages.*

Proposition 20. *Pour que $(G, \mathcal{U}_1^s, \mathcal{U}_2^s)$ et $(G, \mathcal{U}_1^d, \mathcal{U}_2^d)$ soient quasi-pseudo-métrisables il faut et il suffit que $\mathcal{V}_1$ (e) donc et $\mathcal{V}_2(e))$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages.*

Démonstration. La condition est évidement *nécessaire*. *Suffisance.* On considère seulement l'espace $(G, \mathcal{U}_1^s, \mathcal{U}_2^s)$. Si $\{V_n\}_{n \in N} \subset \mathcal{V}_1(e)$ est un système fondamental dénombrable de voisinages, alors $\{V_n^s\}_{n \in N}$ est une base dénombrable du filtre des entourages de $\mathcal{U}_1^s$. D'où, en vertu du lemme 3, il résulte que $(G, \mathcal{U}_1^s, \mathcal{U}_1^s)$ est quasi-pseudo-métrisable.

Proposition 21. *Si l'espace $(G, \mathcal{U}_1^s, \mathcal{U}_2^s)$ (resp. $(G, \mathcal{U}_1^d, \mathcal{U}_2^d)$) est quasi-pseudo-métrisable, alors sa structure peut être définie par une paire de quasi-pseudo-métriques conjuguées invariantes à gauche (resp. à droite).*

Démonstration. La proposition sera démontrée, si on prouve que la quasi-uniformité $\mathcal{U}_1^s$ est définie par une quasi-pseudométrique invariante à gauche, parce que la quasi-pseudo-métrique conjuguée est également invariante à gauche et détermine la quasi-uniformité U_2^s.

Avec les notations de la proposition 20, pour tout $n \in N$, V_n^s est un entourage invariant à gauche ; en effet, on a $(ax, ay) \in V_n^s \Leftrightarrow (ax)^{-1}(ay) \in V_n \Leftrightarrow x^{-1}y \in V_n \Leftrightarrow (x, y) \in V_n^s$. En suivant la démonstration du lemme de métrisation [12], on conclut que la quasi-pseudo-métrique qui a été construite alors est invariante à gauche.

Si G est un groupe abélien, les structures réciproquement uniformes, gauche et droite, coïncident ; en outre, si cette unique structure est quasi-pseudo-métrisable, alors elle est définie par une paire de quasi-pseudo-métriques qui sont bilatéralement invariantes.

Les exemples suivants illustrent les propositions précédentes.

Exemple 5. Pour le groupe $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$ une base de sa structure réciproquement uniforme unique $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_s)$ est donné par

$$\{\{(x, y) ; y > x - \varepsilon\} ; \varepsilon > 0\} \text{ et } \{\{(x, y) ; y < x + \varepsilon\} ; \varepsilon > 0\} ;$$

on dit que $\mathcal{U}_i$ est la *quasi-uniformité inférieure* sur R, que $\mathcal{U}_s$ est la *quasi-uniformité supérieure* sur R et que $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_s)$ est la *structure réciproquement uniforme usuelle* sur R. De même, $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_s)$ est déterminée par la paire suivante de quasi-pseudo-métriques conjuguées et invariantes :

$$p(x, y) = \begin{cases} x - y, & x > y \\ 0, & x \leqslant y \end{cases} \quad \text{et } q(x, y) = \begin{cases} y - x, & x < y \\ 0, & x \geqslant y \end{cases} ;$$

on peut considérer au lieu de celles-ci une paire de quasi-pseudo-métriques bornées :

$$u(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & x > y \\ 0, & x \leqslant y \end{cases} \quad \text{et } v(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & x < y \\ 0, & x \geqslant y \end{cases}$$

où $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$.

Exemple 6. La structure du groupe (R, τ_-, τ_+) est déterminée par

$$p(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & x \geqslant y \\ 1, & x < y \end{cases} \quad \text{et} \quad q(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & x \leqslant y \\ 1, & x > y \end{cases}$$

où $d(x, y)$ a la même signification.

Ces quasi-uniformités et quasi-pseudo-métriques apparaissent dans la littérature dans un autre contexte ([13], [15], etc.).

Maintenant, on suppose que G est un groupe additif et abélien. Soit (p, q) la paire de quasi-pseudo-métriques qui définit sur (G, τ_1, τ_2) la structure réciproquement uniforme de celui-ci. On note, pour tout $x \in G$,

$$|x|_1 = p(0, x) \text{ et } |x|_2 = q(0, x),$$

On peut vérifier aisément les propriétés :

a) $x = 0 \Rightarrow |x|_i = 0$;

b) $|x + y|_i \leqslant |x|_i + |y|_i$;

c) $|x|_1 = |-x|_2$,

où $i = 1, 2$.

Proposition 22. *Si les applications $x \to |x|_i$ $(i = 1, 2)$ de (G, τ_1, τ_2) dans R_+ satisfont aux conditions a), b), c) de plus haut alors les fonctions $(x, y) = |y - x|_1$ et $q(x, y) = |y - x|_2$ forment une paire de quasi-pseudo-métriques sur G, qui sont conjuguées et invariantes. Le groupe abélien G muni des topologies définies par p et q estun groupe bitopologique et, en outre, sa structure réciproquement uniforme est identique à celle donnée par la paire (p, q).*

Démonstration. Évidemment, en vertu de a), b), p et q sont des quasi-pseudo-métriques. Elles sont conjuguées, car, en vertu de c), on a $p(x, y) = |y - x|_1 = |x - y|_2 = q(y, x)$. De même, elles sont invariantes, car, par exemple, $p(x + z, y + z) = |(y + z) - (x + z)|_1 = |y - x|_1 = p(x, y)$.

Soient $V_{i\varepsilon} = \{x ; |x|_i < \varepsilon\}$ et $\mathcal{V}_i(0) = \{V_{i\varepsilon} ; \varepsilon > 0\}$ $(i = 1, 2)$. Les conditions 1°–4° de la remarque 3) après la définition 2 sont réalisées et alors G muni des topologies définies par p et q est un groupe bitopologique.

Enfin, la structure réciproquement uniforme de ce groupe bitopologique est identique à celle donnée par p et q, parce que $V^s_{i\varepsilon} = V^d_{i\varepsilon} = \{(x, y) ; -x + y \in V_{i\varepsilon}\} = \{(x, y) ; |y - x|_i < \varepsilon\}$.

En utilisant le théorème 1 [18] on peut donner la

Proposition 23. *La structure réciproquement uniforme gauche $(\mathcal{U}^1_s, \mathcal{U}^s_2)$ du groupe bitopologique (G, τ_1, τ_2) est engendrée par la famille de toutes les paires (p, q) de quasi-pseudo-métriques sur G conjuguées et invariantes à gauche et qui satisfont à l'une des conditions équivalentes :*

1° p : $(G \times G, \mathcal{U}^s_1 \times \mathcal{U}^s_2) \to (R, \mathcal{U}_i)$ *est quasi-uniformement continue* ;

2° p : $(G \times G, \mathcal{U}^s_2 \times \mathcal{U}^s_1) \to (R, \mathcal{U}_s)$ *est quasi-uniformement continue* ;

3° p : $(G \times G, \mathcal{U}^s_1 \times \mathcal{U}^s_2, \mathcal{U}^s_2 \times \mathcal{U}^s_1) \to (R, \mathcal{U}_i, \mathcal{U}_s)$ *est réciproquement uniforme continue (U_i, U_s ont les significations précisées* dans l'exemple 5).

On observe qu'en vertu de la remarque de [18] des conditions analogues à 1°, 2°, 3° reviennent pour la quasi-pseudo-métrique conjuguée q.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bîrsan T. — *Sur les espaces bitopologiques connexes*. An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XIV, 1968, pp. 293–296.
2. „ — *Compacité dans les espaces bitopologiques*. An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XV, 1969, pp. 317–328.
3. „ — *Sur les espaces bitopologiques complètement réguliers*. An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XVI, 1970, pp. 29–34.
4. Bourbaki N. — *Eléments de mathématique*, Livre III, Topologie générale, Hermann, Paris.
5. Davis A. S. — *Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces*. Amer. Math. Monthly 68 (1961), pp. 886–893.
6. Fletcher P. — *Pairwise uniform spaces*. Doctoral Dissertation, Univ. of North Carolina at Chapel Hill, 1966.
7. Fletcher P. — *Note on metrization of quasi-conform spaces*. Colloq. Math., XXIV (1971), pp. 81–82.
8. Fletcher P., Hoyle H. B. III, Patty C. W. — *The comparison of topologies*, Duke Math. Journal, 36 (1969), pp. 325–331.
9. Hewitt E., Ross K. A. — *Abstract harmonic analysis I*, Springer Verlag, Berlin, 1963.
10. Husain T. — *Semitopological groups and linear spaces*, Math. Ann. (1965), 160, pp. 146–160.
11. „ — *Introduction to topological spaces*, Saunders Company, Philadelphia and London, 1966.
12. Kelley J. L. — *General topology*. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.
13. Kelly J. C. — *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc. XIII (1963), pp. 71–89.
14. Kim Y. W. — *Pseudo-quasi-metric spaces*, Proc. Japan Acad., 44 (1968), pp. 1009–1012.
15. Lane E. P. — *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*, Proc. London Math. Soc., XVII (1967), pp. 241–256.
16. Murdeshwar M. G., Naimpally S. A. — *Quasi-uniform topological spaces*, Noordhoff, Groningen, 1966.
17. Pervin W. J. — *Connectedness in bitopological spaces*. Proc. Knoninklijke Nederlandse Acad., 1967, pp. 369–372.
18. Reilly I. L. — *On generating quasi-uniformities*, Math. Ann. 189 (1970), pp. 317–318.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL GRUPURILOR BITOPOLOGICE

Rezumat

Un spațiu bitopologic este un triplet (X, τ_1, τ_2) format dintr-o mulțime și două topologii pe această mulțime. Noțiunea a fost introdusă în 1963 de J. C. Kelly, care, întreprinde un studiu al acestor spații. Diverși autori aduc contribuții la acest studiu.

În Notă se introduc noțiunile de grup semibitopologic și bitopologic și se face un studiu general al lor. Se studiază proprietăți de separație, proprietăți ale subgrupurilor și grupurilor cît, precum și unele proprietăți ale structurilor reciproc uniforme.

INTERIOR SYSTEMS AND INTERIOR OPERATORS

BY

ROBERT T. VESCAN and IOAN TOFAN

1. Let A be an arbitrary set. In [6], ch. 2 P. M. Cohn calls „closure system" a subset of $\mathfrak{P}(A)$ closed under intersections; such systems are also known as „Moore families"; we shall call them *closure systems of the Boolean of a set.*

In [5], M. Ward considers (without any special denomination) a subset of an arbitrary complete lattice L which is in fact a generalized Moore family: it is closed under taking the infimum of its subsets and contains the unit $1_L = \sup L$. This generalization of the previous notion will be called by us *„closure system"*. Similarly, we introduce

Definition 1. *An interior system is a subset I of a complete lattice L, with the property that for every $M \subseteq I$ we have* $\sup M \in I$.

Remarks. The zero element O_L belongs to every interior system $I \subseteq L$, because $\varnothing \subseteq I$ and $\sup \varnothing = \inf L = O_L$.

An in terior system I is a complete lattice with $\sup\limits_I M = \sup\limits_L M$, for $M \subseteq I$, but it is not necessarily a sublattice of L, since in general $\inf\limits_I M \leqslant \inf\limits_L M$ (L is partially ordered by „$\leqslant$").

Next, we introduce the

Definition 2. *Let P („$\leqslant$") be a partially ordered set. By an interior operator on P we mean a map $i : P \to P$ which satisfies the following conditions:*

A. $i(p) \leqslant p, \quad \forall p \in P$;

B. $i \circ i = i$;

C. If $p_1 \leqslant p_2$, then $i(p_1) \leqslant i(p_2)$, where $p_1, p_2 \in P$. So, this operator is somehow the dual of the closure operator (see the definition of a closure operator in [1] or [3]). We note without proof some properties which follow immediately from this definition (as for closure operators, see [3] and [4]):