FONCTIONS F-PRESQUE-PÉRIODIQUES ET F-ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES

PAR

ANCA PRECUPANU

Dans ce travail, nous allons considérer une nouvelle espèce de presque-périodicité, qui, par son caractère général, permet un traitement, d'un nouveau point de vue, plus unitaire, des principaux types connus de presque-périodicité.

De cette manière, nous allons obtenir comme cas particuliers les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr [3], ch. I, au sens de von Neumann [8], les fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach [3], les fonctions presque-périodiques au sens de Stepannoff, Weyl, Besicovitch [4], ch. I les fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques [1] etc.

Pour ces fonctions à caractère général, appelées par nous *fonctions F-presque-périodiques*, nous donnerons encore un théorème d'existence et d'unicité pour la moyenne, en utilisant un théorème de Kakutani [6]; ce théorème ouvre la possibilité de développer une analyse harmonique correspondante à cette espèce de fonctions.

Ensuite, nous introduirons et étudierons en détail les fonctions F-asymptotiquement presque-périodiques qui correspondent, tout naturellement, aux fonctions F-presque-périodiques. Nous obtiendrons aussi, comme cas particuliers, les fonctions asymptotiquement presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach [9], et les fonctions $\mathfrak{M}^p$-asymptotiquement presque-périodiques introduites par nous dans [10] et qui sont étroitement liées aux fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques de J. P. Bertrandias [1], fonctions très utilisées dans différentes branches des Mathématiques.

I. Fonctions F-presque-périodiques

1. Soient G un groupe topologique, X un espace linéaire et $\mathcal{F}(G; X)$ un espace linéaire de fonctions définies sur G à valeurs dans X, espace muni d'une semi-norme $\| \quad \|$ qui remplit la condition d'invariance aux translations :

Si $f \in \mathcal{F}(G; X)$, alors chaque translation $f_t \in \mathcal{F}(G; X)$ pour tout $t \in G$ et on a

$$\|f_t\| = \|f\|. \tag{1}$$

Nous désignerons par $N = \{f : \|f\| = 0\}$ le noyau de la seminorme et par $F(G; X) = \mathcal{F}(G; X)/N$ l'espace séparé associé, qui sera un espace linéaire normé dont les éléments sont des classes de fonctions appartenant à $\mathcal{F}(G; X)$.

Dans ce qui suit, nous conviendrons d'identifier deux fonctions de $\mathcal{F}(G; X)$ qui diffèrent par une fonction appartenant au noyau de la seminorme.

Définition 1.1. *On dit qu'une fonction $f \in F(G; X)$ est F-continue si $\|f_t - f\| \to 0$ pour $t \to e$, „e" étant l'unité du groupe.*

On désignera par $F_c(G; X)$ l'ensemble de toutes les fonctions F-continues.

Remarques: 1) En utilisant la définition 1.1 et la relation (1), on voit aisément que chaque translatée d'une fonction F-continue présente le même caractère.

2) Grâce à la relation (1), il résulte aussitôt que la propriété de F-continuité d'une fonction appartenant à $F(G; X)$ est au fond une propriété d'uniforme continuité : pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de „e" ($V \in \mathcal{V}(e)$) tel que

$$\|f_{t_1} - f_{t_2}\| < \varepsilon \text{ pour } t_1 t_2^{-1} \in V.$$

Donc, l'application

$$t \to f_t$$

du groupe topologique G dans l'espace linéaire normé $F(G; X)$ est uniformément continue.

Proposition 1.1. *$F_c(G; X)$ est un sous-espace linéaire fermé de $F(G; X)$.*

Démonstration. En vertu de la définition 1.1 et des propriétés de la norme, il résulte que $F_c(G; X)$ a une structure d'espace linéaire normé. Si $f \in \overline{F}_c(G; X)$ (la fermeture de l'espace $F_c(G; X)$ dans la topologie induite par la norme donnée), alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f' \in F_c(G; X)$ telle que :

$$\|f - f'\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

D'autre part à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un voisinage V de l'unité e du groupe tel que:

$$\|f' - f_t\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } t \in V. \tag{3}$$

En combinant (2) et (3) on obtient pour $t \in V$:

$$\|f - f_t\| \leqslant \|f - f'\| + \|f' - f_t\| + \|f_t - f_t\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire $f \in F_c(G; X)$.

Corollaire. *Si $F(G; X)$ est un espace de Banach alors $F_c(G; X)$ a le même caractère.*

Définition 1.2. *On dit qu'une fonction $f \in F_c(G; X)$ est F-presque-périodique si l'ensemble $\{f_t; t \in G\}$ est précompact dans $F_c(G; X)$.*

On désignera par $P(G; X)$ l'ensemble de toutes les fonctions F-presque-périodiques.

Si on considère sur $F(G; X)$ une deuxième norme qui induit une topologie moins fine que la topologie initiale, alors chaque fonction F-presque-périodique au sens de la norme initiale, est, en même temps, F-presque-périodique pour la deuxième norme.

Définition 1.3. *On dit qu'une fonction $f \in F(G; X)$ est une fonction F-constante si on a :*

$$\|f_t - f\| = 0 \quad \text{pour chaque} \quad t \in G. \tag{4}$$

On désignera par $K(G; X)$ l'espace de toutes ces fonctions.

On voit de cette définition que chaque fonction F-constante est une fonction F-continue et F-presque-périodique.

$K(G; X)$ est aussi un sous-espace linéaire fermé de $F(G; X)$.

Proposition 1.2. *Si $f \in F_c(G; X)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

I) $f \in P(G; X)$.

II) *Pour chaque suite $\{t'_n\}_{n \in N}$ d'éléments de G, il existe une sous-suite $\{t_n\}_{n \in N}$ telle que la suite correspondante de ses translatées soit fondamentale.*

III) *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un ε-réseau fini pour l'ensemble $\{f_t; t \in G\}$.*

IV) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K de G tel que chacune de ses translatées contienne un point $t \in G$ avec la propriété*

$$\|f_t - f\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Démonstration. Il est évident que les premières trois conditions sont équivalents parce que II) et III) représentent d'autres caractérisations de la précompacité de l'ensemble $\{f_t; t \in G\}$ dans $F_c(G; X)$.

En suivant la démonstration du théorème 2.2 de [4], on peut établir de la même façon l'équivalence entre les conditions III) et IV) en remarquant encore qu'en réalité on a utilisé dans cette démonstration seulement les propriétés habituelles d'une norme et de plus la propriété d'invariance pour les translations.

2. Existence de la moyenne. On sait que le problème de l'existence et de l'unicité de la moyenne est une question centrale dans la théorie des fonctions presque-périodiques de toute espèce.

Si on trouve un tel résultat concernant l'existence de la moyenne on peut développer immédiatement une analyse harmonique pour le type respectif de presque-périodicité.

Il est bien connu qu'il y a plusieurs démonstrations pour l'existence d'une moyenne d'une fonction presque-périodique au sens de von Neumann ou pour les fonctions *p.p.* au sens de Stepanoff, Weyl, Besicovitch. Récemment, en 1966, J. P. Bertrandias [1] a donné une démonstration très intéressante pour l'existence de la moyenne d'une fonction $\mathfrak{M}^p - p.p.$ plus générale que les fonctions au sens de Stepanoff, Weyl, Besicovitch.

Dans ce qui suit, nous allons donner un théorème d'existence et d'unicité pour la moyenne d'une fonction F-presque-périodique, grâce auquel on pourra développer aussi une analyse harmonique correspondante.

Nous supposerons de plus que $F(G\,;\,X)$ est un espace complet, ce qui entraîne le fait que la F-presque-périodicité d'une fonction peut être caractérisée à l'aide de la relative compacité de l'ensemble de ses translatées.

Maintenant on peut établir :

Théorème 1.3. *Pour chaque fonction $f \in P(G\,;\,X)$, il existe une fonction F-constante, uniquement déterminée, dans l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{f_t\,;\,t \in G\}$.*

Démonstration. Désignons par K l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{f_t\,;\,t \in G\}$, qui, évidemment, est un ensemble convexe et compact parce que $F(G\,;\,X)$ est complet [6]. Soient A_s l'application de translation $f \to f_s$ sur $P(G\,;\,X)$ et $\mathcal{A}$ la famille de toutes ces applications. Grâce au théorème de Kakutani ([6], th. 8, p. 457), il résulte qu'il existe dans K un élément φ, tel que $A_s\varphi = \varphi$ pour chaque $s \in G$ et donc φ est une fonction F-constante.

Puisque $\varphi \in \overline{\mathrm{conv}}\,\{f_t\,;\,t \in G\}$ il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $t_1, \ldots, t_n \in G$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R_+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ tels que

$$\left\| \varphi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{t_i} \right\| < \varepsilon; \tag{6}$$

on obtient alors :

$$\|\varphi\| \leqslant \left\| \varphi - \sum_{i=n}^{n} \lambda_i f_{t_i} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{t_i} \right\| < \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i f_{t_i}\| \leqslant \varepsilon + \|f\|$$

ce qui entraîne :

$$\|\varphi\| \leqslant \|f\|. \tag{7}$$

De plus, il résulte de [11] que l'élément φ est uniquement déterminé par la fonction $f \in P(G\,;\,X)$. De cette façon, nous pouvons définir l'opérateur

$$M : P(G\,;\,X) \to K(G\,;\,X),$$

tel que

$$Mf = \varphi$$

pour chaque $f \in P(G\,;\,X)$.

Définition 1.4. *On appellera moyenne généralisée d'une fonction f, F-presque-périodique, l'élément unique donné par le théorème précédent et désigné par Mf.*

De ce qui précède, on voit aisément que Mf a la propriété caractéristique suivante :

I. $Mf \in K(G\,;\,X)$ pour chaque $f \in P(G\,;\,X)$, et pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $t_1, t_2, \ldots, t_n \in G$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R_+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tels que :

$$\left\| Mf - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{t_i} \right\| < \varepsilon. \tag{8}$$

De plus, l'opérateur M défini par $f \to Mf$ pour chaque $f \in P(G\,;\,X)$ à valeurs dans $K(G\,;\,X)$ a les propriétés suivantes :

II. M est linéaire et continu ;

III. $\|Mf\| \leqslant \|f\|$ et $\|M\| = 1$;

IV. $Mf = f$ pour chaque $f \in K(G\,;\,X)$;

V. $Mf_t = Mf$ pour chaque $f \in P(G\,;\,X)$ et chaque $t \in G$;

VI. M est un projecteur de l'espace $P(G\,;\,X)$ dans $K(G\,;\,X)$ et donc on a la décomposition en somme directe :

$$P(G\,;\,X) = K(G\,;\,X) \oplus P_0(G\,;\,X), \tag{9}$$

où $P_0(G\,;\,X)$ est l'ensemble des éléments de $P(G\,;\,X)$ qui ont la moyenne généralisée nulle.

Théorème 1.4. *Si M' est un opérateur sur $P(G\,;\,X)$ à valeurs dans $K(G\,;\,X)$ qui possède les propriétés II – V, alors $M'f = Mf$ pour chaque $f \in P(G\,;\,X)$.*

Démonstration. Comme $Mf \in K(G\,;\,X)$, il résulte de IV que $M'Mf = Mf$.

D'autre part, compte tenu de I et III, on a :

$$\left\| M'\left(Mf - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{t_i}\right) \right\| \leqslant \left\| Mf - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{t_i} \right\| < \varepsilon,$$

d'où, en utilisant II et V, on obtient pour chaque $\varepsilon > 0$

$$\|Mf - M'f\| < \varepsilon, \text{ donc } M = M'.$$

Remarques : 1) Si on désigne par $\| f \|_1 = \| Mf \|$, alors l'espace $F(G\,;\,X)$ devient un espace linéaire normé par rapport à $\| \quad \|_1$ avec une structure plus faible que celle initiale.

2) Si $F(G\,;\,X)$ n'est pas un espace complet, on considère l'espace complet associé $\widetilde{F}(G\,;\,X)$ et alors chaque fonction F-presque-périodique, sera, en même temps, $\widetilde{F}$-presque-périodique, d'où il résultera que f admet une moyenne généralisée, qui sera une fonction $\widetilde{F}$-constante.

3) Toutes les notions et tous les résultats obtenus plus haut ont été donnés par rapport aux translations à droite, le groupe G étant, en général, non-commutatif.

On peut obtenir des résultats analogues si on opére par rapport aux translations à gauche, en supposant, que la norme sur l'espace $F(G\,;\,X)$ est invariante à gauche.

Si la norme est en même temps invariante à droite et à gauche, alors les deux moyennes généralisées correspondant aux translations à gauche, respectivement à droite, coïncident.

4) Puisque le résultat du théorème de Kakutani se maintient aussi, pour les espaces vectoriels topologiques localement convexes, on constate qu'un théorème d'existence et l'unicité de la moyenne a lieu encore pour le cas de $F(G\,;\,X)$ muni d'une structure d'espace linéaire topologique localement convexe et complet, qui satisfasse de plus à la condition que la famille de tous les opérateurs de translation soit équi-uniformément continue.

En ce cas nous précisons que la condition de presque-périodicité d'une fonction peut être donnée par la relative compacité de l'ensemble de ses translatées pour la topologie d'espace localement convexe de $F(G\,:\,X)$.

En particulier, si X est un espace localement convexe complet et $F(G\,;\,X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur G à valeurs dans X, muni d'une topologie localement convexe pour laquelle un système fondamental de voisinages de l'origine est formé par les ensembles

$$\widetilde{V} = \{ f\,;\, f \in F(G\,;\,X),\ f(t) \in V \ \textit{pour chaque}\ t \in G \},$$

où V parcourt un système fondamental de voisinages de l'origine de X, on obtient les fonctions presque-périodiques introduites par N. Gheorghiu dans [7].

Dans ce cas, on se rend compte que la famille de tous les opérateurs de translation est équi-uniformément continue parce que les voisinages V sont invariants aux translations.

Donc, pour cette espèce de fonctions presque-périodiques il existe une moyenne au sens de la définition 1.4.

§ 2. **Cas particuliers remarquables**. 1) Si on considère $G = R$, $X = C$ et $F(G\,;\,X)$ l'espace des fonctions bornées sur R à valeurs dans C et comme norme (1) sur cet espace la norme de la convergence uniforme, alors l'espace $P(R\,;\,C)$ correspondant est l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, qui est étudié en détail dans ([3], ch. I).

2) Si on considère $G = R$, $X =$ un espace de Banach, $F(R\,:\,X)$ l'espace des fonctions définies sur R bornées pour la nome de X et comme norme (1) on prend la norme de la convergence uniforme, alors l'espace $P(R\,;\,X)$ correspondant est $AP(X)$, l'espace des fonctions presque-périodiques étudiées dans ([3], ch. 1).

3) Si G est un groupe localement compact, $X = C$, $F(G\,;\,X)$ l'espace des fonctions bornées sur G à valeurs dans C et comme norme (1) on prend encore la norme de la convergence uniforme, alors $P(G;\,C)$ correspondant est l'espace $\alpha(G\,:\,C)$ de fonctions continues, presque-périodiques au sens de von Neumann ; si on répète tout le raisonnement ci-dessus en prenant X un espace de Banach arbitraire, on obtient les fonctions continues au sens de von Neumann à valeurs dans un espace de Banach.

4) Soient G un groupe localement compact, $X = C$ et $F(G\,:\,C) = L^p(G)$. Si on désigne par Ω la famille des voisinages ouverts relativement compacts de „e" (donc des ensembles boréliens) et par μ une mesure de Haar sur G, on peut introduire sur $F(G;\,C)$ la norme

$$\| f \|_U^{S^p} = \sup_{x,y \in X} \left\{ \frac{1}{\mu(xUy)} \int_{xUy} |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \qquad p \geqslant 1 \ \text{ et } \ U \in \Omega, \tag{10}$$

pour laquelle l'espace $P(G\,;\,C)$ correspondant est l'ensemble $\{ S_U^p - AP \}$ de toutes les fonctions presque-périodiques généralisées au sens de Stepanoff définies par H. Davis dans [4].

a) Si $G = R$ muni de la topologie usuelle, alors $P(G\,:\,C)$ est l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Stepanoff ([3], ch VI).

b) Si G est un groupe discret, alors $P(G\,:\,C)$ est $L(G\,:\,C)$, l'ensemble des fonctions continues presque-périodiques au sens de von Neumann.

c) Si G est un groupe compact, $P(G\,;\,C)$ est justement $L^p(G)$.

5) Soient G un groupe arbitraire localement compact, $X = C$ et $F(G\,;\,C) = L^p(G)$. Soit $(D,\ \leqslant)$ un ensemble dirigé et pour chaque $d \in D$ on désigne par U_d un ensemble borélien de G et par ν_d une mesure borélienne sur U_d, qui est finie et n'est pas identiquement nulle.

On dit que $\Phi = \{ U_d,\ \nu_d,\ d \in D,\ \leqslant \}$ est une suite généralisée de Bohr sur G si pour toute fonction $f \in \alpha(G\,:\,C)$

$$\lim_{d \in D} \frac{1}{\nu_d(U_d)} \int_{U_d} f d\nu_d = Mf. \tag{11}$$

Soit $\Phi = \{ U_d,\ \nu_d,\ d \in D,\ \leqslant \}$ une telle suite généralisée de Bohr. Pour chaque $f \in L^p(G)$, $d \in D$ et $p \geqslant 1$, on désigne par

$$\| f \|_U^{S(p)} = \sup_{x,y \in G} \left\{ \frac{1}{\nu_d(U_d)} \int_{U_d} |{}_x f_y|^p \, d\nu_d \right\}^{1/p} \tag{12}$$

et par

$$\|f\|_U^{W(p)} = \overline{\lim_{d \in D}} \|f\|_d^{S(p)}. \tag{13}$$

L'espace $P(G\,;\,C)$ construit par le procédé général pour la norme (13) est justement l'espace $\{W_\Phi^p - AP\}$ de toutes les fonctions presque-périodiques généralisées au sens de Weyl introduites par H. Davis dans [4].

En particulier, si $G = R$ muni par la topologie usuelle et $(D, \leqslant)$ est l'ensemble des entiers positifs muni de l'ordre naturelle alors $\Phi = \{(-n, n),\ n \in D, \leqslant\}$ est une suite homogène de Bohr (de plus, en ce cas ν_d est la restriction à U_d de la mesure de Lebesgue).

Avec cette suite généralisée Φ utilisée en (12) et (13) on obtient comme $P(G\,;\,C)$ l'ensemble des fonctions presque-périodiques au sens de Weyl ([3], ch. VI).

6) Si $G = R$, $X = R$, $F(R:\ R) = \mathfrak{M}^p$, l'espace de fonctions bornées en moyenne asymptotique d'ordre p $(p \geqslant 1)$, c'est-à-dire l'espace des fonctions $f \in L^p_{loc}(R)$ pour lesquelles

$$\|f\|_p = \left[\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^p\,dt\right]^{1/p} < \infty \ (1 \leqslant p < \infty) \tag{14}$$

ou

$$\|f\|_\infty = \limsup_{T\to\infty} \|f\|_{L^\infty[-T,T]} = \|f\|_{L^\infty_{(R)}} < \infty \text{ pour } p = \infty, \tag{15}$$

alors l'espace $P(R;\ R)$ des fonctions F-presque-périodiques par rapport aux normes (14) et (15) est justement l'espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques, introduites dans [1] par J. P. Bertrandias.

En appliquant pour ce cas les théorèmes 1.3 et 1.4, on obtient une autre démonstration, différente de celle établie par Bertrandias, pour l'existence et l'unicité de la moyenne généralisée des fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques.

L'espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques contient encore comme sous-espace l'ensemble B^p des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch ([2], ch. 1), donc les fonctions F-presque-périodiques généralisent les principaux types de presque-périodicité connus.

II. Fonctions F-asymptotiquement-presque-périodiques

Dans ce qui suit, nous allons introduire les notions de fonction F-asymptotiquement-presque-périodique et fonction F-asymptotiquement-normale comme des extensions naturelles des notions bien connues de fonction asymptotiquement presque-périodique et de fonction asymptotiquement normale.

Après avoir exprimé la propriété de F-presque-périodicité asymptotique d'une fonction à l'aide des ε-réseaux (le théorème 2.2) nous allons

caractériser cette notion, d'une part à l'aide de la F-normalité, et d'autre part à l'aide d'une propriété de décomposition, les deux derniers résultats étant synthétisés dans le théorème 2.3.

Ensuite, nous verrons que parmi les principaux cas particuliers se trouve le cas des fonctions $\mathfrak{M}^p$-asymptotiquement presque-périodiques introduites et étudiées par nous dans [10].

§ 1. Soient R_α — la demidroite $t \geqslant \alpha$ et X un espace linéaire.

Pour chaque $\alpha \in R$ on désigne par $\mathcal{F}_\alpha(X) = \mathcal{F}(R_\alpha\,;\,X)$ un espace linéaire de fonctions définies sur R_α à valeurs dans X, muni d'une semi-norme $\|\ \|_\alpha$ avec les propriétés suivantes :

A) Si $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, alors la restriction de f à R_β appartient à $\mathcal{F}_\beta(X)$ et on a :

$$\|f\|_\beta \leqslant \|f\|_\alpha, \tag{16}$$

convenant, en même temps, de comprendre par $\|f\|_\beta$ la semi-norme de $f|_{R_\beta}$ dans $\mathcal{F}_\beta(X)$.

B) Si $f \in \mathcal{F}_\alpha(X)$, alors $f_s \in \mathcal{F}_{\alpha-s}(X)$ pour chaque $s \in R$ et on a

$$\|f\|_\alpha = \|f_s\|_{\alpha-s}, \tag{17}$$

où f_s est la translatée de f par „s".

Remarques. 1) Si $\alpha < \beta$, on voit, de la propriété A, que l'application $\varphi : \mathcal{F}_\alpha(X) \to \mathcal{F}_\beta(X)$ définie par :

$$\varphi(f) = f|_{R_\beta}$$

est linéaire et continue parce que :

$$\|\varphi(f)\|_\beta \leqslant \|f\|_\alpha.$$

Dans ce qui suit, nous allons faire abstraction de cette application φ, donc chaque élément $f \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ sera en même temps un élément de $\mathcal{F}_\beta(X)$ pour tout $\beta > \alpha$.

2) Pour chaque $s \in R$ l'application $A_s : \mathcal{F}_\alpha(X) \to \mathcal{F}_{\alpha-s}(X)$ définie par $A_s(f) = f_s$ est une surjection linéaire isométrique ; donc les deux espaces sont congruents ou isomorphes comme des espaces semi-normés.

Désignons par $N_\alpha = \{f \in \mathcal{F}_\alpha(X),\ \|f\|_\alpha = 0\}$ le noyau de la semi-norme $\|\ \|_\alpha$ et par $\mathcal{F}_\alpha(X) = \mathcal{F}_\alpha(X)/N_\alpha$ l'espace séparé associé à $F_\alpha(X)$: $F_\alpha(X)$ est un espace linéaire normé ayant comme éléments des classes de fonctions de $\mathcal{F}_\alpha(X)$.

Nous conviendrons encore d'opérer avec des éléments de $\mathcal{F}_\alpha(X)$ en identifiant deux fonctions qui diffèrent par une fonction appartenant à N_α. Donc, dans ce qui suit, nous prendrons comme norme d'un élément $\hat{f} \in F_\alpha(X)$, $\|f\|_\alpha$, où f est un représentant de la classe $\hat{f}$.

Définition 2.1. *On dit qu'une fonction $f \in F_\alpha(X)$ est F_α-continue si*

$$\lim_{t \downarrow 0} \|f - f_t\|_\alpha = 0. \tag{18}$$

On désignera par $F_{c,\alpha}(X)$ l'ensemble de toutes ces fonctions.

Des propriétés A et B de la norme on voit que les fonctions de $F_{c,\alpha}(X)$ satisfont à la condition suivante d'uniforme continuité :

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\|f_{t_1} - f_{t_2}\| < \varepsilon \tag{19}$$

pour $t_1, t_2 > 0$ avec $|t_1 - t_2| < \delta$.

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 1.1, on obtient :

Proposition 2.1. *$F_{c,\alpha}(X)$ est un sous-espace fermé de $F_\alpha(X)$.*

Corollaire. *Si $F_\alpha(X)$ est complet, alors $F_{c,\alpha}(X)$ est lui aussi complet.*

Proposition 2.2. *Si $f \in F_{c,\alpha}(X)$ et $J = [a, b]$ est un intervalle fermé et borné de R, alors la famille $\{f_s ; s \in J\}$ est compacte dans $F_{c,\alpha-a}(X)$*

Démonstration. Soit l'application

$$\varphi : [a, b] \to F_{c,\alpha-a}(X) \tag{20}$$

associée à une fonction $f \in F_{c,a}(X)$, définie par $\varphi(s) = f_s$.

De la F-continuité et des propriétés A et B, il résulte :

$$\begin{aligned} \|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)\|_{\alpha-a} = \|f_{s_1} - f_{s_2}\|_{\alpha-a} = \|f - f_{s_2-s_1}\|_{\alpha-a+s_1} \leqslant \\ \leqslant \|f - f_{s_2-s_1}\|_\alpha < \varepsilon \end{aligned} \tag{21}$$

pour $s_2 - s_1 < \delta$ et $s_2 > s_1$. Donc φ est continue et $\{f_s ; s \in J\}$ est un ensemble compact dans $F_{c,\alpha-a}(X)$.

Corollaire 1. *Si $f \in F_{c,\alpha}(X)$, il existe, pour chaque $\varepsilon > 0$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in J$* tels que pour tout $s \in J$ corresponde un s_i de manière que :

$$\|f_s - f_{s_i}\|_{\alpha-a} < \varepsilon. \tag{22}$$

Corollaire 2. *Dans les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.2, il résulte que $\{f_s : s \in [a, b]\}$ est compact dans tout espace $F_{c,\alpha'}(X)$ avec $\alpha' > \alpha - a$.*

Démonstration. L'affirmation résulte immédiatement de (21), compte tenu de la propriété A de la norme.

Définition 2.2. *On dit qu'une fonction $f \in F_{c,\alpha}(X)$ est F-asymptotiquement presque-périodique* (abrégé F-a. p. p.), *si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $L > 0$ et $\beta \geqslant \alpha$ tels que chaque intervalle de R_β de longueur L, contienne un point τ pour lequel on a :*

$$\|f_{|\tau|} - f_\beta\| < \varepsilon. \tag{23}$$

On désignera par $P_\alpha^\infty(X)$ l'espace de toutes les fonctions F-a. p. p. définies sur une même demi-droite R_α.

Si $\alpha < \beta$, alors on voit que l'immersion naturelle

$$F_{c,\alpha}(X) \subset F_{c,\beta}(X)$$

entraîne l'immersion naturelle

$$P_\alpha^\infty(X) \subset P_\beta^\infty(X).$$

Définition 2.3. *On dit qu'une fonction $f \in F_\alpha(X)$ est F_α-constante si*

$$\|f - f_t\|_\alpha = 0 \tag{24}$$

pour chaque $t > 0$.

On désigne par $K_\alpha(X)$ l'ensemble de toutes ces fonctions et on remarque aussi que les fonctions F_α-constantes sont F_α-continues et F-a. p. p., donc

$$K_\alpha(X) \subset P_\alpha^\infty(X).$$

Si X est un espace de Banach et $F_\alpha(X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions bornées dans la norme de X sur R_α, alors $P_\alpha^\infty(X)$ correspondant à la norme de l'uniforme convergence est justement $AP_\alpha^\infty(X)$, l'espace des fonctions a p. p. à valeurs dans un espace de Banach.

On remarque que la définition 2.2 est équivalente à la :

Définition 2.2'. *On dit qu'une fonction $f \in F_{c,\alpha}(X)$ est F-a. p. p. si pour chaque $\varepsilon > 0$ et une demi-droite arbitraire fixée R_γ il existe $L' > 0$ et $\beta' \geqslant \alpha$ tels que chaque intervalle de R_γ de longueur L' contienne un point τ pour lequel on a :*

$$\|f_{|\tau|} - f_{\beta'}\| < \varepsilon. \tag{25}$$

En effet, on voit aussitôt que la définition 2.2' entraîne la définition 2.2 parce qu'on peut prendre comme L et β dans la définition 2.2 justement L' et β' de la définition 2.2'.

Inversement, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et L, β les nombres correspondants d'après la définition 2.2. On peut distinguer deux cas : a) $\gamma \geqslant \beta$ et b) $\gamma < \beta$.

Dans le cas a) on peut prendre comme L' et β' de la définition 2.2' justement L et β de la définition 2.2.

Dans le cas b) on remarque que la définition 2.2' est satisfaite avec $L' = L + \beta - \gamma$ et avec tout $\beta' \geqslant \beta$

Grâce à la propriété A, on voit que si la définition 2.2 (respectivement 2.2' est remplie pour certain β (resp β') elle est d'autant plus satisfaite pour chaque $\gamma \geqslant \beta$ (resp. $\gamma \geqslant \beta'$) ce qui nous permettra de fixer β (resp. β') dans certains problèmes.

Théorème 2.2'. *Une fonction $f \in F_{c,\alpha}(X)$ est F-a. p. p. si, et seulement si, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque demi-droite fixée R_γ, il existe $\beta_1 \geqslant \alpha - \gamma$ et n éléments $\{s_i ; i = 1, 2, \ldots, n\}$ de R_γ tels qu'à chaque $a \in R_\gamma$ on peut faire correspondre un élément $s_j \in R_\gamma$ pour lequel on a :*

$$\|f_a - f_{s_j}\|_{\beta_1} < \varepsilon. \tag{26}$$

Démonstration. Nécessité. Soit $f \in P_\alpha^\infty(X)$ et soit $\gamma \geqslant 0$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $L > 0$ et $\beta \geqslant \alpha$ tels que chaque intervalle de R_γ de longueur L contienne au moins un point τ pour lequel on ait (25). Soit a un point arbitraire de la demi-droite $R_{2\gamma+L}$. Alors dans l'intervalle $[a-\gamma-L,\ a-\gamma]$ il existe τ tel que :

$$\|f - f_\tau\|_\beta < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où, en utilisant les propriétés A et B de la norme, on obtient :

$$\|f_a - f_{a-\tau}\|_{\beta-\gamma} \leqslant \|f_a - f_{a-\tau}\|_{\beta-a+\tau} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27}$$

D'autre part, du corollaire 1 de la proposition 2.2 appliqué à la fonction $f \in P_\alpha^\infty(X)$ sur l'intervalle $[\gamma,\ \gamma+L]$ il résulte qu'il existe $\{s_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ appartenant à cet intervalle tels que pour chaque $b \in [\gamma, \gamma+L]$ il existe un élément s_j avec la propriété :

$$\|f_b - f_{s_j}\|_{\alpha-\gamma} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, pour $b = a - \tau \in [\gamma, \gamma+L]$, il existe $s_j \in [\gamma,\ \gamma+L]$ tel que

$$\|f_{a-\tau} - f_{s_j}\|_{\alpha-\gamma} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{28}$$

ce qui entraîne, en vertu de la propriété A :

$$\|f_{a-\tau} - f_{s_j}\|_{\beta-\gamma} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{28'}$$

En combinant (27) et (28′) on obtient :

$$\|f_a - f_{s_j}\|_{\beta_1} < \varepsilon$$

pour chaque $a \in R_{2\gamma+L}$ avec $\beta_1 = \beta_1 - \gamma \geqslant \alpha - \gamma$, c'est-à-dire (26) est remplie pour chaque $a \in R_{2\gamma+L}$.

Si $a \in [0,\ 2\gamma+L]$, alors en appliquant le corollaire 1 de la proposition 2.2, il résulte qu'il existe $\{s_i;\ i = m+1, \ldots, p\}$ sur cet intervalle tel que la relation (26) soit remplie pour un élément s_k $(m+1 \leqslant k \leqslant p)$. Donc, pour chaque R_γ avec $\gamma \geqslant 0$ et chaque $a \in R_\gamma$ il existe s_j pour lequel on a (26).

Si $\gamma < 0$, alors un raisonnement analogue assure l'existence sur l'intervalle $[\gamma,\ 0]$ d'un nombre fini d'éléments $\{s_i;\ i = p+1, \ldots, n\}$ tels que pour chaque $a \in [\gamma,\ 0]$ il existe s_j $(p+1 \leqslant j \leqslant n)$ qui satisfait à (26); donc, grâce aux affirmations faites ci-dessus il résulte dans ce cas aussi

il existe, pour chaque $a \in R_\gamma$, dans l'ensemble fini $\{s_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ un élément s_j pour lequel la relation (26) est remplie.

Suffisance. Soient $\varepsilon > 0$ arbitraire et $\gamma = 0$. Grâce aux hypothèses, il résulte que pour $f \in F_{c,\alpha}(X)$ il existe $\{s_j\}_{j=1}^n$ dans R_0 et $\beta_1 \geqslant \alpha$ tels que pour chaque $a \in R_0$ on peut faire correspondre un des éléments s_j qui satisfasse à (26).

Désignons par $L = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{s_i\}$ et soit a un élément arbitraire de R_0. Alors, en vertu de la condition de l'énoncé $a_0 = a + L$, il existe s_{j_0} tel que :

$$\|f_{a_0} - f_{s_{j_0}}\|_{\beta_1} < \varepsilon. \tag{26'}$$

En prenant maintenant, $\tau = a + L - s_{j_0}$ on voit que $\tau \in [a,\ a+L]$ et par suite des propriétés A et B on obtient :

$$\|f - f_\tau\|_{\beta_1+L} \leqslant \|f - f_\tau\|_{\beta_1+s_{j_0}} = \|f_{a_0} - f_{s_{j_0}}\|_{\beta_1} < \varepsilon.$$

Donc, si on prend $\beta = \beta_1 + L$, on voit que la fonction f satisfait à la définition 2.2′ de la F-presque-périodicité asymptotique pour chaque R_γ avec $\gamma \geqslant 0$, ce qui prouve que la relation (25) est remplie pour chaque γ.

Remarque. Si la propriété contenue dans le théorème 2.2 a lieu pour un certain γ fixé, alors la propriété a lieu aussi pour chaque $\gamma \in R$.

En effet, si la relation (26) est remplie pour chaque $a \in R_\gamma$, il en est de même pour $a \in R_{\gamma'}$, avec $\gamma' > \gamma$. Mais, en même temps, la relation (26) est remplie aussi pour $a \in R_\gamma$ avec $\gamma' < \gamma$, parce que sur l'intervalle $[\gamma',\ \gamma]$ on peut appliquer la proposition 2.1.

Définition 2.4. *On dit qu'une fonction $f \in F_{c,\alpha}(X)$ est une fonction F-asymptotiquement normale si de chaque suite $\{h'_n\}_{n\in N}$ convergente vers $+\infty$ on peut extraire une sous-suite $\{h_n\}_{n\in N}$ telle que la suite correspondante de translatées de f, $\{f_{h_n}\}_{n\in N}$ soit convergente dans chaque espace $F_\beta(X)$.*

Dans ce qui suit, supposons, de plus que les espaces $F_\alpha(X)$ sont complets, c'est-à-dire qu'en vertu de la remarque 2 qui succède aux propriétés A et B, il suffit qu'un seul espace $F_\alpha(X)$ soit complet.

Soit maintenant $F(R;\ X)$ l'espace de toutes les fonctions g définies sur R à valeurs dans X pour lesquelles toutes les restrictions à chaque demi-droite R_α se trouvent dans $F_\alpha(X)$ ayant, de plus, la propriété qu'il existe $\lim\limits_{\gamma \to -\infty} \|g\|_\gamma$ qui est une norme sur $F(R;\ X)$.

Avec ces précisions on peut démontrer le théorème suivant qui contient deux propriétés caractéristiques pour les fonctions F-a. p. p.

Théorème 2.3. *Si $f \in F_{c,\alpha}(X)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

I) $f \in P_\alpha^\infty(X)$,

II) *f est asymptotiquement normale,*

III) *f peut être représenté uniquement par*

(29) $$f(x) = \Psi(x) + \omega(x), \quad pour \quad x \in R_\alpha,$$

où Ψ est une fonction F-presque-périodique par rapport à l'espace $F(R; X)$ mentionné ci-dessus et ω est une fonction appartenant à $F_{c,\alpha}(X)$ pour laquelle:

(30) $$\lim_{\beta \to \infty} \| \omega \|_\beta = 0.$$

Démonstration. Montrons premièrement que I) entraîne II). Soient $f \in P_\alpha^\infty(X)$, ε un nombre réel fixé et $\{h'_n\}_{n \in N}$ une suite convergente vers $+\infty$.

Si $\varepsilon = 1/2$ et $\gamma = 0$, alors du théorème 2.2 il résulte qu'il existe $\beta_1 \geqslant \alpha$ et $\{s_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ dans R_0 tels que pour chaque $a \in R_0$ corresponde s_{i_0} avec la propriété

$$\| f_a - f_{s_{i_0}} \|_{\beta_1} < 1/2,$$

d'où, grâce à la propriété B, on a :

$$\| f_{a-\beta+\beta_1} - f_{s_{i_0}-\beta-\beta_1} \|_\beta < 1/2.$$

Comme $h'_n \to \infty$, il résulte que pour n suffisamment grand $a = h'_n + \beta - \beta_1 \in R_0$ et de la relation précédente on obtient :

$$\| f_{h'_n} - f_{s_{i_0}-\beta+\beta_1} \|_\beta < 1/2,$$

c'est-à-dire il existe une infinité d'éléments h'_n qui sont comparables à un même élément $s'_{i_0} = s_{i_0} - \beta + \beta_1$. Donc, il existe une sous-suite $\{h'_{n1}\}_{n \in N}$ de $\{h'_n\}_{n \in N}$ pour laquelle on a :

$$\| f_{h'_{n_1}} - f_{s'_{i_0}} \|_\beta < 1/2,$$

d'où on obtient :

(31) $$\| f_{h'_{n1}} - f_{h'_{m1}} \|_\beta < 1, \quad n \in N, \quad m > n.$$

Maintenant, on peut appliquer le même raisonnement à la suite $\{h'_{n1}\}_{n \in N}$ pour $\varepsilon = 1/2^2$ et alors on trouve une sous-suite $\{h'_{n2}\}_{n \in N}$ telle que

$$\| f_{h'_{n2}} - f_{h'_{m2}} \|_\beta < 1/2, \quad n \in N, \quad m > n.$$

Par récurrence, on obtient $\{h'_{nj}\}$ sous-suite de $\{h'_{n,j-1}\}$ pour laquelle on a :

(32) $$\| f_{h'_{nj}} - f_{h'_{mj}} \|_\beta < \frac{1}{2^{j-1}}, \quad j = 1, 2, \ldots \text{ et } m > n.$$

On voit, maintenant, que la suite des translatées de f, $\{f_{h'_{nn}}\}_{n \in N}$ correspondant à la suite diagonale $\{h'_{nn}\}_{n \in N}$ est convergente dans $F_\beta(X)$ parce qu'on a :

(33) $$\| f_{h'_{nn}} - f_{h'_{mm}} \|_\beta < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in N, \quad m > n,$$

et que $F_\beta(X)$ a été supposé un espace complet.

Puis nous allons démontrer qu'on peut extraire de $\{h'_{nn}\}_{n \in N}$ une autre sous-suite telle que la suite correspondante des translatées de f soit convergente dans chaque espace $F_\gamma(X)$.

Pour cela il suffit de démontrer que cette affirmation est vraie dans les espaces $F_\gamma(X)$ où γ est un entier non-négatif.

Désignons par $h_n = h'_{nn}$ pour $n \in N$ et soient : $\{h_{n1}\}_{n \in N}$ la sous-suite de $\{h_n\}_{n \in N}$ pour laquelle $\{f_{h_{n1}}\}_{n \in N}$ converge dans $F_{-1}(X)$, $\{h_{n2}\}_{n \in N}$ la sous-suite de $\{h_{n1}\}_{n \in N}$ pour laquelle $\{f_{h_{n2}}\}_{n \in N}$ converge dans $F_{-2}(X)$.

Par récurrence, on obtient la sous-suite $\{h_{nm}\}$ de $\{h_{nm-1}\}$, donc une sous-suite de toutes les suites $\{h_{nk}\}$ avec $k \leqslant m$, pour laquelle $\{f_{h_{nm}}\}$ est convergente dans $F_{-m}(X)$.

Si on désigne par k_n la sous-suite diagonale h_{nn}, alors la suite $\{f_{k_n}\}_{n \in N}$ est convergente dans chaque espace $F_{-m}(X)$ $(m \in N)$, ce qui entraîne sa convergence dans chaque $F_\beta(X)$.

Pour démontrer que II) entraîne III) raisonnons par l'absurde.

Si $f \in F_{c,\alpha}(X)$ remplissait II) sans satisfaire à I), alors grâce au théorème 2.2, il existerait $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour chaque demi-droite R_γ il n'existerait aucun ε_0-réseau fini pour la famille des translatées de f.

Soit h_1 un point arbitraire de R_α. Il existe $h_2 > h_1 + 1$ tel que :

(34) $$\| f_{h_1} - f_{h_2} \|_\alpha \geqslant \varepsilon_0,$$

parce que, dans le cas contraire, on aurait pour chaque $t > h_1 + 1$

$$\| f_t - f_{h_1} \|_\alpha < \varepsilon_0,$$

c'est-à-dire $\{f_{h_1}\}$ serait un ε_0-réseau pour la famille des translatées de f, ce qui n'est pas possible.

En raisonnant de même pour h_2, il résulte l'existence de $h_3 > h_2 + 1$ tel que :

(35) $$\| f_{h_3} - f_{h_2} \|_\alpha \geqslant \varepsilon_0 \text{ et } \| f_{h_3} - f_{h_1} \|_\alpha \geqslant \varepsilon_0.$$

Par récurrence, on construit la suite h_n convergente vers $+\infty$ telle que :

(36) $$\| f_{h_n} - f_{h_m} \|_\alpha \geqslant \varepsilon_0 \text{ pour } n \in N \text{ et } m > n.$$

Mais de la relation (36) on voit que f n'est pas F-asymptotiquement normale, ce qui contredit II).

Démontrons maintenant que I) entraîne III).

En effet si $f \in P_\alpha^\infty(X)$, alors f est F-asymptotiquement normale et donc si $\{h'_n\}_{n \in N}$ est une suite convergente vers $+\infty$ il existe une sous-suite $\{k_n\}_{n \in N}$ telle que $\{f_{k_n}\}_{n \in N}$ converge dans chaque $F_\beta(X)$.

Soit Ψ la fonction limite qui, évidemment, est définie sur R et satisfait à la relation :

$$\| f_{k_n} - \Psi \|_\beta < \varepsilon \tag{37}$$

pour chaque $\beta \in R$ et n suffisamment grand.

Démontrons que Ψ est une fonction F-presque-périodique au sens de la définition 1.2 par rapport à l'espace mentionné dans l'énoncé.

De la définition 2.2 il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $L > 0$ et $\beta \geqslant \alpha$ tels que chaque intervalle de R_β de longueur L contienne un point τ avec la propriété (23), d'où, compte tenu de la propriété B, on obtient pour chaque n :

$$\| f_{k_n} - f_{k_n + |\tau|} \|_{\beta - k_n} < \varepsilon, \tag{38}$$

ce qui entraîne, en vertu de la propriété A et du fait que $k_n \to \infty$, la relation :

$$\| f_{k_n} - f_{k_n + |\tau|} \|_\beta < \varepsilon \tag{39}$$

pour n suffisamment grand.

En passant à la limite dans (39) par rapport à n, on a :

$$\| \Psi - \Psi_{|\tau|} \|_\beta \leqslant \varepsilon \tag{40}$$

pour chaque $\beta \in R$, ce qui entraîne $\Psi \in P^\infty_\beta(X)$, quel que soit $\beta \in R$.

Soit $\beta_1 < \beta_2$. Alors, en utilisant la relation (40) écrite pour β_1 et aussi la propriété B, on a :

$$\| \Psi \|_{\beta_1} \leqslant \varepsilon + \| \Psi_{|\tau|} \|_{\beta_1} = \varepsilon + \| \Psi \|_{\beta_1 + |\tau|} \leqslant \varepsilon + \| \Psi \|_{\beta_2}.$$

Donc

$$\| \Psi \|_{\beta_1} \leqslant \| \Psi \|_{\beta_2}; \tag{41}$$

Mais, d'autre part, de la propriété A on a :

$$\| \Psi \|_{\beta_2} \leqslant \| \Psi \|_{\beta_1}, \tag{42}$$

qui, avec (41), donne :

$$\| \Psi \|_{\beta_1} = \| \Psi \|_{\beta_2}. \tag{43}$$

De la relation (43) il résulte que $\Psi \in F(R : X)$ (l'espace des fonctions définies sur R à valeurs dans X dont les restrictions à chaque demi-droite R_α se trouve dans $P(R_\alpha ; X)$ pour lesquelles il existe $\| g \| = \lim_{\gamma \to -\infty} \| g \|_\gamma$) et de (42) on a alors :

$$\| \Psi - \Psi_{|\tau|} \| = \| \Psi - \Psi_{|\tau|} \|_\beta < \varepsilon. \tag{44}$$

Comme la norme (47) est invariante aux translations il résulte encore:

$$\| \Psi - \Psi_{-|\tau|} \| \leqslant \varepsilon, \tag{44'}$$

qui, avec (44), entraîne la F-presque-périodicité de Ψ par rapport à l'espace $F(R ; X)$.

Soit $\{ \varepsilon'_n \}$ une suite de nombres positifs convergente vers 0. Grâce à la définition 2.2, il résulte que pour chaque $\varepsilon'_n > 0$ il existe $L'(\varepsilon'_n) > 0$ et $\beta'_n \geqslant \alpha$ tels que chaque intervalle $(n, n + L')$ contienne au moins un point τ'_n avec la propriété :

$$\| f_{\tau'_n} - f \|_{\beta'_n} < \varepsilon'_n. \tag{45}$$

Puisque la suite τ'_n converge vers $+\infty$, il résulte qu'il existe une sous-suite $\{ \tau_n \}_{n \in N}$ telle que la suite correspondante des translatées de f, $\{ f_{\tau_n} \}_{n \in N}$ converge vers une fonction Ψ dans chaque espace $F_\beta(X)$. Ψ sera, en vertu des considérations faites ci-dessus, une fonction-F-presque-périodique au sens déjà mentionné.

Si on désigne par

$$\omega(x) = f(x) - \Psi(x), \text{ pour tout } x \in R_\alpha, \tag{46}$$

alors de la relation (45) on a :

$$\| \omega \|_\beta = \| f - \Psi \|_\beta \leqslant \| f_{\tau_n} - f \|_\beta + \| f_{\tau_n} - \Psi \|_\beta < \varepsilon_n + \| f_{\tau_n} - \Psi \|_{\beta_n}$$

lorsque $\beta \geqslant \beta_n$.

Si $n \to \infty$, on obtient :

$$\lim_{\beta \to \infty} \| \omega \|_\beta = 0. \tag{47}$$

Démontrons que la décomposition (46) est unique.

Supposons qu'il existeraient deux décompositions du type (46), donc on aurait :

$$f(x) = \Psi(x) + \omega(x) = \Psi'(x) + \omega'(x), \text{ pour tout } x \in R_\alpha,$$

d'où on obtient :

$$\Psi(x) - \Psi'(x) = \omega'(x) - \omega(x), \text{ pour tout } x \in R_\alpha.$$

Compte tenu des propriétés de Ψ il résulte :

$$\| \Psi - \Psi' \| = \| \Psi - \Psi' \|_\beta = \| \omega - \omega' \|_\beta \leqslant \| \omega \|_\beta + \| \omega' \|_\beta.$$

Si $\beta \to \infty$ dans la relation précédente, en vertu de (47), on obtient $\| \Psi - \Psi' \| = 0$, c'est-à-dire $\Psi = \Psi'$, donc la décomposition (46) est unique.

Enfin, démontrons que III) entraîne I).

Soit $f \in F_{c,\alpha}(X)$ avec la propriété de décomposition (29). Puisque Ψ de cette décomposition est la restriction à R_α d'une fonction F-presque périodique, il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $L > 0$, tel que

chaque intervalle de R de longueur L contienne au moins un point τ pour lequel :

$$\| \Psi - \Psi_\tau \| < \varepsilon/3.$$

Mais $\| \Psi - \Psi_\tau \| = \| \Psi_{-\tau} - \Psi \|$ d'où on obtient :

$$\| \Psi - \Psi_{|\tau|} \| < \varepsilon/3. \tag{48}$$

c'est-à-dire

$$\| \Psi - \Psi_{|\tau|} \|_\beta < \varepsilon/3 \text{ pour tout } \beta \in R. \tag{49}$$

D'autre part, de (47) il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe β suffisamment grand tel que :

$$\| \omega \|_\beta < \varepsilon/3. \tag{50}$$

Des relations (49) et (50), on voit que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\beta \geqslant \alpha$ et $L > 0$ tels que chaque intervalle de R_α, de longueur L contienne au moins un τ pour lequel on a :

$$\| f_{|\tau|} - f \|_\beta \leqslant \| \Psi_{|\tau|} - \Psi \|_\beta + \| \omega \|_\beta + \| \omega_{|\tau|} \|_\beta < \varepsilon,$$

ce qui assure que $f \in P_\alpha^\infty(X)$. Donc le théorème est complètement démontré.

Remarques. 1) Comme nous avons déjà vu, si $F_\alpha(X)$ est l'espace des fonctions définies sur la demi-droite R_α à valeurs dans un espace de Banach X, qui sont en même temps bornées par rapport à la norme de X, espace muni de la norme de la convergence uniforme, alors on obtient comme $P_\alpha^\infty(X)$ l'espace bien connu des fonctions a. p. p. à valeurs dans X.

En particulier, si $X = C$, on obtient les fonctions a. p. p. au sens de Fréchet.

2) Si comme $F_\alpha(X)$ on prend l'espace des fonctions localement p-intégrables ($p \geqslant 1$) sur R_α pour lesquelles :

$$\| f \|_{p,\alpha} = \left[\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T - \alpha} \int_\alpha^T | f(t) |^p \, dt \right]^{1/p} < \infty, \tag{51}$$

considéré comme un espace linéaire normé par (51), alors l'espace $P_\alpha^\infty(X)$ correspondant est l'espace de toutes les fonctions a. p. p. sur R_α dans la moyenne asymptotique d'ordre p ($p \geqslant 1$), introduit et étudié par nous dans [10].

BIBLIOGRAPHIE

1. Bertrandias J. P. — *Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p*, Bull. Soc. Math. France — Mémoire No. 5 (1966).
2. Besicovitch A. S. — *Almost periodic functions*, Cambridge Univ. Press, 1932.

3. Corduneanu C. — *Almost periodic functions*, John Wiley, New York, 1968.
4. Davis H. W. — *Stepanoff and Weyl a. p. functions on locally compact groups*, Duke Math. Journ. 34 (1967), p. 535—548.
5. Davis H. W. — *On completing the von Neumann almost periodic functions*, Duke Math. Journ. 35 (1968), p. 199—216.
6. Dunford N. and Schwartz J. T. — *Linear Operators*, I, *Interscience*, New York, 1958.
7. Gheorghiu N. — *Deux définitions des fonctions presque-périodiques continues à valeurs dans un espace vectoriel topologique*, An. şt. Univ. Iaşi, Matematică XV (1969), p. 329—334.
8. Neumann J. von — *Almost periodic functions in a group*, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), p. 445—492.
9. Precupanu A. — *Fonctions et suites asymptotiquement presque-périodiques avec des valeurs dans un espace de Banach*, An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, XV (1969), p. 29—38.
10. Precupanu A. — *Funcţii $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodice*, An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, XVI (1970), p. 279—287.
11. Eberlein W. F. — *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 67 (1949), p. 217—251.

FUNCŢII *F*-APROAPE PERIODICE ŞI *F*-ASIMPTOTIC APROAPE PERIODICE

Rezumat

În prima parte a lucrării se consideră un nou gen de funcţii aproape periodice, numite *F*-aproape periodice, care prin caracterul lor general permit o tratare unitară a principalelor tipuri cunoscute de funcţii a. p. cum ar fi : funcţiile a. p. în sens Bohr, în sens von Neumann, Stepanov, Weyl, Besicovitch, funcţiile $\mathfrak{M}^p$-a. p. etc.

Utilizînd teorema de punct fix a lui Kakutani [6], se indică pentru funcţiile *F*-a. p. o teoremă de existenţă şi unicitate a medici, ceea ce deschide posibilitatea dezvoltării unei analize armonice corespunzătoare acestor funcţii. În partea a doua a lucrării se introduc şi se studiază, în detaliu, funcţiile *F*-asimptotic aproape periodice care corespund în mod natural funcţiilor *F*-a. p. Se obţin drept cazuri particulare funcţiile a. a. p cu valori într-un spaţiu Banach şi funcţiile $\mathfrak{M}^p$-a. a. p. introduse în [10]