O METODĂ DE INTEGRARE ÎN RAPORT CU O MĂSURĂ DEFINITĂ PE UN SPAȚIU LOCAL COMPACT, CU VALORI ÎNTR-UN SPAȚIU LOCAL CONVEX

DE

RALUCA POLEXE

Teoria integrării în raport cu o măsură poate fi dezvoltată în două moduri, după definiția adoptată inițial pentru noțiunea de măsură. Primul mod folosește măsura ca funcție de mulțime, în timp ce al doilea pornește de la introducerea măsurii ca funcțională liniară. Deși echivalente datorită unei teoreme demonstrate de Riesz și extinse de Kakutani, fiecare dintre aceste căi prezintă avantajele sale.

Introducerea măsurii ca funcțională sau, mai general, ca operație liniară, permite construirea rapidă a spațiului funcțiilor integrabile. Alt avantaj al adoptării acestui punct de vedere rezidă în legătura sa cu teoria dualității în spațiile vectoriale topologice și analiza armonică pe grupuri local compacte. El permite și o tratare comodă a integrării pe spații omogene.

În această Notă se prezintă un aspect al integrării în raport cu o măsură definită pe un spațiu local compact, cu valori într-un spațiu local convex, ca operație liniară.

La început, se definește noțiunea de β-modul al unei măsuri majorate. Apoi se fac unele considerații privind integrarea în raport cu o familie de măsuri pozitive. Acestea conduc la construcția spațiului funcțiilor integrabile și a spațiului funcțiilor de putere p integrabilă.

1. Fie T un spațiu local compact, E un spațiu local convex cu topologia definită de familia filtrantă de seminorme $(|\cdot|_\alpha)_{\alpha\in\Gamma'}$, F un spațiu local convex separat și complet cu topologia definită de familia filtrantă și suficientă de seminorme $(|\cdot|_\beta)_{\beta\in\Gamma}$, iar $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ o aplicație între cele două familii de indici.

Considerăm spațiul $\mathcal{L}_\varphi(E, F)$ al aplicațiilor liniare și continue $S : E \to F$ astfel ca pentru orice $\beta \in \Gamma$,

$$|S|_\beta = \sup_{|x|_{\varphi(\beta)}<1} |Sx|_\beta < \infty.$$

înzestrat cu topologia local convexă generată de familia filtrantă și suficientă de seminorme $(|S|_\beta)_{\beta\in\Gamma}$. În această topologie $\mathcal{L}_\psi(E, F)$ este separat și complet [2, p. 286].

Fie $\mathcal{K}_E(T)$ spațiul funcțiilor $f: T \to E$, continue cu suport compact, pe care vom considera topologia local convexă generată de familia filtrantă de seminorme

$$\|f\|_\alpha = \sup_{t\in T} |f(t)|_\alpha, \quad \alpha \in \Gamma'.$$

Spațiul $K(T)$ (resp. $K_+(T)$) al funcțiilor cu valori reale (resp. pozitive) și proprietățile de mai sus este dotat cu topologia uniformă, definită de norma

$$\|f\| = \sup_{t\in T} |f(t)|.$$

Oricare ar fi compactul $K \subset T$, vom nota prin $\mathcal{K}_E(T, K)$ subspațiul lui $\mathcal{K}_E(T)$ format de acele funcții ce au suportul în K. Prin analogie cu definiția 2, [3, p. 21], avem:

Definiția 1. *Se numește măsură vectorială în raport cu spațiile local convexe E și F, orice aplicație liniară $m: \mathcal{K}_E(T) \to F$, a cărei restricție la fiecare dintre subspațiile $\mathcal{K}_E(T, K)$ este continuă oricare ar fi compactul $K \subset T$. Valoarea acestei aplicații în punctul $g \in \mathcal{K}_E(T)$ este integrala lui g în raport cu măsura m:*

$$\int g dm = m(g).$$

Deci m este o măsură vectorială în sensul definiției 1, dacă și numai dacă:

a) $m(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 m(g_1) + \lambda_2 m(g_2)$ pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ și orice $g_1, g_2 \in \mathcal{K}_E(T)$.

b) Pentru orice compact $K \subset T$ și orice $\beta \in \Gamma$, există $a_K^\beta > 0$ astfel ca să avem:

$$|m(f)|_\beta \leqslant a_K^\beta \|f\|_{\psi(\beta)}, \tag{1}$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{K}_E(T, K)$.

Introducem pentru oricare $\beta \in \Gamma$

$$\|m\|_\beta = \sup_{\|f\|_{\psi(\beta)}<1} |m(f)|_\beta \leqslant \infty. \tag{2}$$

Considerăm dualul F' al spațiului local convex F. F' este un spațiu polinormat [4, p. 60] și pentru orice $y' \in F'$, $y \in F$ și $\beta \in \Gamma$

$$\|y'\|_\beta = \sup_{|y|_\beta<1} |<y, y'>| \tag{3}$$

Teorema 1. *Dacă $m: \mathcal{K}_E(T) \to F$ este o măsură vectorială, atunci pentru orice $y' \in F'$, aplicația $y' \circ m: \mathcal{K}_E(T) \to R$ definită prin*

$$(y' \circ m)(f) = <m(f), y'>$$

este o măsură cu valori reale, iar pentru orice $\beta \in \Gamma$

$$\|y' \circ m\|_\beta \leqslant \|y'\|_\beta \|m\|_\beta \tag{4}$$

$$\|m\|_\beta = \sup_{\|y'\|_\beta<1} \|y' \circ m\|_\beta \tag{5}$$

Demonstrație. Aplicația compusă $y' \circ m$ satisface condiția de liniaritate, datorită liniarității componentelor sale.

Fie compactul $K \subset T$ și constanta $a_K^\beta > 0$ cu proprietatea (1) pentru orice $f \in \mathcal{K}_E(T, K)$. Rezultă pentru orice $\beta \in \Gamma$

$$|(y' \circ m)(f)| \leqslant \|y'\|_\beta |m(f)|_\beta \leqslant \|y'\|_\beta a_K^\beta \|f\|_{\psi(\beta)},$$

adică restricția lui $y' \circ m$ la spațiul $\mathcal{K}_E(T, K)$ este continuă. Cum compactul K este oarecare, urmează că $y' \circ m$ satisface a) și b) și deci este o măsură. În plus obținem

$$\|(y' \circ m)(f)| \leqslant \|y'\|_\beta \|m\|_\beta \|f\|_{\psi(\beta)}$$

care implică (4).

Relația (5) rezultă din (2), astfel:

$$\|m\|_\beta = \sup_{\|f\|_{\psi(\beta)}<1} \sup_{\|y'\|_\beta<1} |<m(f), y'>| =$$

$$= \sup_{\|y'\|_\beta<1} \sup_{\|f\|_{\psi(\beta)}<1} |(y' \circ m)(f)| = \sup_{\|y'\|_\beta<1} \|y' \circ m\|_\beta.$$

Fie acum o măsură cu valori reale $m: \mathcal{K}_E(T) \to R$. Pentru orice $\beta \in \Gamma$, definim funcționala $\mu_\beta: \mathcal{K}_+(T) \to R$, prin:

$$\mu_\beta(\varphi) = \sup_{|f|_{\psi(\beta)}<\varphi,\, f\in\mathcal{K}_E(T)} |m(f)|. \tag{6}$$

Ea satisface evident,

$$0 \leqslant \mu_\beta(\varphi) < +\infty \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}_+(T) \text{ și}$$

$$|m(f)| \leqslant \mu_\beta(|f|_{\psi(\beta)}) \text{ pentru orice } f \in \mathcal{K}_E(T).$$

Mai departe, vom folosi, adaptate la cazul de față, următoarele rezultate din [2, p. 48].

Lemă. *Fie $h \in \mathcal{K}_E(T)$ și $g \in \mathcal{K}_+(T)$, astfel ca pentru orice $\alpha \in \Gamma'$, $0 \leqslant g \leqslant |h|_\alpha$. Atunci funcțiile:*

$$\sigma_h^\alpha = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{|h(t)|_\alpha} & \text{dacă } |h(t)|_\alpha \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } |h(t)|_\alpha = 0 \end{cases}$$

satisfac, oricare ar fi $\alpha \in \Gamma'$,

$$\sigma_h^\alpha |h|_\alpha = h \text{ și } \sigma_h^\alpha g \in \mathcal{K}_E(T).$$

Teoremă. *Oricare ar fi* $\beta \in \Gamma$, *funcționala* μ_β *definită prin* (6) *se poate prelungi în mod unic la o măsură pozitivă pe* T, *notată în continuare* μ_β, *care este minimă printre măsurile pozitive* ν_β *cu proprietatea că pentru orice* $f \in \mathcal{K}_E(T)$

$$|m(f)| \leqslant \nu_\beta(|f|_{\psi(\beta)}). \tag{7}$$

Demonstrațiile nu comportă dificultăți, singura deosebire față de cele date în [2] constînd în înlocuirea normei prin seminorma de un anumit indice.

Definiția 2. *Cea mai mică măsură pozitivă, care satisface pentru orice* $f \in \mathcal{K}_E(T)$ *și un indice fixat, arbitrar,* $\beta \in \Gamma$, *inegalitatea (7) se numește* β*-modul al măsurii cu valori reale* m.

În continuare, vom extinde această noțiune pentru anumite măsuri vectoriale.

Definiția 3. *O măsură vectorială* m ; $\mathcal{K}_E(T) \to F$ *se numește majorată dacă există o familie de măsuri pozitive* $(\nu_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ *astfel încît pentru orice* $\beta \in \Gamma$ *să avem :*

$$|m(f)|_\beta \leqslant \nu_\beta(|f|_{\psi(\beta)}). \tag{8}$$

Teorema 2. *Orice măsură cu valori reale* $m : \mathcal{K}_E(T) \to R$ *este majorată de familia* $(\mu_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ *a* β*-modulelor sale.*

Demonstrația este imediată. În adevăr, familia β-modulelor este compusă din măsuri pozitive care satisfac (7) pentru orice $\beta \in \Gamma$.

Teorema 3. *Dacă* $m : \mathcal{K}_E(T) \to F$ *este o măsură majorată, atunci există o familie de măsuri pozitive* $\mathcal{F} = (\mu_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ *cu caracter minimal relativ la inegalitatea* (8) *considerată pentru orice* $\beta \in \Gamma$. *În plus,*

$$\|m\|_\beta \leqslant \|\mu_\beta\|.$$

Demonstrație. Fie $(\nu_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ familia de măsuri pozitive care majorează m. Atunci, pentru orice $f \in \mathcal{K}_E(T)$ și $\beta \in \Gamma$ este îndeplinită inegalitatea (8).

Considerînd $y' \in F'$, construim măsura cu valori reale din teorema 1, adică $y' \circ m : \mathcal{K}_E(T) \to R$, satisfăcînd (4) și (5).

Oricare ar fi $f \in \mathcal{K}_E(T)$ obținem :

$$|(y' \circ m)(f)| \leqslant \|y'\|_\beta \, |m(f)|_\beta \leqslant \|y'\|_\beta \, \nu_\beta(|f|_{\psi(\beta)})$$

pentru orice $\beta \in \Gamma$, ceea ce arată că măsura cu valori reale $y' \circ m$ este majorată de familia $(\|y'\|_\beta \, \nu_\beta)_{\beta\in\Gamma}$. Cum ea este majorată și de familia β-modulelor sale $(\|y' \circ m\|_\beta)_{\beta\in\Gamma}$, care însă are caracter minimal, rezultă că oricare ar fi $y' \in F'$ și $\beta \in \Gamma$, avem :

$$\|y' \circ m\|_\beta \leqslant \|y'\|_\beta \, \nu_\beta .$$

Fixînd acum $\beta \in \Gamma$, familia de măsuri pozitive $(\|y' \circ m\|_\beta)_{y'\in F'}$ este majorată. Deoarece spațiul măsurilor reale este complet reticulat [3, p. 55], există marginea superioară a acestei familii, fie ea $\mu_\beta : \mathcal{K}(T) \to R$. Rezultă pentru orice $y' \in F'$ cu $\|y'\|_\beta \leqslant 1$:

$$\|y' \circ m\|_\beta \leqslant \mu_\beta \leqslant \nu_\beta .$$

Oricare ar fi $f \in \mathcal{K}_E(T)$ avem (8) și

$$|m(f)|_\beta = \sup_{\|y'\|_\beta \leqslant 1} |\langle m(f), y' \rangle| = \sup_{\|y'\|_\beta \leqslant 1} |(y' \circ m)(f)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|y'\|_\beta \leqslant 1} \|y' \circ m\|_\beta (|f|_{\psi(\beta)}) \leqslant \mu_\beta(|f|_{\psi(\beta)}).$$

Cînd β parcurge Γ, se obține familia $\mathcal{F} = (\mu_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ care majorează măsura m. Cum pentru orice $\beta \in \Gamma$, $\mu_\beta \leqslant \nu_\beta$, ea are caracter minimal.

În sfîrșit,

$$\|m\|_\beta = \sup_{\|f\|_{\psi(\beta)} \leqslant 1} |m(f)|_\beta \leqslant \sup_{\|f\|_{\psi(\beta)} \leqslant 1} \mu_\beta(|f|_{\psi(\beta)}) = \|\mu_\beta\|,$$

ceea ce demonstrează complet teorema.

Definiția 4. *Cea mai mică măsură pozitivă care satisface inegalitatea (8) se numește* β*-modul al măsurii majorate* m.

Familia de măsuri pozitive $\mathcal{F} = (\mu_\beta)_{\beta\in\Gamma}$, asociată unei măsuri majorate, ne va permite construirea spațiului funcțiilor integrabile în raport cu o astfel de măsură.

Fie $\mu : \mathcal{K}(T) \to R$ o măsură pozitivă, și μ^* prelungirea sa la clasa funcțiilor pozitive definite pe T.

Oricare ar fi aplicația $f : T \to E$ și oricare ar fi $\alpha \in \Gamma'$ funcția $|f|_\alpha : T \to R$, dată prin $t \to |f(t)|_\alpha$ este pozitivă.

Vom considera spațiul

$$\mathcal{F}_E^P(T, \mu) = \{f : f : T \to E, N_P^\alpha(f, \mu) < \infty \text{ pentru orice } \alpha \in \Gamma'\} \tag{9}$$

înzestrat cu topologia local convexă definită de familia de seminorme : $(N_P^\alpha)_{\alpha\in\Gamma'}$, $(1 \leqslant P < +\infty)$

$$N_P^\alpha(f, \mu) = \left[\int^* |f|_\alpha^P \, d\mu\right]^{\frac{1}{P}}. \tag{10}$$

Deoarece $f \in \mathcal{K}_E(T)$ implică $|f|_\alpha^P \in \mathcal{K}(T)$ și

$$\int^{*} |f|_{\alpha}^{P} d\mu = \int |f|_{\alpha}^{P} d\mu < \infty,$$

rezultă imediat $\mathcal{K}_E(T) \subset \mathcal{F}_E^P(T, \mu)$.

Vom însemna prin $\mathcal{L}_E^P(T, \mu)$ închiderea spațiului $\mathcal{K}_E(T)$ în $\mathcal{F}_E^P(T, \mu)$.

Definiția 5. *Funcțiile din spațiul $\mathcal{L}_E^P(T, \mu)$ se numesc funcții de putere P μ-integrabilă, iar cele din spațiul $\mathcal{L}_E^1(T, \mu)$ se numesc funcții μ-integrabile.*

Avem deci construit spațiul funcțiilor integrabile și cel al funcțiilor de putere P integrabilă, $1 \leqslant P < +\infty$, în raport cu o măsură pozitivă.

Cu acestea, putem trece la construirea spațiului funcțiilor integrabile în raport cu o familie de măsuri pozitive.

Fie $m : \mathcal{K}_E(T) \to F$ o măsură majorată și $\mathcal{F} = (\mu_\beta)_{\beta \in \Gamma}$ familia β-modulelor sale. Oricare ar fi $\beta \in \Gamma$, avem:

$$\mathcal{K}_E(T) \subset \mathcal{F}_E^1(T, \mu_\beta).$$

Considerăm spațiul:

$$\mathcal{F}_E^1(T, F) = \bigcap_{\beta \in \Gamma} \mathcal{F}_E^1(T, \mu_\beta)$$

înzestrat cu topologia local convexă cea mai puțin fină dintre topologiile τ_β induse de $\mathcal{F}_E^1(T, \mu_\beta)$, $\beta \in \Gamma$, notată cu τ. Ea este generată de familia de seminorme:

$$N_1^\beta(f, \mu_\beta) = \int^{*} |f|_{\psi(\beta)} d\mu_\beta, \quad \beta \in \Gamma.$$

Închiderea lui $\mathcal{K}_E(T)$ în acest spațiu va fi notată cu $\mathcal{L}_E^1(T, \mathcal{F})$.

Dacă $g \in \mathcal{K}_E(T)$, scriind (7) pentru μ_β, avem pentru orice $\beta \in \Gamma$:

$$\left|\int g dm\right|_\beta \leqslant \int |g|_{\psi(\beta)} d\mu_\beta.$$

Cum $|g|_{\psi(\beta)} \in \mathcal{K}_+(T)$, oricare ar fi $\beta \in \Gamma$:

$$N_1^\beta(g, \mu_\beta) = \int |g|_{\psi(\beta)} d\mu_\beta.$$

Rezultă pentru orice $\beta \in \Gamma$:

$$\left|\int g dm\right|_\beta \leqslant N_1^\beta(g, \mu_\beta),$$

ceea ce indică faptul că aplicația liniară $g \to \int g dm$, a lui $\mathcal{K}_E(T)$ în F, este continuă. Atunci ea se poate prelungi unic, cu păstrarea continuității la întreg spațiul $\mathcal{L}_E^1(T, \mathcal{F})$. Pentru prelungire se va folosi aceeași notație.

Definiția 6. *Funcția $f : T \to E$ este integrabilă în raport cu măsura majorată $m : \mathcal{K}_E(T) \to F$, dacă $f \in \mathcal{L}_E^1(T, \mathcal{F})$. Valoarea prelungirii aplicației $g \to \int g dm$ în punctul $f \in \mathcal{L}_E^1(T, F)$, este prin definiție, integrala lui f în raport cu m.*

Astfel,

$$\mathcal{L}_E^1(T, m) = \mathcal{L}_E^1(T, \mathcal{F})$$

și

$$\int f dm = \lim_{g \to f} \int_{g \in \mathcal{K}_E(T)} g dm.$$

Analog, se obțin spațiile funcțiilor de putere P integrabilă, în raport cu o măsură majorată,

$$\mathcal{L}_E^P(T, m) = \mathcal{L}_E^P(T, \mathcal{F}).$$

Din construcție, rezultă direct

Observația 1. Spațiul $\mathcal{K}_E(T)$ este dens în fiecare dintre spațiile $\mathcal{L}_E^P(T, m)$, $1 \leqslant P < \infty$.

Observația 2. $\mathcal{L}_E^P(T, m) = \bigcap_{\beta \in \Gamma} \mathcal{L}_E^P(T, \mu_\beta)$.

În adevăr, pentru orice $\beta \in \Gamma$ avem

$$\mathcal{K}_E(T) \underset{\beta \in \Gamma}{\subset} \mathcal{L}_E^P(T, \mu_\beta) \subset \mathcal{F}_E^P(T, \mu_\beta),$$

ceea ce implică

$$\mathcal{K}_E(T) \subset \bigcap_{\beta \in \Gamma} \mathcal{L}_E^P(T, \mu_\beta), \tag{11}$$

ultimul spațiu fiind dotat cu topologia τ, mai puțin fină decît oricare topologie τ_β. Considerînd închiderile spațiilor din cei doi membri din (11) în sensul topologiei τ, obținem:

$$\mathcal{L}_E^P(T, m) \subset \bigcap_{\beta \in \Gamma} \mathcal{L}_E^P(T, \mu_\beta). \tag{12}$$

Deoarece pentru orice $\beta \in \Gamma$, topologia lui $\mathcal{F}_E^P(T, \mu_\beta)$ este mai fină decît topologia τ,

$$\overline{\mathcal{K}_E(T)}^{\tau_\beta} \subset \overline{\mathcal{K}_E(T)}^{\tau} = \mathcal{L}_E^P(T, m),$$

adică

$$\mathcal{L}_E^P(T, \mu_\beta) \subset \mathcal{L}_E^P(T, m),$$

ceea ce implică

(13) $$\bigcap_{\beta\in\Gamma} \mathcal{L}_E^P(T, \mu_\beta) \subset \mathcal{L}_E^P(T, m).$$

Relațiile (12) și (13) demonstrează afirmația

Teorema 4. *Fie $\mathcal{B}$ semitributul părților boreliene relativ compacte ale lui T. Spațiul $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ al funcțiilor boreliene etajate este dens în fiecare spațiu $\mathcal{L}_E^P(T, m)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Într-adevăr, datorită unui rezultat din [3, p. 148], care se poate adapta cu ușurință în cazul de față, $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ este dens în fiecare spațiu $\mathcal{L}_E^P(T, \mu_\beta)$, încît rezultă $\mathcal{E}_E(\mathcal{B})$ dens și în $\mathcal{L}_E^P(T, m)$, pentru orice P, $1 \leqslant P < \infty$.

Spațiul $\mathcal{L}_E^1(T, m)$ construit aici coincide cu spațiul funcțiilor integrabile în raport cu o măsură regulată, cu variație finită $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_\psi(E, F)$ ([2], p. 287).

După cum s-a văzut în tratarea problemei ce face obiectul acestei Note, un rol important este jucat de noțiunea de β-modul al unei măsuri majorate, care apare cu rol analog β-variației unei măsuri definite ca funcție de mulțime, în procesul de integrare în raport cu aceasta.

Menționăm că metoda de construire a spațiului $\mathcal{L}_E^P(T, m)$ apare în mod natural, dacă se ține seamă de teorema de reprezentare a operațiilor liniare ψ-majorate, $U : \mathcal{K}_E(T) \to F$ [2, p. 290].

BIBLIOGRAFIE

1. Costinescu O. — *Elemente de topologie generală*, Editura tehnică, București 1969.
2. Dinculeanu N. — *Teoria măsurii și funcții reale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1964.
3. Dinculeanu N. — *Integrarea pe spații local compacte*, Editura Academiei R. P. R., București, 1965.
4. Marinescu G. — *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*, Editura Academiei R. P. R., București, 1959.

UNE MÉTHODE D'INTEGRATION PAR RAPPORT A UNE MESURE DÉFINIE SUR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT, A VALEURS DANS UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE

Résumé

Dans cette Note on donne une méthode de construction de l'espace des fonctions intégrables par rapport à une mesure définie sur un espace localement compact, à valeurs dans un espace localement convexe. A ce but on utilise la méthode de Bourbaki qui considère les mesures vectorielles comme opérateurs linéaires.

Par l'introduction de la notion de β-module d'une mesure majorée, on obtient une famille de mesures positives, qui permet la construction immédiate de l'espace des fonctions intégrables par rapport à cette mesure.

A SYSTEM OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS ARISING IN THE THEORY OF SUPERFLUIDITY [1])

BY

R. K. MILLER

1. Introduction. Suppose the region between two concentric infinite cylinders is filled with liquid helium. If the cylinders are rotated to set up a radial flow, this flow should eventually become steady. The purpose here is to prove this by studying the details of the flow at the boundaries. This will be accomplished by reducing the problem to a system of two nonlinear Volterra integral equations. C. C. Lin's [1] formulation of the boundary conditions for superfluid flow will be used.

If the velocity components of the flow in cylindrical coordinates are initially of the form $u_r = u_z \equiv 0$, $u_\theta = F(r)$ at $t=0$, then for $t > 0$ the (nonlinear) flow equations reduce to $u_r = u_z \equiv 0$ and $u_\theta = u(t, r)$ where $u(t, r)$ is the solution of the initial-boundary value problem

(1.1) $$u_t = L(u) = \nu\{u_{rr} + (1/r)u_r - (1/r^2)u\},$$

for $t > 0$ and $r_1 < r < r_2$, where $0 < r_1 < r_2 < \infty$,

(1.2) $$u(0, r) = F(r), \quad r_1 < r < r_2,$$

and

(1.3) $$u_r(t, r_j) = (-1)^{j+1} g_j(u(t, r_j) - \Omega_j(t)), \quad j = 1, 2 \text{ and } t > 0,$$

where $g_j(u) = k_j u^3$, $\nu, k_j > 0$ and Ω_j is the speed of the cylinder located at $r = r_j$. It is assumed that $\Omega_j(t) \to \Omega_j$ as $t \to \infty$ where $\Omega_j \geqslant 0$.

This problem will be reduced to an equivalent system of nonlinear integral equations for the boundary velocities $u_1(t) = u(t, r_1)$ and $u_2(t) = u(t, r_2)$. This system can be written in matrix-vector notation as

[1]) This research was supported by the National Science Foundation of the United States of America under Grant No. GP-31184 x.