14. Rossi, F. S. — *Il metodo di Mangeron nella risoluzione di certe equazioni alle derivate totali di Picone*, „Bull. Polytech. Inst. Jassy", New series, 12 (16), 17–24 (1965).
15. Oğuztöreli, M. N. — *Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron: I–II*, „Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat.", ser. VIII, 56 (1972). (In press).
16. Oğuztöreli, M. N. — *Sur le problème de Goursat pour une équation de Mangeron d'ordre supérieur: I–II*, „Bulletin de l'Académie Royale des Science de Belgique", Serie 5, Vol. 58 (1962). (In prees).

O PROBLEMĂ MIXTĂ PRIVITOARE LA O ECUAȚIE POLIVIBRANTĂ A LUI MANGERON

Rezumat

După apariția acum 40 de ani a primelor lucrări ale lui D. Mangeron [1], mai mulți cercetători și-au consacrat studiile lor diferitelor probleme de contur și la limită privitoare la ecuații polivibrante, introduse în literatura de specialitate de acest autor [6]–[9], [11]–[16].

În această lucrare se studiază o nouă problemă mixtă referitoare la o ecuație polivibrantă de ordin superior a lui Mangeron.

DUAL SERIES EQUATIONS ASSOCIATED WITH BESSEL AND HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

BY

R. K. SAXENA, P. L. SETHI and P. K. BANERJI

1. Introduction. The present paper considers the determination of coefficients A_n in the dual series equations involving Bessel and hypergeometric functions. The application of fractional integration operators due to Saxena [3] and Erdélyi [1], transforms the given dual series equations into those involving the same Bessel function. Finally the unknown coefficients A_n are determined by the application of orthogonal property of Bessel functions. The approach made for the solution in the text is believed to be new and the analysis is purely formal.

The dual series equations to be discussed here are as follows:

$$(1.1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ \nu+n+1\,;\\ \nu+1\,;\end{matrix}\ x^2/z^2\right] J_\nu(x) = f(x):\ 0 < x \leqslant 1,$$

$$(1.2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ \nu-n+2\,;\\ \nu+2n+2\,;\end{matrix}\ z^2/x^2\right] J_\nu(x) = g(x);\ x > 1.$$

where $J_\nu(x)$ is the ordinary Bessel function of order ν. $f(x)$ and $g(x)$ are known functions, while A_n is an unknown coefficient.

2. Fractional Integration Operators. In the present analysis the following results are used:

Saxena [3, p. 228] has introduced the following operators of fractional integration

$$(2.1)\quad \mathcal{I}[f(x)] = \mathcal{I}[\alpha, \beta, \nu, m : f(x)] = \frac{2x^{-\nu-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\ \beta+m\,;\\ \beta\,;\end{matrix}\ t^2/x^2\right] t^\nu f(t)\,dt$$

and

$$(2.2)\quad \mathcal{R}[f(x)] = \mathcal{R}[\alpha,\beta,\nu,m : f(x)] = \frac{x^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\ \beta+m\ ; \\ \beta\ ;\end{matrix}\ x^2/t^2\right] t^{-\delta-1} f(t)\, dt.$$

provided $\mathrm{Re}\,(1-\alpha) > m$. $\mathrm{Re}\,(\nu) > -1/q$, $\mathrm{Re}\,(\delta) > -1/p$, $1/p + 1/q = 1$. $\beta \neq 0, -1, -2 \ldots\ldots m = 0, 1, 2 \ldots\ldots$ and $f(x) \in L_p(0, \infty)$.

E r d é l y i [1. p. 220] has introduced the following operators

$$(2.3)\quad \mathcal{J}^*[\alpha,\ \beta : \mu : w(x)] = \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} x^{-\mu\alpha+\mu-\beta-1} \int_0^x (x^{\mu} - v^{\mu})^{\alpha-1} v^{\beta} w(v)\, dv.$$

$$(2.4)\quad \mathcal{R}^*[\alpha,\ \beta : \mu : w(x)] = \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta} \int_x^{\infty} (v^{\mu} - x^{\mu})^{\alpha-1} v^{-\beta-\mu\alpha+\mu-1} w(v)\, dv,$$

provided $w(x) \in L_p\,(0, \infty)$, $p \geqslant 1$, $\alpha > 0$, $\beta > (1-p)/p$ and $\mu > 0$.

Generalization of Sonine's first formula due to T r a n t e r [4, p. 97] is

$$(2.5)\quad J_{\nu+2r+1}(z) = \frac{z^{-\nu-1}\Gamma(\nu+r+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(r+1)} \int_0^z J_{\nu}(x) x^{\nu-1} {}_2F_1\left[\begin{matrix}-r,\ \nu+r+1\ ; \\ \nu+1\ ;\end{matrix}\ x^2/z^2\right] dx,$$

where $\mathrm{Re}(\nu) > -1$, which can be expressed as

$$\mathcal{J}[J_{\nu}(x)] = \mathcal{J}[-r,\ \nu+1,\ \nu-1,\ r : J_{\nu}(x)] =$$

$$(2.6)\quad = \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(\nu+r+1)} 2zJ_{\nu+2r+1}(z).$$

Generalization of Sonine's second formula is

$$(2.7)\quad J_{\nu+2r+1}(z) = \frac{2^{4r+2}z^{\nu+2r+1}\Gamma(3r+\nu+2)}{\Gamma(-3r-1)\,\Gamma(2r+\nu+2)}.$$

$$\int_z^{\infty} x^{1-\nu+2r} J_{\nu}(x)\,(x^2 - z^2)^{-4r-2} {}_2F_1\left[\begin{matrix}-r,\ \nu-r+2\ ; \\ 2r+\nu+2\ ;\end{matrix}\ z^2/x^2\right] dx,$$

provided $r = 0, 1 \ldots\ldots$, $z > 0$, $\mathrm{Re}[(\nu) + 2r + 5/2] > 0$; further it can be expressed as

$$\mathcal{R}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{(x^2-z^2)^{4r+2}}\right] = \mathcal{R}\left[-r,\ \nu+2r+2,\ \nu-2r-2,\ -3r : \frac{J_{\nu}(x)}{(x^2-z^2)^{4r+2}}\right] =$$

$$(2.8)\quad = \frac{\Gamma(-3r-1)\,\Gamma(2r+\nu+2)\,J_{\nu+2r+1}(z)}{\Gamma(1+r)\,\Gamma(2r+\nu+2)\,2^{4r+1}z^{4r+3}}.$$

The orthonormality of Bessel functions [3. p. 291] is given by :

$$(2.9)\quad \int_0^{\infty} z^{-1} J_{\nu+2r+1}(z)\, J_{\nu+2m+1}(z)\, dz = 0\ ; \qquad m \neq r,$$

$$= (4r + 2\nu + 2)^{-1}\ ;\ m = r,$$

provided $\mathrm{Re}[\nu + r + m] > -1$.

3. Solution of the equations. Applying the operators defined in (2.6) and (2.8) to (1.1) and (1.2) and also using (2.3) and (2.4), we get

$$(3.1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{\nu+2r+1}(z) = \frac{z^{-1}\Gamma(\nu+r+1)}{2\Gamma(r+1)\,\Gamma(\nu+1)} \mathcal{J}^*[1,\ \nu-1 : 2 : f(z)]\ ; 0 < x \leqslant 1$$

$$= (2/z)^{4r+1} \frac{\Gamma(3r+\nu+2)\,\Gamma(-4r-1)}{\Gamma(-3r-1)\,\Gamma(2r+\nu+2)} \mathcal{R}^*[-4r-1,\ 6r+\nu+2 : 2 : g(z)]\ ; x > 1.$$

Further, the application of (2.9) yields the formal solution as

$$A_n = (\nu + 4r + 2)\left\{\frac{\Gamma(\nu+r+1)}{2\Gamma(r+1)\,\Gamma(\nu+1)} \int_0^1 z^{-2} J_{\nu+2r+1}(z)\, \mathcal{X}_1(z)\, dz\ + \right.$$

(3.2)

$$\left. + \frac{2^{4r+1}\,\Gamma(3r+\nu+2)\,\Gamma(-4r-1)}{\Gamma(-3r-1)\,\Gamma(\nu+2r+2)} \int_1^{\infty} z^{-4r-2} J_{\nu+2r+1}(z)\, \mathcal{X}_2(z)\, dz\right\},$$

where

$$(3.3)\quad \mathcal{X}_1(z) = \mathcal{J}^*[1,\ \nu-1 : 2 : f(z)].$$

$$(3.4)\quad \mathcal{X}_2(z) = \mathcal{R}^*[-4r-1,\ 6r+\nu+2 : 2 : g(z)].$$

4. Particular cases. (i) For $r=0$, the formal solution of the series

$$(4.1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{\nu}(x) = f(x) \text{ if } 0 < x \leqslant 1 \text{ and}$$

$$(4.2)\quad = g(x) \text{ if } x > 1$$

is given by

$$A_n = (2\nu + 2)\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 z^{-2} J_{\nu+1}(z)\, \mathcal{J}^*[1,\ \nu-1 : 2 : f(z)]\, dz\ + \right.$$

(4.3)

$$\left. + 2\int_1^{\infty} z^{-2} J_{\nu+1}(z)\, \mathcal{R}^*[-1,\ \nu+2 : 2 : g(z)]\, dz\right\}.$$

(ii) For $r = 0$ and $\nu = -1/2$, the formal solution of cosine dual series

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = f(x) \text{ of } 0 < x \leqslant 1 \text{ and } = g(x) \text{ if } x > 1, \tag{4.4}$$

is given by

$$A_n = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ \int_0^1 z^{-5/2} \sin z\, \mathcal{I}^{*} [1, -3/2 : 2 : f(z)]\, dz + \right. \\ \left. + \frac{(2)^{3/2}}{(\pi)^{1/2}} \int_1^{\infty} z^{-5/2} \sin z\, \mathcal{R}^{*} [-1, 3/2 : 2 : g(z)]\, dz \right\}. \tag{4.5}$$

Department of Mathematics
University of Jodpur
Jodpur — India

REFERENCES

1. Erdélyi A. et al. — *On some fractional transformations.* Univ. Politec. Torino Rend. Sem. Mat. 10 (1950—51), 217—234.
2. Luke Y. L. — *Integrals of Bessel Functions*, McGraw-Hill, New York (1962).
3. Saxena R. K. — *On fractional integration operators*, Math. Z. 96 (1967), 228—231.
4. Tranter, C. J. — *A generalization of Sonine's first finite integral.* Proc. Glasgow Math. Assoc. 6, 2 (1963), 97.

ECUAȚII ȘI SERII DUALE ASOCIATE CU FUNCȚII BESSEL ȘI HIPERGEOMETRICE

Rezumat

Articolul se ocupă de determinarea coeficienților A_n în seriile (1.1) și (1.2) de funcții Bessel și hipergeometrice. În scopul acestei determinări se utilizează operatorii de integrare fracționară introduși de Saxena și Erdelyi.

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ КОНУСОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. П. САФАРЯН

1. В настоящей работе изучаются однопараметрические многообразия невырожденных конусов второго порядка n-мерного проективного пространства P_n.

Однопараметрические многообразия конусов в трехмерном пространстве P_3 изучались ранее Римером [1]. От работы Римера настоящая работа отличается не только размерностью пространства, но и использованием инвариантных методов, развитых в работе [2], что позволило получить ряд новых дополнительных результатов.

Для изучения многообразия конусов, используется отображение этого многообразия на алгебраическую гиперповерхность пространства P_N, где $N = (n+1)(n+2)/2 - 1$, подробно рассмотренное в работе [3]. Затем строится инвариантное оснащение однопараметрического многообразия конусов. Это оснащение позволило построить ряд тензоров, связанных с многообразием конусов внутренним образом и выяснить их геометрический смысл. Рассматриваются также геометрические образы, определяемые этими тензорами, связанные с многообразием конусов.

2. В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим однопараметрическое многообразие V невырожденных конусов второго порядка с точечными вершинами. Предположим, что вершина образующего конуса K многообразия V описывает некоторую линию L. Если поместить точку A_0 подвижного репера $(A_0 A_1 \ldots A_n)$ в вершину конуса K, то его уравнение примет вид

$$a_{ij}\, x^i x^j = 0, \tag{1}$$