(iii) (X, τ, τ') *is transitive quasi-uniformizable.*

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii). If τ is zero dimensional with respect to τ', then for each $x \in X$ and for each $D \in \tau$ containing x, there exists a τ-open and τ'-closed set G such that $x \in G \subset D$. It is clear that the characteristic function on G is τ-l.s.c. and τ'-u.s.c., and satisfies the conditions $f(x) = 1$ and $f(X - D) = 0$. The proof of the other part of the theorem is analogous.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). If we denote $\tau_D = \{0, D, X\}$, by using our hypotheses it results that $\tau = \sup\{\tau_D ; D\ \tau\text{-open and } \tau'\text{-closed}\}$ and $\tau' = \sup\{\tau_{X-D}; D\ \tau\text{-open and } \tau'\text{-closed}\}$. Since τ_D and τ_{X-D} are conjugate topologies, it follows by Lemma 5 that (X, τ, τ') is transitive quasi-uniformizable.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Let (X, τ, τ') be transitive quasi-uniformizable. Since, by Lemma 5, $\tau = \sup\{\tau_i ; i \in I\}$ and $\tau' = \sup\{\tau'_i ; i \in I\}$, where for each $i \in I$ the principal topologies τ_i and τ'_i are conjugate, it follows immediately that τ has a base of τ'-closed sets and τ' has a base of τ-closed sets. Therefore (X, τ, τ') is pairwise zero dimensional.

Corollary 2. *A pairwise zero dimensional space is pairwise completely regular* [8, p. 63].

REFERENCES

1. Alexandroff, P. — *Sur les espaces discrets*, C.R. Acad. Sci. Paris, 200, 1649—1651 (1935).
2. Fletcher, P. — *Finite topological spaces and quasi-uniform structures*, Canad. Math. Bull., 12, 771—775 (1969).
3. — *On completeness of quasi-uniform spaces*, Arch. Math., 22, 200—204 (1971).
4. — and W. F. Lindgren — *Transitive quasi-uniformities*, J. Math. Anal. Appl., 39, 397—405, (1972).
5. Kelly, J. C. — *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc. 13, 71—89 (1963).
6. Lorrain, F. — *Notes on topological spaces with minimum neighbourhoods*, Amer. Math. Monthly, 76, 616—627 (1969).
7. Monna, A. F. — *Remarques sur les métriques non-archimédiennes*, I—II, MR 12, p. 41 (1951).
8. Murdeshwar, M. G. and S. A. Naimpally — *Quasi-uniform topological spaces* Noordhoff, Groningen (1966).
9. Reilly, I. L. — *On generating quasi-uniformities*, Math. Ann., 189, 317—318 (1970).
10. — *Zero dimensional bitopological spaces*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 76, 127—131 (1973).
11. Rooij, A. C. M. van — *The lattice of all topologies is complemented*, Canad. J. Math. 20, 805—807 (1968).
12. Sharp, H. — *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math. Soc., 17, 1344—1349 (1966).
13. Steiner, A. K. — *The lattice of topologies*, Trans. Amer. Math. Soc. 122, 379—398 (1966)

CVASI-UNIFORMITĂȚI TRANZITIVE ȘI SPAȚII BITOPOLOGICE ZERO-DIMENSIONALE

Rezumat

În Notă sînt date mai multe caracterizări ale noțiunilor de cvasi-uniformitate tranzitivă [3] și spațiu bitopologic reciproc zero-dimensional [10]. Rezultatul principal stabilește o legătură între aceste noțiuni: un spațiu bitopologic este reciproc zero-dimensional dacă și numai dacă el este tranzitiv cvasi-uniformizabil.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

THÉORÈMES GLOBAUX DANS LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE-BANACH

PAR

AUREL BEJANCU

Soient B un ensemble et P une classe de bijections de B qui agit de façon simplement transitive sur B, c'est-à-dire, pour tout $x, y \in B$ il existe un élément unique $f \in P$ tel que $f(x) = y$.

Théorème 1. *B est un groupe ayant P comme ensemble des translations à gauche, si et seulement si, pour tout $f, g \in P$ on a $f \circ g \in P$.*

Démonstration. Si B est un groupe, alors il est clair que la composition de deux translations à gauche est une translation à gauche. Réciproquement, nous supposons que P vérifie la condition énoncée dans le théorème, et fixons un point $e \in B$. Pour tout $x \in B$ il existe $f_x \in P$ tel que $f_x(e) = e$. Nous définissons l'application

$$(1) \qquad \pi : B \times B \to B : \pi(x, y) = (f_x)^{-1}(y) \quad \forall (x, y) \in B \times B.$$

Il est aisé de voir que $\pi(x, e) = x$ et $\pi(x, x_*) = e$ où $x_* = f_x(e)$.
On a: $f_{\pi(x,y)}(\pi(x, y)) = (f_y \circ f_x)(\pi(x, y)) = e$. En tenant compte que P agit simplement transitif sur B on déduit

$$f_{\pi(x,y)} = f_y \circ f_x \qquad \forall (x, y) \in B \times B,$$

c'est-à-dire, la loi de composition π est associative, q.e.d.

Si B est une C^α-variété modelée par l'espace de Banach E, alors nous obtenons le

Théorème 2. *La classe de bijections P détermine sur B une structure de groupe de Lie-Banach ayant P comme ensemble des translations à gauche, si et seulement si, sont vérifiées les conditions:*

1. *Pour tout $f, g \in P$ on a $f \circ g \in P$.*
2. *L'application π est différentiable de classe C^α.*

Maintenant nous supposons que B est une variété parallélisable et connexe. Si e est un point fixé dans B, alors le fibré vectoriel $L(B) = \bigcup_{x \in B} L(T_x B : T_e B)$ (2) possède une C^α-section globale ω telle que $\omega(x) \in L_{iz}(T_x B : T_e B)$ pour tout $x \in B$.

Définition. *Un C^∞-difféomorphisme f de B est compatible avec le parallélisme absolu sur B, si et seulement si on a la relation*

$$T_x f = \omega^{-1}(f(x)) \circ \omega(x) \quad \forall x \in B.$$

Théorème 3. *Une variété connexe B est un groupe de Lie-Banach si et seulement si sont vérifiées les conditions :*

1. *B est parallélisable.*
2. *Pour tout $x \in B$ il existe un C^∞-difféomorphisme f_x compatible avec le parallélisme absolu sur B tel que $f_x(x) = e$.*

Démonstration. Si B est un groupe de Lie-Banach, alors on sait [1] que B est une variété parallélisable. Pour tout $x \in B$, nous définissons $f_x = L_{x^{-1}}$. En tenant compte que $\omega(x) = T_x L_{x^{-1}}$ on déduit que f_x est compatible avec le parallélisme absolu sur B.

Réciproquement, soit ω la C^∞-section dans le fibré vectoriel $L(B)$, telle que $\omega(x) \in L_{iz}(T_x B : T_e B)$. Nous désignons par $Q = \{f_x\}_{x \in B}$. Vu que les éléments de Q sont compatibles avec le parallélisme absolu sur B, on a

$$T_y(f_x \circ f_z) = T_{f_z(y)} f_x \circ T_y f_z =$$

$$= \omega^{-1}((f_x \circ f_z)(y)) \circ \omega(f_z(y)) \circ \omega^{-1}(f_z(y)) \circ \omega(y) = \omega^{-1}((f_x \circ f_z)(y)) \circ \omega(y)$$

$$T_y(f_x)^{-1} = (T_{f_x^{-1}(y)} f_x)^{-1} = [\omega^{-1}(y) \circ \omega(f_x^{-1}(y))]^{-1} = \omega^{-1}(f_x^{-1}(y)) \circ \omega(y).$$

Donc $f_x \circ f_z, (f_x)^{-1} \in Q$ pour tout $x, z \in B$. Maintenant nous montrons l'unicité de f_x pour un point x fixé dans B. Nous supposons qu'il existe $g_x \in Q$ tel que $g_x(x) = e$. Soit $A = \{y \in B : f_x(y) = g_x(y)\}$. Il est clair que $A \neq \emptyset$. Les applications g_x et f_x sont continues, B est un espace de Hausdorff, donc A est fermée dans B. Soit $x_* \in A$. Nous définissons :

$$y_1 = f_x \circ f_{x_*}^{-1}; \; y_2 = g_x \circ f_{x_*}^{-1}.$$

Soit (U, φ) une carte locale dans $e \in B$. Il est aisé de voir que $y_{1|U}$ et $y_{2|U}$ sont des solutions pour l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \omega^{-1}(y) \circ \omega(x) \qquad (x, y) \in U \times U. \tag{2}$$

On a $y_1(e) = y_2(e) = f_x(x_*)$. En tenant compte de l'unicité de la solution de l'équation différentielle (2), on déduit qu'il existe un voisinage V de e tel que $y_{1|V} = y_{2|V}$. Donc $W = (f_{x_*})^{-1}(V)$ est un voisinage de x_* tel que $f_{x|W} = g_{x|W}$, c'est-à-dire A est un ouvert dans B. Mais B est connexe, donc $f_x = g_x$ sur B. Nous définissons $P = \{f_y^{-1} \circ f_x\}_{(x,y) \in B \times B}$. Il est évident que P est une classe de difféomorphismes qui agit de façon simplement transitive sur B et vérifie la condition 1 du théorème 2. L'application π donnée par la relation (1) est différentiable de classe C^∞, parce que la restriction de f_x^{-1} à chaque domain d'une carte locale est une solution pour l'équation différentielle (2) considérée sur ce domaine. q.e.d.

Nous présentons maintenant deux applications du théorème 3. Si B est une C^∞-variété différentielle de dimension finie, connexe et $\partial B = \Phi$, alors il existe une classe de C^∞-difféomorphismes de Thom qui agit transitivement sur B. En tenant compte de théorème 3 nous obtenons :

Théorème 4. *Une classe de difféomorphismes de Thom qui agit de façon simplement transitive, détermine une structure de groupe de Lie sur une variété parallélisable si chaque difféomorphisme est compatible avec le parallélisme absolu.*

Soit G un groupe de Lie compact. Nous notons par π la loi de composition sur G et définissons sur $\mathrm{Diff}^\infty(G)$ la loi de composition γ donnée par la relation :

$$(\gamma(f, g))(x) = \pi(f(x), g(x)) \quad \forall g, f \in \mathrm{Diff}^\infty(G), \; x \in G.$$

L'ensemble des C^∞-difféomorphismes d'une variété compacte possède une structure de groupe de Lie local Fréchet et une structure de variété de Banach. En utilisant le théorème 3 nous obtenons :

Théorème 5. *L'ensemble des C^∞-difféomorphismes d'un groupe de Lie compact est un groupe de Lie-Banach.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Bejancu A. — *Formes différentielles et groupes de Lie-Banach.* An. şt. Univ. Iaşi, 18, fasc. 1, 1972, p. 125—137.
2. Lang S. — *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1967.

Reçu le 29.I.1974

TEOREME GLOBALE ÎN TEORIA GRUPURILOR LIE-BANACH

Rezumat

Se obţin condiţii necesare şi suficiente de existenţă a unei structuri globale de grup Lie-Banach pe o varietate Banach şi se dau două aplicaţii ale lor.