Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

SUR LES ORDRES SEMI-TOPOGÈNES FINIS

PAR

C. AMIHĂESEI

§1. Dans cette note on utilise la terminologie et les notations de [1]. Dans sa monographie [2], A. Császár démontre qu'un ordre semi-topogène $\prec$ sur un ensemble E est biparfait si et seulement si :

$$(1.1) \qquad A \prec B \Leftrightarrow [(\forall x \in A,\ \forall y \in E - B) \Rightarrow x \prec E - y]. \quad \text{(théorème 5.7)}$$

Si on remplace dans (1.1) les ensembles $\{y\}$, composés d'un seul élément, par les ensembles Y composés d'un nombre fini d'éléments, ou par des ensembles Y ayant au plus un nombre donné d'éléments, on obtient deux classes d'ordres semi-topogènes, plus particuliers que les ordres semi-topogènes parfaits et plus généraux que les ordres topogènes biparfaits. Puis, on note par $\|Y\|$ le nombre cardinal de l'ensemble Y.

Définition 1.1. *Un ordre semi-topogène $\prec$ sur un ensemble E est dit borné à borne n, s'il existe un nombre naturel minime $n \geqslant 0$, tel que :*

$$(M)\ A \prec B \Leftrightarrow [(\forall x \in A,\ \forall Y \subset E - B,\ \|Y\| \leqslant n) \Rightarrow x \prec E - Y].$$

Définition 1.2. *On dit qu'un ordre semi-topogène $\prec$ sur un ensemble E est fini, si on a*

$$(F)\ A \prec B \Leftrightarrow [(\forall x \in A,\ \forall Y \subset E - B,\ \|Y\| \text{ fini}) \Rightarrow x \prec E - Y].$$

La liaison entre ordres semi-topogènes introduits et ordres semi-topogènes connus apparaît dans le théorème suivant.

Théorème 1.1. (1) *Tout ordre semi-topogène borné est fini.*

(2) *Tout ordre semi-topogène fini est parfait.*

Démonstration. (1) est évident.

(2) Soit $\prec$ un ordre semi-topogène fini, $A_i \prec B$, $i \in I$, $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $Y \subset E - B$, $\|Y\|$ fini. Il résulte qu'il existe $i_x \in I$ tel que $x \in A_{i_x} \prec B$, d'où $x \prec E - Y$. En utilisant la condition (F) on obtient $\bigcup_{i \in I} A_i \prec B$, ce qui prouve que $\prec$ est un ordre semi-topogène parfait. ∎ (Par le ∎ signe on indique la fin d'une démonstration).

On donne maintenant deux exemples d'ordres semi-topogènes finis.

a) Dans un plan E on note par $\overline{xy}$ le segment qui unit les points $x, y \in E$. La relation $\prec$ définie sur 2^E par :

$$(1.2) \qquad A \prec B \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow (x \in B, \forall u, v \in E - B, x \notin \overline{uv})]$$

est un ordre semi-topogène borné, à borne 2.

b) Soit E un ensemble infini et $\prec$ la relation définie sur 2^E par

$$(1.3) \qquad A \prec B \Leftrightarrow [A \subset B \text{ et } \| E - B \| \text{ fini}].$$

La relation $\prec$ est l'ordre semi-topogène engendré par la topologie cofinie sur E et par conséquent est un ordre topogène parfait sur E. L'ordre semitopogène parfait $\prec$ défini par (1.3) n'est pas fini ; en effet, si $0 \neq B \neq E$, B infini, $A \subset B$ et $B - A$ est infini, alors pour tout $x \in A$, $Y \subset E - B$, $\| Y \|$ fini, on a $x \prec E - Y$, bien que la relation $A \prec B$ soit fausse.

Ces exemples montrent que l'ensemble des ordres semi-topogènes finis est strictement contenu dans l'ensemble des ordres semi-topogènes parfaits sur un ensemble E. D'autre part, il est évident qu'un ordre semi-topogène est un ordre semi-topogène biparfait si et seulement s'il est borné, ayant la borne au plus égale à 1.

Compte tenu de l'antiisomorphisme φ mis en évidence dans [1] par le théorème 2.1 et de la manière dont est définie la composition transfinie de fonctions expansives [4], on est conduit à introduire la composition transfinie d'ordres semi-topogènes de la façon suivante.

Soit $\{\prec_\alpha : \alpha \in I\}$ un ensemble d'ordres semi-topogènes sur un ensemble E, où I est un intervalle initial de nombres ordinaux, d'où on tire les nombres ordinaux limite, $\omega, 2\omega, \ldots$, donc α peut être $1, 2, \ldots$; $\omega + 1, \omega + 2, \ldots$ ... ; $2\omega + 1, \ldots$. Comme on le sait déjà, la composition de deux ordres semi-topogènes $\prec_1, \prec_2$ est l'ordre semi-topogène $\prec_2 = \prec_1 . \prec_2$ défini par

$$A \prec_2 B \Leftrightarrow \exists C \subset E, A \prec_1 C \prec_2 B.$$

Par récurrence on définit la composition de $n \geqslant 2$ ordres semi-topogènes $\prec_1, \prec_2, \ldots, \prec_n$, comme étant l'ordre semi-topogène $\prec_n$, défini par $\prec_n = (\prec_1 . \prec_2 \ldots \prec_{n-1}) . \prec_n$. Si ω est le nombre ordinal de l'intervalle I, alors on définit la composition de l'ensemble $\{\prec_\alpha, \alpha \in I\}$ par $\prec_\omega = \bigcap_{n \in N} \prec_n$. Pour le nombre ordinal $\omega + 1$ on définit l'ordre semi-topogène $\prec_{\omega+1}$ par $\prec_{\omega+1} = \prec_\omega . \prec_{\omega+1}$, puis on définit pour 2ω l'ordre semi-topogène $\prec_{2\omega}$ par $\prec_{2\omega} = \bigcap_{\alpha \leqslant 2\omega} \prec_\alpha$ etc. Pour la famille donné, on définit la composition par $\prec = \prod_{\alpha \in I} \prec_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} \prec_\alpha$.

Si λ est le nombre ordinal de l'intervalle I et si $\prec_\alpha = \prec$, on définit l'ordre semi-topogène $\prec^\lambda$ par $\prec^\lambda = \prod_{\alpha \in I} \prec_\alpha$. On vérifie facilement les propriétés suivantes de la composition transfinie d'ordres semi-topogènes.

Théorème 1.2. (*1*). *Si* $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *alors* $(\prec_1 \ldots \prec_n)^c = \prec_n^c \ldots \prec_1^c$.

(*2*) *Si l'ordre* $\prec$ *est symétrique, alors* $\prec^\lambda$ *est un ordre semi-topogène symétrique.*

(*3*) *Si* $\prec$ *est un ordre topogène, alors pour tout nombre ordinal* λ, *l'ordre* $\prec^\lambda$ *est un ordre topogène.*

(*4*) *Si* $\prec$ *est un ordre semi-topogène parfait (coparfait), alors* $\prec^\lambda$ *est un ordre semi-topogène parfait (coparfait).*

(*5*) *Si* $\prec$ *est un ordre topogène biparfait, alors* $\prec^\lambda$ *est un ordre topogène biparfait.* ■

Dans ce qui suit on présente quelques propriétés relatives au comportement des ordres semi-topogènes finis par rapport aux opérations connues et avec la composition transfinie.

Théorème 1.3. *Si* $\prec_1$ *et* $\prec_2$ *sont deux ordres semi-topogènes bornés à bornes respectivement* n_1 *et* n_2, *alors :*

1) $(\prec_1 \cup \prec_2)^p$ *est un ordre semi-topogène borné à borne au plus égale à* $n_1 + n_2$.

2) $\prec_1 \cap \prec_2$ *est un ordre semi-topogène borné à borne au plus égale à* $\max\{n_1, n_2\}$.

3) $\prec_1 . \prec_2$ *et* $\prec_2 . \prec_1$ *sont des ordres semi-topogènes bornés à bornes au plus égales à* $n_1 n_2$.

Démonstration. 1) Soient A, B deux sous-ensembles de l'ensemble E ayant la propriété que pour tout $x \in A$, $Y \subset E - B$, $\| Y \| \leqslant n_1 + n_2$ il résulte $x \prec E - Y$, où on a noté $\prec = \prec_1 \cup \prec_2$. Si $A \not\prec^p B$, alors il existe $x \in A$ tel que $x \not\prec B$, donc $x \not\prec_1 B$ et $x \not\prec_2 B$; d'ici il résulte qu'il existe $Y_1 \subset E - B$, $\| Y_1 \| \leqslant n_1$ avec $x \not\prec_1 E - Y_1$ et qu'il existe $Y_2 \subset E - B$, $\| Y_2 \| \leqslant n_2$ et $x \not\prec_2 E - Y_2$. En considérant $Y = Y_1 \cup Y_2 \subset E - B$, on a $\| Y \| \leqslant n_1 + n_2$, d'où $x \prec E - Y$. Mais de $Y_1 \subset Y$, $Y_2 \subset Y$ et $x \not\prec_1 E - Y_1$, $x \not\prec_2 E - Y_2$ il résulte $x \not\prec_1 E - Y$ et $x \not\prec_2 E - Y$, donc $x \not\prec E - Y$. La contradiction à laquelle on est parvenu, nous conduit à la conclusion que $A \prec^p B$. ■

2) Soient $\prec = \prec_1 \cap \prec_2$ et A, B deux sous-ensembles de E, tels que pour tout $x \in A$, $Y \subset E - B$, $\| Y \| \leqslant n = \max\{n_1, n_2\}$ il résulte $x \prec E - Y$. Si $x \in A$, $Y_1 \subset E - B$, $\| Y_1 \| \leqslant n_1 \leqslant n$, alors il résulte $x \prec E - Y_1$ et par conséquent $A \prec_1 B$; il résulte de façon analogue $A \prec_2 B$, donc $A \prec B$. ■

3) Soient A et B deux sous-ensembles de E, tels que pour tout $x \in A$, $Y \subset E - B$, $\| Y \| \leqslant n_1 n_2$, il résulte $x \prec_1 . \prec_2 E - Y$. On va montrer que dans ces hypothèses la relation $A \prec_1 \prec_2 B$ est vrai.

Si $A = \varnothing$ ou $B = E$, alors il est évident que $A \prec_1 . \prec_2 B$. On peut donc supposer que $A \neq \varnothing$ et $B \neq E$. Ensuite, si $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$, on constate facilement que respectivement $\prec_1 = \prec_m$ ou $\prec_2 = \prec_m$ et alors on a respectivement, $\prec_m . \prec_2 = \prec_m$ ou $\prec_1 . \prec_m = \prec_m$ et la composition des ordres $\prec_1 . \prec_2$ a la borne $0 = n_1 n_2$. On peut donc supposer que $n_1 \geqslant 1$ et $n_2 \geqslant 1$. Compte tenu de l'hypothèse, pour $x \in A$, $Y \subset E - B$, $\| Y \| \leqslant n_1 n_2$, il existe un ensemble $U_{x,Y}$ tel que $x \prec_1 U_{x,Y} \prec_2 E - Y$; parce que $\prec_2$ est parfait, il existe un sur-ensemble maximal $V_{x,Y}$ de l'ensemble $U_{x,Y}$ tel que $x \prec_1 U_{x,Y} \subset V_{x,Y} \prec_2 E - Y$ (th. 5 de [3]). En considérant $P_Y = \cup \{V_{x,Y} : x \in A\}$, on déduit comme ci-dessus qu'il existe un sur-ensemble

maximal C_Y de l'ensemble A, tel que $A <_1 P_Y \subset C_Y <_2 E - Y$. Si $U \subset V \subset E - B$, $\| V \| \leqslant n_1 n_2$, on obtient alors successivement : $A <_1 C_V <_2 E - U$ et $A <_1 C_V <_2 E - V \subset E - U$; $A <_1 P_U \subset C_U <_2 E - U$ et $A <_1 P_V \subset C_V <_2 E - U$; $A <_1 P_U \subset C_V \cup C_V <_2 E - U$; de la maximalité de l'ensemble C_U il résulte $C_V \subset C_U$. On a montré donc que

$$U \subset V \subset E - B,\ \| V \| \leqslant n_1 n_2 \Rightarrow C_V \subset C_U. \tag{1.4}$$

On considère l'ensemble $C = \cap \{C_Y : Y \subset E - B,\ \| Y \| \leqslant n_2\}$ et on va montrer que $A <_1 C <_2 B$, ce qui finira la démonstration du théorème. Soient $y \in C$, $Z \subset E - B$, $\| Z \| \leqslant n_2$. Si $x \in A$, alors pour $Z \subset E - B$, $\| Z \| \leqslant n_2 \leqslant n_1 n_2$, il existe C_Z tel que $x <_1 C_Z <_2 E - Z$. De $y \in \cap \{C_Y : \| Y \| \leqslant n_2\}$, il résulte que $y \in C_Z$, d'où on déduit $y <_2 E - Z$. De l'hypothèse que $<_2$ est borné et qu'il a la borne n_2, il résulte

$$C <_2 B. \tag{1.5}$$

Soit maintenant $x \in A$, $Z \subset E - C = \cup \{E - C_Y : Y \subset E - B,\ \| Y \| \leqslant n_2\}$, $\| Z \| \leqslant n_1$. Il existera un nombre naturel $p \leqslant n_1$ et les ensembles $C_{Y_1}, \ldots, C_{Y_p}$, tels que $Z \subset E - \bigcap_{i=1}^{p} C_{Y_i}$. En considérant l'ensemble $Y = \bigcup_{i=1}^{p} Y_i$, on aura $\| Y \| \leqslant p n_2 \leqslant n_1 n_2$ et de (1.4) il résulte $C_Y \subset C_{Y_i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$; d'ici il résulte $A <_1 C_Y \subset \bigcap_{i=1}^{p} C_{Y_i}$, donc $A <_1 \bigcap_{i=1}^{p} C_{Y_i}$. De l'inclusion $Z \subset E - \bigcap_{i=1}^{p} C_{Y_i}$, on déduit $x <_1 E - Z$. Puisque $<_1$ a la borne n_1, x est arbitraire dans A et Z satisfait aux conditions $Z \subset E - C$, $\| Z \| \leqslant n_1$, on déduit

$$A <_1 C. \tag{1.6}$$

Des relations (1.5) et (1.6) on obtient $A <_1 <_2 B$. De manière analogue on peut montrer que $<_2 . <_1$ est borné et qu'il a la marge au plus égale à $n_1 n_2$ ∎

Corollaire 1.1. *La borne supérieure, la borne inférieure et la composition d'une famille finie d'ordres semi-topogènes bornés, sont des ordres semi-topogènes bornés.* ∎

Théorème 1.4. *(1) Si $\{<_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ est une famille finie d'ordres semi-topogènes finis sur E, alors l'ordre $(\bigcup_{k=1}^{n} <_k)^p$ est un ordre semi-topogène fini sur E.*

(2) Si $\{<_i : i \in I\}$ est une famille arbitraire d'ordres semi-topogènes finis sur E, alors l'ordre $\bigcap_{i \in I} <_i$ est un ordre semi-topogène fini sur E.

(3) Toute composition transfinie d'ordres semi-topogènes finis sur E, est un ordre semi-topogène fini sur E.

(4) Si $<$ est un ordre semi-topogène fini sur E, alors $<^\omega$ est l'ordre semi-topogène fini idempotent maximal, contenu dans $<$.

Démonstration. (1) Soient $< = \bigcup_{k=1}^{n} <_k$ et A, B deux sous-ensembles de E ayant la propriété que pour tout $x \in A$, $Y \subset E - B$, $\| Y \|$ fini, il résulte $x <^p E - Y$, ou de manière équivalente, $x \not< E - Y$. Si $A \not<^p B$, alors il existe $x \in A$ tel que $x \not<_k B$ pour $k = 1, \ldots, n$. Les ordres $<_k$ étant finis, il résulte qu'il existe $Y_k \subset E - B$, $\| Y_k \|$ fini, pour lequel $x \not<_k E - Y_k$ pour $k = 1, \ldots, n$. En considérant $Y = \bigcup_{k=1}^{n} Y_k$, on obtient $E - Y \subset E - Y_k$, $x \not<_k E - Y$ pour $k = 1, \ldots, n$, ce qui contredit l'hypothèse, parce que $Y \subset E - B$ et $\| Y \|$ est fini. ∎

(2) On vérifie immédiatement que l'ordre $< = \bigcap_{i \in I} <_i$ est fini. ∎

(3) On considère d'abord deux ordres semi-topogènes finis $<_1$ et $<_2$ sur E. En remplaçant dans la démonstration de 3) du théorème 1.3. les expressions „$\| Y \| \leqslant n_1$" et „$\| Y \| \leqslant n_2$" par l'expression „$\| Y \|$ est un nombre fini", on montre que $<_1 . <_2$ est un ordre semi-topogène fini. D'ici il résulte que toute composition finie d'ordres semi-topogènes finis est un ordre semi-topogène fini. Puisque toute intersection d'ordres semi-topogènes finis est un ordre semi-topogène fini, il résulte que toute composition transfinie d'ordres semi-topogènes finis est un ordre semi-topogène fini. ∎

(4) Si $<$ est un ordre semi-topogène fini, alors comme suite du point précédent, l'ordre $<^\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} <^n$ est un ordre semi-topogène fini. Si $<_1$ est un ordre semi-topogène idempotent qui vérifie la relation $<_1 \subset <$, on déduit que $<_1 = <_1^n \subset <^n$ pour tout n, donc $<_1 \subset <^\omega$. Il reste à montrer que $<^\omega$ est idempotent. L'inclusion $<^\omega . <^\omega \subset <^\omega$ est évidente. Pour démontrer l'inclusion contraire, soit $A <^\omega B$, donc $A <^n B$ pour tout nombre naturel n. Puisque $A < B$ et parce que $<$ est un ordre semi-topogène parfait, il existe un sur-ensemble maximal C_1 de l'ensemble A, pour lequel $A \subset C_1 < B$. De $A <^2 B$ il résulte qu'il existe un ensemble $C_0^{(2)}$ tel que $A < C_0^{(2)} < B$, et de $A \subset C_0^{(2)} < B$ il s'ensuit $C_0^{(2)} \subset C_1$, donc $A < C_1 < B$. De $A <^3 B$ il résulte qu'il existe un ensemble $C_0^{(3)}$ tel que $A < C_0^{(3)} <^2 B$. Puisque $<^2$ est aussi parfait, il existe un sur-ensemble maximal C_2 de l'ensemble $C_0^{(3)}$ tel que $A < C_0^{(3)} \subset C_2 <^2 B$, donc $A < C_2 <^2 B$. Compte tenu du fait que $A \subset C_2 < B$, il résulte que $C_2 \subset C_1$. De manière analogue, de $A <^4 B$ il résulte qu'il existe un ensemble C_3 tel que $A < C_3 <^3 B$ et $C_3 \subset C_2$. Par conséquent, on peut construire par induction une suite d'ensembles (C_n), aux propriétés suivantes :

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots \tag{1.7}$$

$$A < C_1 < B,\ A < C_2 <^2 B, \ldots, A < C_n <^n B, \ldots \tag{1.8}$$

On considère maintenant l'ensemble $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Il est évident que $C <^n B$ pour tout nombre naturel n, donc $C <^\omega B$. Soient ensuite, $x \in A$, $Y \subset E - C$, $\| Y \|$ fini. Puisque l'ensemble Y est fini, il existe les ensembles $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_p}$, tels que $Y \subset E - \bigcap_{i=1}^{p} C_{n_i} = E - C_m$, où $m = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$. On a donc, $x \in A$, $Y \subset E - C_m$, $\| Y \|$ fini, $A < C_m$; de ces relations il s'ensuit la relation $x < E - Y$. Étant donné que $<$ est un ordre semi-topogène fini, il résulte que $A < C$. Par conséquent, il existe un ensemble C qui vérifie les relations $A < C <^\omega B$, donc $A < \cdot <^\omega B$, c'est-à-dire $<^\omega \subset < \cdot <^\omega$. La dernière inclusion et l'inclusion contraire établies ci-dessus, conduisent à l'égalité $< \cdot <^\omega = <^\omega$, d'où on déduit facilement l'égalité $<^\omega \cdot <^\omega = <^\omega$. ■

Le dernier point du théorème précédent montre que pour tout ordre semi-topogène fini il existe un ordre semi-topogène fini idempotent maximal contenu dans celui-ci, et en plus, on observe que cet ordre est obtenu par un ensemble dénombrable d'opérations.

Dans le théorème suivant on donne une caractérisation des ordres topogènes biparfaits, dans la classe des ordres semi-topogènes finis.

Théorème 1.5. (1) *Un ordre semi-topogène est un ordre topogène biparfait si et seulement s'il est un ordre topogène fini.*

(2) *L'ordre semi-topogène parfait idempotent maximal contenu dans un ordre topogène biparfait $<$, est un ordre topogène biparfait; cet ordre est $<^\omega$.*

Démonstration. (1) La nécessité est évidente. Soient $<$ un ordre topogène fini et A, B deux ensembles tels que pour tout $x \in A$, tout $y \in E - B$ il résulte $x < E - y$. Si $x \in A$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset E - B$, alors il résulte successivement: $x < E - y_1$, $x < E - y_2, \ldots$, $x < E - y_n$; $x < \bigcap_{i=1}^{n} \cdot (E - y_i) = E - Y$ (parce que $<$ est ordre topogène). Comme x est arbitraire dans A, Y est un ensemble fini arbitraire contenu dans $E - B$ et $<$ est fini, on déduit que $A < B$, donc $<$ est biparfait. ■

(2) Si $<$ est un ordre topogène biparfait, il est un ordre semi-topogène fini et alors $<^\omega$ est l'ordre semi-topogène fini idempotent maximal contenu dans $<$. L'ordre $<^\omega$ étant un ordre topogène fini, il résulte qu'il est un ordre topogène biparfait. ■

§ 2. On vérifie que la relation d'inclusion sur E est un ordre semi-topogène fini sur E. Cette observation et le point (2) du théorème 1.4, montrent que pour tout ordre semi-topogène $<$ sur E, il existe le moins fin ordre semi-topogène fini, plus fin que $<$. On introduit un opérateur $\cdot^{f\alpha}$ sur l'ensemble $\mathcal{S}$, des ordres semi-topogènes, à l'aide duquel on déterminera le moins fin ordre semi-topogène fini, plus fin que l'ordre semi-topogène donné par

$$A <^f B \Leftrightarrow [(\forall x \in A,\ \forall Y \subset E - B,\ \| Y \| \text{ fini}) \Rightarrow x < E - Y]. \tag{2.1}$$

Dans le théorème ci-dessous on démontre quelques propriétés de l'opérateur $\cdot^{f\alpha}$.

Théorème 2.1. (1) *Pour tout ordre semi-topogène $<$ sur E, la relation $<^f$ définie par (2.1) est le moins fin ordre semi-topogène fini sur E, plus fin que $<$.*

(2) *Un ordre semi-topogène $<$ sur E est fini si et seulement si $< = <^f$.*

(3) *Si $<$ est un ordre semi-topogène sur E, alors $<^{ff} = <^f$.*

(4) *Si $<_1$, $<_2$ sont des ordres semi-topogènes sur E, tels que $<_1 \subset <_2$, alors $<_1^f \subset <_2^f$.*

(5) *Si $<_1$, $<_2$ sont des ordres semi-topogènes parfaits sur E, alors $(<_1 \cdot <_2)^f \subset <_1^f \cdot <_2^f$.*

Démonstration. (1) La relation $< \subset <^f$ est évidente. On observe ensuite que si x est un point de E et Y est un ensemble fini contenu dans E, alors la relation $x <^f E - Y$ est vraie si et seulement si la relation $x < E - Y$ est vraie. Compte tenu de cette observation il résulte que $<^f$ est un ordre semi-topogène fini. Si $<'$ est un ordre semi-topogène fini tel que $< \subset <'$, alors on déduit successivement les implications: $A <^f B \Rightarrow [(\forall x \in A,\ \forall Y \subset E - B,\ \| Y \| \text{ fini}) \Rightarrow x < E - Y] \Rightarrow [(\forall x \in A,\ \forall Y \subset E - B,\ \| Y \| \text{ fini}) \Rightarrow x <' E - Y] \Rightarrow A <'^f B$. ■

Les points (2), (3) et (4) sont les conséquences du point (1), et le point (5) est démontré suivant des raisonnements analogues à ceux utilisés dans la démonstration du point (3) du th. 1.3. ■

Il est évident qu'on peut introduire sur $\mathcal{S}$, de manière analogue, des opérateurs qui associent à un ordre semi-topogène, un ordre semi-topogène borné, ayant comme borne un nombre naturel donné et on peut établir des résultats similaires à ceux de l'opérateur $\cdot^{f\alpha}$.

§3. Dans [4], P. C. Hammer introduit et étudie deux classes de fonctions expansives, à savoir: les fonctions expansives à domaine borné et les fonctions expansives à domaine fini. Rappelons les définitions données par Hammer.

Définition 3.1. *On dit qu'une fonction expansive $h: 2^E \to 2^E$, a le domaine borné et la borne du domaine est n, s'il existe un nombre naturel minime n tel que pour tout ensemble $X \subset E$ on ait*

$$hX = \cup \{hy;\ Y \subset X: \| Y \| \leqslant n\}.$$

Définition 3.2. *On dit qu'une fonction expansive a le domaine fini si pour tout ensemble $X \subset E$, a lieu l'identité*

$$hX = \cup \{hy;\ Y \subset X,\ \| Y \| \text{ fini}\}.$$

Dans le théorème suivant, on montrera que les fonctions t-expansives qui vérifient les conditions ci-dessus se correspondent par l'antiisomorphisme φ rappelé au début de cette Note, avec les ordres semi-topogènes étudiés dans les paragraphes antérieurs.

Théorème 3.1. (1) *Un ordre semi-topogène $<$ est borné, à borne n, si et seulement si la t-fonction associée $h_<$ a le domaine borné, la borne du domaine étant n.*

(2) *Un ordre semi-topogène $\prec$ est fini, si et seulement si la t-fonction associé $h_\prec$ a le domaine fini.*

Démonstration. (1) Si h est une t-fonction expansive, alors $\prec_h$ est un ordre semi-topogène parfait. Les affirmations suivantes sont équivalentes: $A \prec_h B$: $A \subset chcB$; $hcB \subset cA$; $\cup\{hY: Y \subset cB, \|Y\| \leqslant n\} \subset cA$; pour tout $Y \subset cB, \|Y\| \leqslant n$, on a $hY \subset cA$; pour tout $Y \subset cB, \|Y\| \leqslant n$, on a $A \subset chY$; $(\forall x \in A, \forall Y \subset cB, \|Y\| \leqslant n) \Rightarrow x \in chY = chccY$; $(\forall x \in A, \forall Y \subset cB, \|Y\| \leqslant n) \Rightarrow x \prec_h cY$. On a donc l'équivalence suivante

$$A \prec_h B \Leftrightarrow [(\forall x \in A, \forall Y \subset cB, \|Y\| \leqslant n) \Rightarrow x \prec_h cY],$$

ce qui montre que $\prec_h$ est un ordre semi-topogène borné, ayant la borne au plus égale à n. Réciproquement, on suppose que $\prec$ est un ordre semi-topogène borné, à borne n, et soit $h = h_\prec$ le t-fonction expansive associée. En notant par $i = chc$ la fonction adjointe à la fonction h, on obtient successivement: $iX = \{x: x \in E, x \prec X\} = \{x: x \in E, \forall Y \subset cX, \|Y\| \leqslant n, x \prec cY\}$; $icX = \{x: x \in E, \forall Y \subset X, \|Y\| \leqslant n, x \prec cY\}$; $hX = cicX = \{x: x \in E, \exists Y \subset X, \|Y\| \leqslant n, x \not\prec cY\}$. On établira maintenant l'égalité

$$hX = \{x: x \in E, \exists Y \subset X, \|Y\| \leqslant n, x \not\prec cY\} = \cup\{hY: Y \subset X, \|Y\| \leqslant n\}$$

Puisque h est isotone, il s'ensuit $\cup\{hY: Y \subset X, \|Y\| \leqslant n\} \subset hX$. Réciproquement, si $x \in hX$, alors il existe $Y \subset X, \|Y\| \leqslant n, x \not\prec cY$, d'où il résulte que $x \in hY$, parce que, en cas contraire on aurait $x \in chY = chccY$, $x \prec cY$. Par conséquent $x \in \cup\{hY: Y \subset X, \|Y\| \leqslant n\}$ et donc h est une t-fonction expansive à domaine borné, ayant la borne au plus égale à n.

On démontre maintenant que cette correspondance conserve aussi les bornes. Si h est une t-fonction expansive à domaine borné ayant la borne du domaine n, alors des raisonnements précédents il résulte que l'ordre semi-topogène associé est borné et a la borne $n_1 \leqslant n$. En vertu des mêmes raisonnements, il résulte que la t-fonction expansive associée $h = h_{\prec_n}$ a le domaine borné, ayant la borne du domaine $n \leqslant n_1$. ■

(2) Dans la démonstration précédente on remplace l'affirmation „$\|Y\| \leqslant n$" par l'affirmation „$\|Y\|$ est fini". ■

Il faut observer qu'en vertu du théorème précédent, il résulte que les théorèmes 1.3 et 1.4 se correspondent par l'antiisomorphisme φ avec les théorèmes 2 et 4 de [4].

Enfin nous présentons deux théorèmes concernant le comportement de l'antiisomorphisme φ aux compositions finies et transfinies.

Théorème 3.2. *Si h_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, sont n t-fonctions expansives sur E, alors $\prec_{h_1 h_2 \ldots h_n} = \prec_{h_1} \prec_{h_2} \cdots \prec_{h_n}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème pour $n = 2$. Si i_1 et i_2 sont les fonctions adjointes des fonctions h_1 et h_2, alors $i_1 i_2 = ch_1 cch_2 c = ch_1 h_2 c = i_{h_1 h_2}$. De cette égalité il résulte successivement: $A \prec_{h_1 h_2} B \Rightarrow A \subset i_{h_1 h_2} B = i_{h_1 h_2} B$;

$A \prec_{h_1 h_2} B \Rightarrow A \prec_{h_1} C \prec_{h_2} B$, où $C = i_{h_2} B$; $\prec_{h_1 h_2} \subset \prec_{h_1} \prec_{h_2}$.

Réciproquement, si $A \prec_{h_1} C \prec_{h_2} B$ alors $A \subset i_{h_1} C$, $C \subset i_{h_2} B$, donc $A \subset i_{h_1} C \subset i_{h_1} i_{h_2} B = i_{h_1 h_2} B$ et donc $A \prec_{h_1 h_2} B$, ce qui montre que $\prec_{h_1} \prec_{h_2} \subset \prec_{h_1 h_2}$. Cette inclusion et l'inclusion contraire établie ci-dessus, impliquent l'égalité $\prec_{h_1 h_2} = \prec_{h_1} \prec_{h_2}$. ■

Théorème 3.3. *Si h est un t-fonction expansive sur E, alors pour tout nombre ordinal α, a lieu l'égalité $\prec_h^\alpha = \prec_{h^\alpha}$.*

Démonstration. Du théorème 3.2, il suit que pour tout nombre naturel n, on a $\prec_h^n = \prec_{h^n}$. Ensuite, $\prec_h^\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prec_h^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prec_{h^n}$. Enfin, compte tenu du fait que la fonction $h \to \prec_h$ est un antiisomorphisme de treillis complets, il résulte que $\prec_h^\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prec_{h^n} = \prec_{\cup h^n} = \prec_{h^\omega}$. De manière analogue on montre que pour tout nombre ordinal α, on a $\prec_h^\alpha = \prec_{h^\alpha}$. ■

BIBLIOGRAPHIE

1. Amihăesei C. — *Sur les espaces quasi-topologiques et les ordres semi-topogènes* (sous presse Ann. Univ. Budapest).
2. Császár Á. — *Grundlagen der allgemeinen Topologie*, Budapest, 1963.
3. Gacsályi S. — *On Hacque's E-mappings and semi-topogenous orders*, Publ. Math. Debrecen, 12, 1965, 265—270.
4. Hammer P. C. — *Extended topology: domain finite expansive functions*, Nieuw Archief voor Wiskunde, 3, IX, 1961, 25—33.

Received 17.XII.1977

ASUPRA ORDINILOR SEMITOPOGENE FINITE

Rezumat

În această Notă se introduc două clase noi de ordini semitopogene: ordinile semitopogene mărginite și ordinile semitopogene finite. Se studiază comportarea acestor ordini în raport cu operațiile de reuniune, intersecție și compuneri finite și transfinite. Se introduce apoi un operator „f", care asociază unei ordini semitopogene, cea mai puțin fină ordine semitopogenă finită mai fină decît ea, și se dau cîteva proprietăți ale acestui operator. Se arată că pentru o ordine topogenă biperfectă, $\prec$, ordinea $\prec^\omega$ este cea mai fină ordine topogenă biperfectă idempotentă mai puțin fină ca $\prec$. În continuare sînt date două teoreme de caracterizare a ordinilor semitopogene introduse, cu ajutorul t-funcțiilor expansive cu domeniu finit.