Finally, let us remark that allthough in the binary case $C_1(R) = C_2(R) = C(R)$, however, generally, for $R \subseteq \prod_{j \in I} M_j$, $i \neq h$ we have not $C_i(R) = C_h(R)$. Let us consider $R(M, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}) \subseteq \bigoplus_{j=1}^{n} M_j$ a functional linear relation. Then it is easily seen that $C(R) = C_1(R) = C_2(R) \subseteq C_3(R) \subseteq \ldots \subseteq C_n(R)$ and $C_j(R) \subseteq f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_{j-2}^{-1}(\operatorname{Ker} f_{j-1}) \oplus \ldots \oplus f_{j-2}^{-1}(\operatorname{Ker} f_{j-1}) \oplus \operatorname{Ker} f_{j-1} \oplus \{0_j\} \oplus \ldots \oplus \{0_n\}$, $h = 2, 3, \ldots, n$.

If, for example $\operatorname{Im} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \neq 0$, i.e. there exists $a_2 \neq 0_2$ with $f_2(0_2) = 0_3$ and $a_2 = f_1(a_1)$, $a_1 \in M$, then we have the strict inclusion $C_2(R) = \operatorname{Ker} f_1 \oplus \{0_2\} \oplus \ldots \oplus \{0_n\} \cap C_3(R)$, because $(a_1, a_2, 0_3, \ldots, 0_n) \in C_3(R)$ and $(a_1, a_2, 0_3, \ldots, 0_n) \notin C_2(R)$.

REFERENCES

1. Lambek J. — *Lectures on rings and modules*. Blaisdell Publishing Company, 1966.
2. MacLane S. — *An algebra of additive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 47, 1961, 1043—1051.
3. MacLane S. — *Homology*. Springer Verlag, Berlin, 1963.
4. Vescan T. R. and V. Popa — *Relatii liniare între module*. St. cerc. mat. (to appear).

Received 10.XI.1973

ASUPRA STRUCTURII ALGEBRICE A RELAȚIILOR LINIARE

Rezumat

Se continuă studiul relațiilor liniare între module, definite de noi în [4] ca submodule ale produsului direct al unei familii oarecare de module, stabilindu-se legăturile dintre diagramele lor de structură de indici diferiți. Ne oprim și asupra unui submodul caracteristic al unei relații liniare, pe care-l denumim centrul acesteia, și arătăm că el are aceeași semnificație ca nucleul pentru un homomorfism.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

ÜBER DIE DARSTELLUNG DER ALGEBRAISCHEN ZAHLEN ZWEITEN GRADES DURCH REGULÄRE KETTENBRÜCHE

VON

PETRU MINUȚ

In dieser Arbeit wird mit Hilfe einer rekursiven Relation zweiter Ordnung eine neue Charakterisierung der Kettenbrüche der algebraischen Zahlen zweiten Grades angegeben, und zugleich wird gezeigt, wie man diese Relation zur Bestimmung der enstprechenden Näherungsbrüche beliebiger Ordnung benützen kann. Unsere Methode besteht aus einer Verallgemeinerung der von S. Saniclevici für die periodischen Kettenbrüche der Periodenlänge eins benützten Methode (Siehe [2]). Diese Methode ist so verallgemeinert worden, dass man sie für die periodischen Kettenbrüche beliebiger Periodenlänge benutzen kann. Der Einfachheit halber geben wir hier einige Begriffe über Kettenbrüche, die von der von Felix Klein angegebenen Geometrisierungsmethode angeregt worden sind. Es bezeichnen N die Menge der natürlichen Zahlen (einschliessend Null), Z die Menge der ganzen Zahlen und Q die Menge der Rationalzahlen.

Definition 1. *Eine unendliche Folge*

$$q_0 : q_1 : q_2 : \ldots : q_n : \ldots \quad (q_0 \in Z,\ q_n \in N \text{ für } n \geqslant 1) \tag{1}$$

mit der Eigenschaft, dass aus $q_n = 0$ die Beziehung $q_{n+k} = 0$ für jedes $k \in N$ folgt, heisst ein regulärer Kettenbruch.

Es ist wohlbekannt, dass sich jede reelle Zahl x in einen regulären Kettenbruch entwickeln lässt d.h. x kann unter folgender Form geschrieben werden

$$x = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}} \tag{2}$$

Definition 2. *Unter einer den Kettenbruch (1) zugeordneten R-Folge versteht man die Folge*

(3) $$R_{-2}, R_{-1}, R_0, R_1, R_2, \ldots$$

wobei

(4) $$R_{-1} = i,\ R_{-2} = 1,\ R_k = q_k R_{k-1} + R_{k-2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt.

Definition 3. *Die Folge*

(5) $$\left\{ \frac{P_k}{Q_k} \right\} : k = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei P_k und Q_k den imaginären bzw. reellen Teil von R_k bezeichnen, wird die Folge der Näherungsbrüche des Kettenbruches (1) genannt.

Wir werden weiter die Kettenbrüche der Form (1), für die von einer $n \in N$ beginnend die Beziehung $q_n = 0$ gilt, nicht in Betracht nehmen, da diese den Razionalzahlen enstprechen. Wir erwähnen die Beziehungen

(6) $$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \qquad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2},$$

(7) $$Q_k P_{k-1} - P_k Q_{k-1} = (-1)^k,$$

(8) $$(Q_k, P_k) = 1,$$

(9) $$\lim_{k \to \infty} (P_k / Q_k) = x$$

und dass die Folge

(10) $$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$$

eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen ist.

Definition 4. *Der Kettenbruch (1) heisst periodisch, wenn es zwei natürliche Zahlen r und t mit $r \neq 0$ so gibt, dass für jede natürliche Zahl n folgende Beziehung gilt:*

(11) $$q_{t+nr+k} = q_{t+k};\ k = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Ist r die kleinste natürliche Zahl, für die (11) gilt, so heisst r die Periodenlänge. In diesem Falle schreiben wir

(12) $$x = [q_0, q_1, \ldots, q_{t-1}, \overline{q_t, q_{t+1}, \ldots, q_{t+r-1}}]$$

Folgende zwei Sätze sind wohlbekannt (Siehe [3]):

Satz 1. *Jeder periodische Kettenbruch stellt eine algebraische Zahl zweiten Grades dar.*

Satz 2. Der einer algebraischen Zahl zweiten Grades zugeordnete Kettenbruch ist periodisch.

Demzufolge sind die algebraischen Zahlen zweiten Grades dadurch Charakterisiert, dass der zugeordnete Kettenbruch periodisch ist. Wir wollen weiter eine neue Charakterisierung dieser Zahlen angeben.

Hilfssatz. *Ist $q_0, q_1, q_2, \ldots$ ein Kettenbruch, so kann man aus der zugeordneten R-Folge $\{R_j\}: j = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ keine Unterfolge $\{R_{j_k}\}: k = -1, 2, \ldots$ so wählen, dass die Beziehung*

(13) $$R_{j_{k+1}} = a R_{j_k}$$

gilt, wobei $a \in Q$ eine (von k unabhängige) Konstante ist.

Beweis. Gebe es eine die Bedingung (13) erfüllende Unterfolge, so hätten wir:

(14) $$P_{j_{k+1}} = a P_{j_k}, \qquad Q_{j_{k+1}} = a Q_{j_k}.$$

Wenn $a = m/n$ und $(m, n) = 1$; $m, n \in N$ ist, so folgt $m \mid (Q_{j_{k+1}}, P_{j_{k+1}})$ und unter Beachtung von (8) erhalten wir $m = 1$.

Wir haben also

$$Q_{j_{k+1}} = \frac{1}{n} Q_{j_k},$$

im Widerspruch zu (10).

Satz 3. *Jeder einer algebraischen Zahl zweiten Grades zugeordnete Kettenbruch hat die Eigenschaft, dass man aus der entsprechenden R-Folge eine Unterfolge $\{R_{j_k}\}: k = 1, 2, \ldots$ so wählen kann, dass folgende Beziehung gilt:*

(15) $$R_{j_{k+2}} = a R_{j_{k+1}} + b R_{j_k},$$

wobei $a, b \in Q$ und von k unabhängig sind.

Beweis. Es bezeichne α eine algebraische Zahl zweiten Grades. Gemäss Satz 2 ist der zugeordnete Bruch periodisch, so dass

(16) $$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_t, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_r}]$$

gilt

Unter Beachtung von (6) kann man schreiben:

(17) $$\begin{aligned}
P_{t+nr+2} &= b_2 P_{t+nr+1} + P_{t+nr}, \\
P_{t+nr+3} &= b_3 P_{t+nr+2} + P_{t+nr+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{t+(n+1)r} &= b_r P_{t+(n+1)r-1} + P_{t+(n+1)r-2}, \\
P_{t+(n+1)r+1} &= b_1 P_{t+(n+1)r} + P_{t+(n+1)r-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{t+(n+2)r} &= b_r P_{t+(n+2)r-1} + P_{t+(n+2)r-2}.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (17) können als ein lineares System mit den Unbekannten $P_{t+nr+1}, P_{t+nr+2}, \ldots, P_{t+(n+1)r-1}, P_{t+(n+1)r+1}, \ldots, P_{t+(n+2)r}$ betrachten werden. Das system besitzt $2r - 1$ Gleichungen und $2r - 1$ Unbekannte und seine Determinante verschwindet nicht, so dass gemäss Satz von Cramer gilt:

(18) $$P_{t+(n+2)r} = aP_{t+(n+1)r} + bP_{t+nr} : a, b \in Q$$

und nach dem obigen Hilfssatz ist $a \cdot b \neq 0$. Offensichtlich haben wir:

(18') $$Q_{t+(n+2)r} = aQ_{t+(n+1)r} + bQ_{t+nr} ;$$

und damit ist der Satz bewiesen.

Satz 4. *Gibt es zwei rationale Zahlen a und b, so dass für eine Unterfolge $\{R_{j_k}\}$: $k = 1, 2, 3, \ldots$ der einem Kettenbruch zugeordneten R-Folge die Beziehung*

(19) $$R_{j_{k+2}} = aR_{j_{k+1}} + bR_{j_k}$$

gilt, so ist α eine algebraische Zahl zweiten Grades. Ausnahme macht das Paar $a = 2$, $b = -1$, das dem Fall α rational entspricht.

Beweis. Es sei α eine reelle Zahl mit der Eigenschaft, dass man eine die Beziehung (19) erfüllende Unterfolge wählen kann. Aus dem Hilfssatz folgt $a \cdot b \neq 0$.

Es bezeichne V den Vektorraum derjenigen Folgen $\{u_n\}$, die die Beziehung

(20) $$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

erfüllen (Siehe [1]).

Sind α_1 und α_2 mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$ die Lösungen der Charakteristischen Gleichung

(21) $$x^2 - ax - b = 0,$$

so betrachten wir die aus den geometrischen Folgen

(22) $$\begin{array}{l} 1, \alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \ldots, \alpha_1^{n-1}, \ldots \\ 1, \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \ldots, \alpha_2^{n-1}, \ldots \end{array}$$

bestehende Basis. Aus (19) folgt $\{P_{j_k}\} \in V$, $\{Q_{j_k}\} \in V$, so dass

(23) $$P_{j_k} = C_1 \alpha_1^{k-1} + C_2 \alpha_2^{k-1}, \qquad Q_{j_k} = C_1' \alpha_1^{k-1} + C_2' \alpha_2^{k-1}$$

gilt. Dabei werden die Konstanten C_1, C_2, C_1', C_2' aus den folgenden Systemen erhalten:

(24) $$C_1 + C_2 = P_{j_1}, \quad C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 = P_{j_2},$$

(24') $$C_1' + C_2' = Q_{j_1}, \quad C_1' \alpha_1 + C_2' \alpha_2 = Q_{j_2}.$$

Ist θ eine algebraische Zahl, so bezeichnen wir mit $Q(\theta)$ den Erweiterungskörper, den man durch die Hinzufügung von θ zu Q erhält. Wir setzen voraus, dass $|\alpha_1| > |\alpha_2|$ gilt.

Da $\alpha_2 = a - \alpha_1$ ist, ergibt sich $\alpha_2 \in Q(\alpha_1)$ und aus (24) und (24') folgt $C_1, C_2, C_1', C_2' \in Q(\alpha_1)$. Es gilt

(25) $$\alpha = \lim_{k \to \infty} \frac{P_{j_k}}{Q_{j_k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{C_1 \alpha_1^{k-1} + C_2 \alpha_2^{k-1}}{C_1' \alpha_1^{k-1} + C_2' \alpha_2^{k-1}} = \frac{C_1}{C_1'}.$$

Daraus folgt $\alpha \in R(\alpha_1)$, und folglich ist α eine algebraische Zahl zweiten Grades.

Wir zeigen nun, dass $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ist.

Gelte es

(26) $$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{a}{2},$$

so würde auch

(27) $$b = -\frac{a}{4}$$

gelten.

In V betrachten wir als Basis die Folgen:

(28) $$1, \alpha_1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^{n-1}, \ldots$$

(29) $$0, 1, a, \ldots, u_n, \ldots$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man:

(30) $$u_n = (n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}$$

Wir haben dann:

(31) $$\begin{cases} P_{j_k} = C_1 \left(\frac{a}{2}\right)^{k-1} + C_2 (k-1) \left(\frac{a}{2}\right)^{k-2}, \\ Q_{j_k} = C_1' \left(\frac{a}{2}\right)^{k-1} + C_2' (k-1) \left(\frac{a}{2}\right)^{k-2}. \end{cases}$$

Die Konstanten C_1, C_2, C_1', C_2', die man durch die Auflösung der folgenden Systeme (32) (32') erhält, sind alle rationale Zahlen.

(32) $$C_1 + C_2 = P_{j_1}, \qquad C_1 \frac{a}{2} + C_2 = P_{j_2},$$

(32') $$C_1' + C_2' = Q_{j_1}, \qquad C_1' \frac{a}{2} + C_2' = Q_{j_2}.$$

Da aber

(33) $$\alpha = \lim_{k \to \infty} \frac{P_{j_k}}{Q_{j_k}} = \frac{C_2}{C_2'}$$

gilt, ist α eine rationale Zahl. Demzufolge gibt es eine natürliche Zahl n, so dass $q_{n+k} = 0$: $k = 1, 2, \ldots$ gilt. Die Elemente der zugeordneten R-Folge sind von n-ten Index beginnend alle gleich. Es gelten also: $P_{n+k} = m$, $Q_{n+k} = p$: $k = 1, 2, \ldots$ Gemäss (19) ergibt sich $m = am + bm$, $p = ap + bp$.

Daraus folgt $a + b = 1$, und, unter Beachtung von (27), erhält man $a = 2$, $b = -1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen noch bemerken, dass der Vektorraum V in dem letzten eingetretenen Fall nur aus arithmetischen Folgen besteht, denn es gilt $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

Betrachtet man in diesem Fall die Basis

$$1, 1, 1, \ldots \quad 1, 2, 3, \ldots$$

so ergibt sich $\alpha=(P_{j_2}-P_{j_1})/(Q_{j_2}-Q_{j_1})$. Zum Schluss wollen wir betonen, dass man mit Hilfe des bewiesenen Satzes 3 allgemeine Ausdrücke für die Näherungsbrüche einer beliebigen algebraischen Zahl zweiten Grades aufbauen kann. Als Beispiel betrachten wir

$$\alpha=[0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]. \tag{34}$$

Wir suchen a und b, so dass

$$P_{2k+4}=aP_{2k+2}+bP_{2k}; \qquad Q_{2k+4}=aQ_{2k+2}+bQ_{2k}. \tag{35}$$

Für $k=1$ ergibt sich ein System, aus dem man $a=4$, $b=-1$ erhält. Folglich haben wir

$$P_{2k}=A\alpha_1^{k-1}+B\alpha_2^{k-1}, \qquad Q_{2k}=C\alpha_1^{k-1}+D\alpha_2^{k-1}, \tag{36}$$

wobei α_1 und α_2 die Lösungen der Gleichung $x^2-4x+1=0$ sind.

Analog erhält man P_{2k+1} und Q_{2k+1}. Es gilt offensichtlich

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}=\sqrt{3}-1.$$

LITERATUR

1. Creangă I., Cazacu C., Minuț P., Opaiț Gh., Reischer C. — *Introducere în teoria numerelor*, E.D.P. București, 1965.
2. Saniclevici S. — *Sur les fractions continues périodiques*, An. șt. Univ. Iași, X, 1920, p. 208—218.
3. Sudan G. — *Geometrizarea fracțiilor continue*, Ed. teh. București, 1959.

Eingegangen 17.X.1973

ASUPRA DEZVOLTĂRII NUMERELOR ALGEBRICE DE GRAD DOI ÎN FRACȚII CONTINUE REGULATE

Rezumat

În această lucrare se dă o nouă caracterizare numerelor algebrice de grad doi arătîndu-se că fracțiile lor continue regulate, și numai ele, se bucură de proprietatea că din R-șirul atașat (șirul numerelor complexe corespunzătoare vîrfurilor liniilor poligonale ale lui Felix Klein) se poate extrage un subșir recurent de ordinul al doilea, cu coeficienți raționali. Se arată că această caracterizare este foarte comodă în găsirea unor formule generale pentru reduse.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

ÜBER DIE REGULÄRE KETTENBRÜCHE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLEN VOM GRADE GRÖSSER ALS ZWEI

VON

PETRU MINUȚ

Es ist bekannt, dass die algebraischen Zahlen zweiten Grades durch die Periodizität der regulären Kettenbrüche charakterisiert sind. In einer früher veröffentlichten Arbeit [1], haben wir eine neue Charakterisierung dieser Zahlen angegeben, und zwar zeigten wir: Die reelle Zahl α ist genau dann eine algebraische Zahl zweiten Grades, wenn man aus der zugeordneten R-Folge eine solche Unterfolge wählen kann, die eine rekursive Relation zweiter Ordnung erfüllt.

In dieser Note geben wir eine hinreichende Bedingung dafür an, dass ein reelle Zahl eine algebraische Zahl beliebiger Ordnung ist.

Folgende Aussage ist bekannt: Gilt $\alpha\in Q(\theta)$, wobei θ eine algebraische Zahl n-ten Grades ist, so ist α eine algebraische Zahl, deren Grad Teiler von n ist.

Definition. *Ist $\{u_n\}_{n\in N}$ eine die rekursive Relation (1) erfüllende Folge*

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\ldots+a_ku_n; \tag{1}$$

mit $a_i\in Q$; $i=1, 2, \ldots, k$, so werden wir genau dann sagen, dass diese rekursive Relation irreduzibel ist, wenn das Polinom

$$P(x)=x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}\ldots-a_k \tag{2}$$

irreduzibel über Q ist.

Satz. *Besitzt die reelle Zahl α die Eigenschaft, dass man aus der dem entsprechenden Kettenbruch zugeordneten R-Folge eine solche Unterfolge $\{R_{j_n}\}$ $n\in N^*$ wählen kann, die eine rekursive irreduzibele Relation k-ter Ordnung mit Koeffizienten aus Q erfüllt, so ist α eine algebraische Zahl, deren Grad ein Teiler von k ist.*

Beweis. Es sei α eine reelle Zahl, so dass man aus der dem entsprechenden Kettenbruch zugeordneten R-Folge eine die Relation (3) erfüllende Unterfolge $\{R_{j_n}\}_{n\in N^*}$ wählen kann. (Dabei bezeichnet N^* die Menge der natürlichen Zahlen ausschliessend Null).