Wir wollen noch bemerken, dass der Vektorraum V in dem letzten eingetretenen Fall nur aus arithmetischen Folgen besteht, denn es gilt $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

Betrachtet man in diesem Fall die Basis

$$1, 1, 1, \ldots \quad 1, 2, 3, \ldots$$

so ergibt sich $\alpha = (P_{j_2} - P_{j_1})/(Q_{j_2} - Q_{j_1})$. Zum Schluss wollen wir betonen, dass man mit Hilfe des bewiesenen Satzes 3 allgemeine Ausdrücke für die Näherungsbrüche einer beliebigen algebraischen Zahl zweiten Grades aufbauen kann. Als Beispiel betrachten wir

$$\alpha = [0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]. \tag{34}$$

Wir suchen a und b, so dass

$$P_{2k+4} = aP_{2k+2} + bP_{2k}; \qquad Q_{2k+4} = aQ_{2k+2} + bQ_{2k}. \tag{35}$$

Für $k = 1$ ergibt sich ein System, aus dem man $a = 4$, $b = -1$ erhält. Folglich haben wir

$$P_{2k} = A\alpha_1^{k-1} + B\alpha_2^{k-1}, \qquad Q_{2k} = C\alpha_1^{k-1} + D\alpha_2^{k-1}, \tag{36}$$

wobei α_1 und α_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ sind.

Analog erhält man P_{2k+1} und Q_{2k+1}. Es gilt offensichtlich

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \sqrt{3} - 1.$$

LITERATUR

1. Creangă I., Cazacu C., Minuţ P., Opaiţ Gh., Reischer C. — *Introducere în teoria numerelor*, E.D.P. Bucureşti, 1965.
2. Sanielevici S. — *Sur les fractions continues périodiques*, An. şt. Univ. Iaşi, X, 1920, p. 208—218.
3. Sudan G. — *Geometrizarea fracţiilor continue*, Ed. teh. Bucureşti, 1959.

Eingegangen 17.X.1973

ASUPRA DEZVOLTĂRII NUMERELOR ALGEBRICE DE GRAD DOI ÎN FRACŢII CONTINUE REGULATE

Rezumat

În această lucrare se dă o nouă caracterizare numerelor algebrice de grad doi arătîndu-se că fracţiile lor continue regulate, şi numai ele, se bucură de proprietatea că din R-şirul ataşat (şirul numerelor complexe corespunzătoare vîrfurilor liniilor poligonale ale lui Felix Klein) se poate extrage un subşir recurent de ordinul al doilea, cu coeficienţi raţionali. Se arată că această caracterizare este foarte comodă în găsirea unor formule generale pentru reduse.

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

ÜBER DIE REGULÄRE KETTENBRÜCHE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLEN VOM GRADE GRÖSSER ALS ZWEI

VON

PETRU MINUŢ

Es ist bekannt, dass die algebraischen Zahlen zweiten Grades durch die Periodizität der regulären Kettenbrüche charakterisiert sind. In einer früher veröffentlichten Arbeit [1], haben wir eine neue Charakterisierung dieser Zahlen angegeben, und zwar zeigten wir: Die reelle Zahl α ist genau dann eine algebraische Zahl zweiten Grades, wenn man aus der zugeordneten R-Folge eine solche Unterfolge wählen kann, die eine rekursive Relation zweiter Ordnung erfüllt.

In dieser Note geben wir eine hinreichende Bedingung dafür an, dass ein reelle Zahl eine algebraische Zahl beliebiger Ordnung ist.

Folgende Aussage ist bekannt: Gilt $\alpha \in Q(\theta)$, wobei θ eine algebraische Zahl n-ten Grades ist, so ist α eine algebraische Zahl, deren Grad Teiler von n ist.

Definition. *Ist $\{u_n\}_{n\in N}$ eine die rekursive Relation (1) erfüllende Folge*

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n; \tag{1}$$

mit $a_i \in Q$: $i = 1, 2, \ldots, k$, so werden wir genau dann sagen, dass diese rekursive Relation irreduzibel ist, wenn das Polinom

$$P(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} \ldots - a_k \tag{2}$$

irreduzibel über Q ist.

Satz. *Besitzt die reelle Zahl α die Eigenschaft, dass man aus der dem entsprechenden Kettenbruch zugeordneten R-Folge eine solche Unterfolge $\{R_{j_n}\}$ $n \in N^*$ wählen kann, die eine rekursive irreduzibele Relation k-ter Ordnung mit Koeffizienten aus Q erfüllt, so ist α eine algebraische Zahl, deren Grad ein Teiler von k ist.*

Beweis. Es sei α eine reelle Zahl, so dass man aus der dem entsprechenden Kettenbruch zugeordneten R-Folge eine die Relation (3) erfüllende Unterfolge $\{R_{j_n}\}_{n\in N^*}$ wählen kann. (Dabei bezeichnet N^* die Menge der natürlichen Zahlen ausschliessend Null).

$$R_{j_{n+k}} = a_1 R_{j_{n+k-1}} + a_2 R_{j_{n+k-2}} + \dots + a_k R_{j_n}, \quad n = 1, 2, \dots, a_i \in Q : i = 1, 2, \dots, k. \tag{3}$$

Da das Polinom

$$P(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k \tag{4}$$

irreduzibel ist, hat es paarweise verschiedene Lösungen, und wir nehmen an, dass diese so numerriert worden sind, dass:

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \dots > |\alpha_k|. \tag{5}$$

In dem Vektorraum V, der aus den die Relation (1) erfüllenden Folgen $\{u_n\}_{n \in N^*}$ besteht, wählen wir die aus den geometrischen Folgen gebildete Basis:

$$\begin{cases} 1, \alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \alpha_1^4, \dots, \alpha_1^{n-1}, \dots, \\ 1, \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \alpha_2^4, \dots, \alpha_2^{n-1}, \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1, \alpha_k, \alpha_k^2, \alpha_k^3, \alpha_k^4, \dots, \alpha_k^{n-1} \dots \end{cases} \tag{6}$$

Aus (3) ergibt sich: $\{P_{j_n}\} \in V$, $\{Q_{j_n}\} \in V$. Folglich gibt en $2k$ konstante Zahlen $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k$, so dass

$$\begin{cases} P_{j_n} = A_1 \alpha_1^{n-1} + A_2 \alpha_2^{n-1} + \dots + A_k \alpha_k^{n-1}, \\ Q_{j_n} = B_1 \alpha_1^{n-1} + B_2 \alpha_2^{n-1} + \dots + B_k \alpha_k^{n-1}, \end{cases} \tag{7}$$

gilt. Da aber

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ergibt sich, dass diese Konstanten aus den liniaren Systemen (8) und (8′) eindeutig bestimmt sind.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \dots + A_k = P_{j_1}, \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = P_{j_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1^{k-1} A_1 + \alpha_2^{k-1} A_2 + \dots + \alpha_k^{k-1} A_k = P_{j_k}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + \dots + B_k = Q_{j_1}, \\ \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_k B_k = Q_{j_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1^{k-1} B_1 + \alpha_2^{k-1} B_2 + \dots + \alpha_k^{k-1} B_k = Q_{j_k}. \end{cases} \tag{8'}$$

Wir haben

$$A_t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1, & P_{j_1}, & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{t-1}, & P_{j_2}, & \alpha_{t+1} & \dots & \alpha_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \dots & \alpha_{t-1}^{k-1}, & P_{j_k}, & \alpha_{t+1}^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\Delta}; \; t = 1, 2, \dots, k. \tag{9}$$

$$B_t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1, & Q_{j_1}, & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{t-1}, & Q_{j_2}, & \alpha_{t+1} & \dots & \alpha_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \dots & \alpha_{t-1}^{k-1}, & Q_{j_2}, & \alpha_{t+1}^{k-1} & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}}{\Delta}; \; t = 1, 2, \dots, k. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) bemerkt man, dass A_t und B_t symmetrische Rationalfunktionen in $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}, \alpha_{t+2}, \dots, \alpha_k$ sind, und folglich gilt:

$$\begin{cases} A_t \in Q(\alpha_t) \\ B_t \in Q(\alpha_t) : t = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \tag{11}$$

Es gilt

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} P_{j_n} / Q_{j_n}$$

und daraus, unter Beachtung von (5), ergibt sich $\alpha = B_1/A_1$, d. h. $\alpha \in Q(\alpha_1)$. Demzufolge ist α eine algebraische Zahl, deren Grad ein Teiler von k ist. Ist k eine Primzahl, so ist α eine algebraische Zahl k-ten Grades.

LITERATUR

1. Minut P. — *Über die Darstellung der algebraischen Zahlen zweiten Grades durch reguläre Kettenbrüche*, An. şt. Univ. Iaşi, tom XX, s. I a, fasc. 2, 1974.

Eingegangen 17.X.1973

ASUPRA FRACŢIILOR CONTINUE REGULATE ALE NUMERELOR ALGEBRICE DE GRAD MAI MARE CA DOI

Rezumat

În această Notă se demonstrează că dacă din R-şirul ataşat fracţiei continue a numărului α (şirul numerelor complexe care corespund vîrfurilor liniilor poligonale ale lui Felix Klei) se poate extrage un şubşir care satisface o relaţie de recurenţă, cu coeficienţi raţionali, ireductibilă, de ordin k, atunci numărul α este algebric şi gradul său este un divizor al lui k'.

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

ÜBER BESCHRÄNKTE VERALLGEMEINERTE ANALYTISCHE FUNKTIONEN

VON

HEINRICH BEGEHR

Nach dem mit Hilfe des Ähnlichkeitsprinzips von Bers hergeleiteten Maximumprinzip [4], erfüllt eine in einem Gebiet D der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ approximativ analytische Funktion w, für die

$$\overline{\lim_{z\to\partial D}}\,|w(z)| = M_0,$$

die Ungleichung

$$|w(z)| \leqslant \varkappa M_0 \qquad (z \in D)$$

mit einer von w und D abhängenden Konstanten $\varkappa\,(1 \leq \varkappa)$. Im analytischen Fall gilt $\varkappa = 1$. Dies ist im allgemeinen nicht so, da bei approximativ analytischen Funktionen, lokale Maxima auftreten können. Ein naheliegendes weil reelles Beispiel ist $\cos z\bar{z}$ in $|z| < 1$. Der Faktor $\varkappa$ verhindert es, gewisse Aussagen, die für analytische Funktionen im ganzen Gebiet gelten, in der Nähe des Gebietsrandes nachzuweisen. Dies ist in [8] für das Schwarzsche Lemma in der Pickschen Formulierung aufgezeigt und soll hier an Hand einiger von Carathéodory gegebener Abschätzungen (vgl. [5] und [9]) nachgewiesen werden, die aus Informationen über den Realteil einer Funktion, Aussagen über ihren Imaginärteil möglich machen. Daß diese nur in einem Teilbereich geltenden Ungleichungen dennoch nützlich sein können, zeigt eine Anwendung im Hinblick auf den Liouvilleschen Satz.

1. Einleitung. Eine in einem beschränkten Gebiet D von $\mathbf{C}$ gegebene komplexe Funktion w heißt approximativ analytisch, wenn sie bis auf isolierte Punkte stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt und es eine nichtnegative reelle Zahl k gibt, so daß

$$|w_{\bar z}(z)| \leqslant k\,|w(z)| \qquad (z \in D). \tag{1}$$

In einem unbeschränkten Gebiet D hat man neben k die Existenz einer reellen Zahl $\sigma > 1$ zu fordern und (1) durch

$$|w_{\bar z}(z)| \leqslant \frac{k}{1+|z|^{\sigma}}\,|w(z)| \tag{1'}$$