ASUPRA FRACȚIILOR CONTINUE REGULATE ALE NUMERELOR ALGEBRICE DE GRAD MAI MARE CA DOI

Rezumat

În această Notă se demonstrează că dacă din R-șirul atașat fracției continue a numărului α (șirul numerelor complexe care corespund vîrfurilor liniilor poligonale ale lui Felix Klei) se poate extrage un șubșir care satisface o relație de recurență, cu coeficienți raționali, ireductibilă, de ordin k, atunci numărul α este algebric și gradul său este un divizor al lui k'.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

ÜBER BESCHRÄNKTE VERALLGEMEINERTE ANALYTISCHE FUNKTIONEN

VON

HEINRICH BEGEHR

Nach dem mit Hilfe des Ähnlichkeitsprinzips von Bers hergeleiteten Maximumprinzip [4], erfüllt eine in einem Gebiet D der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ approximativ analytische Funktion w, für die

$$\overline{\lim_{z\to\partial D}}\,|w(z)| = M_0,$$

die Ungleichung

$$|w(z)| \leqslant \varkappa M_0 \qquad (z \in D)$$

mit einer von w und D abhängenden Konstanten $\varkappa\,(1 \leq \varkappa)$. Im analytischen Fall gilt $\varkappa = 1$. Dies ist im allgemeinen nicht so, da bei approximativ analytischen Funktionen, lokale Maxima auftreten können. Ein naheliegendes weil reelles Beispiel ist $\cos z\bar{z}$ in $|z| < 1$. Der Faktor $\varkappa$ verhindert es, gewisse Aussagen, die für analytische Funktionen im ganzen Gebiet gelten, in der Nähe des Gebietsrandes nachzuweisen. Dies ist in [3] für das Schwarzsche Lemma in der Pickschen Formulierung aufgezeigt und soll hier an Hand einiger von Carathéodory gegebener Abschätzungen (vgl. [5] und [9]) nachgewiesen werden, die aus Informationen über den Realteil einer Funktion, Aussagen über ihren Imaginärteil möglich machen. Daß diese nur in einem Teilbereich geltenden Ungleichungen dennoch nützlich sein können, zeigt eine Anwendung im Hinblick auf den Liouvilleschen Satz.

1. Einleitung. Eine in einem beschränkten Gebiet D von $\mathbb{C}$ gegebene komplexe Funktion w heißt approximativ analytisch, wenn sie bis auf isolierte Punkte stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt und es eine nichtnegative reelle Zahl k gibt, so daß

$$|w_{\bar{z}}(z)| \leqslant k\,|w(z)| \qquad (z \in D). \tag{1}$$

In einem unbeschränkten Gebiet D hat man neben k die Existenz einer reellen Zahl $\sigma > 1$ zu fordern und (1) durch

$$|w_{\bar{z}}(z)| \leqslant \frac{k}{1 + |z|^{\sigma}}\,|w(z)| \tag{1'}$$

zu ersetzen. Approximativ analytische Funktionen zeigen ein lokal asymptotisches Verhalten wie die analytischen Funktionen. Dies lehrt der Satz von Carleman [4] und das Ähnlichkeitsprinzip.

Eine Teilmenge dieser Funktionenklasse bilden die pseudoanalytischen Funktionen, die in engem Zusammenhang mit den quasikonformen Abbildungen stehen. Zu einem Paar von in D gegebenen komplexen, gleichmäßig stetigen, mit Hölderstetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehenen Funktionen (F, G), das den Bedingungen

$$0 < \Delta \leq \operatorname{Im}\{F(z)\,\overline{G(z)}\}$$

und

$$|F(z)| + |G(z)| \leq M, \quad |F_z(z)| + |G_z(z)| \leq \frac{M_1}{1 + |z|^\sigma}$$

mit konstanten M, M_1, Δ und $\sigma > 1$ genügt, heißt eine in D gegebene komplexe Funktion w (F, G)-pseudoanalytisch, kurz pseudoanalytisch, wenn w einmal partiell differenzierbar in D ist und die Gleichung

$$w_{\bar z}(z) = a(z)\, w(z) + b(z)\, \overline{w(z)}$$

mit den charakteristischen Koeffizienten a und b des „erzeugenden Paares" (F, G) erfüllt, die sich aus dem System

$$F_{\bar z}(z) = a(z)\, F(z) + b(z)\, \overline{F(z)}, \qquad G_{\bar z}(z) = a(z)\, G(z) + b(z)\, \overline{G(z)}$$

ergeben und einer Abschätzung der Form

$$|a(z)| + |b(z)| \leq \frac{k}{1 + |z|^\sigma} \quad (0 \leq k,\ 1 < \sigma)$$

genügen. Ist D beschränkt, so kann σ durch 0 ersetzt werden. Die Funktion w läßt sich in eindeutiger Weise mit Hilfe von zwei reellen Funktionen λ und μ durch

$$w(z) = \lambda(z)\, F(z) + \mu(z)\, G(z) \tag{2}$$

ausdrücken und

$$\omega(z) = \lambda(z) + i\mu(z)$$

vermittelt eine quasikonforme Abbildung. Beachtet man den Zusammenhang von w und ω, so sieht man

$$|w(z)| \leq M\, |\omega(z)| \leq \frac{M^2}{\Delta}\, |w(z)| \qquad (z \in D). \tag{3}$$

Nach dem Ähnlichkeitsprinzip führt die zu einer approximativ analytischen Funktion w gebildete beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion

$$s(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{w(\zeta)\, (\zeta - z)} \qquad (\zeta = \xi + i\eta,\ z \in \mathbf{C}) \tag{4}$$

zu der in D analytischen Funktion $w(z)\, e^{s(z)}$. Mit Hilfe von k und σ läßt sich eine obere Schranke für $s(z)$ angeben. Genauer gesagt gilt (vgl. [4], S. 60)

$$|s(z)| \leq \frac{ck}{1 + |z|^{\sigma - 1}} \qquad (z \in \mathbf{C})$$

mit einer nur von σ abhängigen Größe c. Im Fall eines Kreises mit Radius 1 folgt aus der Ungleichung von E. Schmidt [10]

$$|s(z)| \leq 2k \qquad (z \in \mathbf{C}).$$

Schwarzsches Lemma. Eine in $|z| < R$ $(0 < R < +\infty)$ approximativ analytische Funktion w, für die

$$w(0) = 0, \quad \overline{\lim_{|z| \to R}}\, |w(z)| = M_0,$$

genügt der Ungleichung

$$|w(z)| \leq K^2 M_0 \frac{|z|}{R} \quad (|z| < R)$$

mit einer von k und R, bei Gültigkeit von (1') anstelle von (1) von k und σ abhängenden Konstanten

$$K = e^{ck}. \tag{5}$$

2. Beschränkte approximativ analytische Funktionen. Hier werden einige auf Borel, Carathéodory und Plemelj zurückgehende Ungleichungen untersucht.

Satz 1. *Ist w approximativ analytisch in $|z| < R$ $(0 < R < +\infty)$, $w(0) = 0$ und*

$$\operatorname{Re} w(z) \leq A \qquad (A < +\infty),$$

so gelten

$$\operatorname{Re} w(z) \leq \frac{2K^4 |z|}{R + K^4 |z|} A \quad (|z| < R) \tag{6}$$

und

$$|w(z)| \leq \frac{2K^4 |z|}{R - K^4 |z|} A \quad (K^4 |z| < R) \tag{7}$$

mit K aus (5).

Die Ungleichung (6) ist nur für $K^4 |z| < R$ interessant.

Beweis. Die Funktion

$$f(z) = \frac{w(z)}{w(z) - 2A}$$

ist wegen

$$f_{\bar z}(z)\, w(z) = -\frac{2A}{w(z) - 2A}\, w_{\bar z}(z)\, f(z)$$

und

$$A \leqslant |w(z) - 2A|$$

mit

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| \leqslant 1$$

approximativ analytisch. Das auf f angewandte Schwarzsche Lemma ergibt

$$R\, |w(z)| \leq K^4 |w(z) - 2A|\, |z|.$$

Hieraus folgen die Abschätzungen (6) und (7).

Läßt man die Voraussetzung $w(0) = 0$ fallen, so kann die mit Hilfe der in (4) gegebenen Funktion s gebildete approximativ analytische Funktion

$$W(z) = w(z) - w_0\, e^{-s(z)} \quad (w_0 = w(0)\, e^{s(0)})$$

herangezogen werden.

Funktionen vom Typ e^s mit beschränkter, gleichmäßig stetiger und bis auf isolierte Punkte im Gebiet reell stetig differenzierbarer Funktion s, für die bis auf die Ausnahmepunkte

$$|s_{\bar z}(z)| \leq \frac{k}{1 + |z|^\sigma} \quad (0 \leq k,\ 1 < \sigma)$$

gilt, sind im Hinblick auf den Satz von Liouville für approximativ analytische Funktionen (vgl. etwa [1]) als approximativ analytische Konstanten anzusehen. $W(z)$ erfüllt die Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes mit

$$\operatorname{Re} W(z) \leq A + K\, |w_0|,$$

so daß

$$\operatorname{Re}\{w(z) - w_0\, e^{-s(z)}\} \leqslant \frac{2K^4 |z|}{R + K^4 |z|}\, (A + K\, |w_0|) \tag{8}$$

und

$$|w(z) - w_0\, e^{-s(z)}| \leqslant \frac{2K^4 |z|}{R - K^4 |z|}\, (A + K\, |w_0|) \tag{9}$$

gelten. Aus der letzten Ungleichung ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Liouvilleschen Satzes.

Satz 2. *Erfüllt die in* $\mathbf{C}$ *approximativ analytische Funktion* w *die Bedingung*

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{A(r)}{r} = 0, \quad A(r) = \max_{|z| \leq r} \operatorname{Re} w(z),$$

so ist w *eine approximativ analytische Konstante.*

Die rechte Seite von (9) wird nämlich gleichmäßig für $|z| \leqslant r$ mit beliebig großem, aber festem r wegen der Voraussetzung über das Wachstum von $A(R)$ für genügend großes R beliebig klein.

Satz 3. *Sei* w *approximativ analytisch in* $|z| < R$ $(0 < R < +\infty)$, $w(0) = 0$ *und*

$$|\operatorname{Re} w(z)| \leqslant A \quad (0 \leqslant A < +\infty,\ |z| < R),$$

dann gilt

$$|\operatorname{Im} w(z)| \leqslant \frac{2A}{\pi} \log \frac{R + K^4 |z|}{R - K^4 |z|} \tag{10}$$

in

$$K^4 |z| < R.$$

Beweis. Man setze in $|z| < R$

$$g(z) = \frac{1 - f(z)}{1 + f(z)}, \quad f(z) = e^{\frac{\pi i}{2A} w(z)}$$

und beachte, daß g wegen

$$g_{\bar z}(z) = -\frac{\pi i}{A} \frac{f(z)}{1 - f^2(z)}\, w_{\bar z}(z)\, g(z)$$

und

$$|g_{\bar z}(z)\, w(z)| \leqslant 2\, |w_{\bar z}(z)\, g(z)|$$

approximativ analytisch und nach oben durch 1 beschränkt ist und in $z = 0$ verschwindet. Das Schwarzsche Lemma für g ergibt (10). In ganz $|z| < R$ kann man nur

$$|\operatorname{Im} w(z)| \leqslant \frac{2A}{\pi} \log \frac{1 + |g(z)|}{1 - |g(z)|}$$

sichern.

3. Beschränkte pseudoanalytische Funktionen. Die im zweiten Abschnitt gemachten Aussagen gelten unverändert auch für pseudoanalytische Funktionen, jedoch stehen bei diesen mehr als ihr Real- und ihr Imaginär-

teil die in (2) gegebenen reellen Funktionen λ und μ im Vordergrund. Die Abschätzungen (6) und (7) sollen in Satz 5 (Ungleichungen (13) und (14)) für diese Funktionen hergeleitet werden und mit seiner Hilfe wie in 2. ein allgemeines Ergebnis im Sinne von Liouville erhalten werden.

Satz 4. *Eine in einem Gebiet D pseudoanalytische Funktion w ist pseudoanalytisch konstant, d. h. von der Form*

$$\lambda_0 F(z) + \mu_0 G(z) \quad (z \in D)$$

mit zwei reellen Konstanten λ_0 und μ_0, wenn $\operatorname{Re}\omega$ *oder* $\operatorname{Im}\omega$ *konstant sind.*

Beweis. Die Pseudoanalytizität von

$$w(z) = \lambda(z) F(z) + \mu(z) G(z)$$

ist (vgl. [4], S. 26) gleichbedeutend mit dem Bestehen der Gleichung

$$\lambda_{\bar z}(z) F(z) + \mu_{\bar z}(z) G(z) = 0 \quad (z \in D),$$

oder mit der Gültigkeit des reellen Systems

$$\lambda_x = \tau\mu_x + \sigma\mu_y, \quad \lambda_y = -\sigma\mu_x + \tau\mu_y \quad (z = x + iy \in D)$$

mit reellen τ und σ, die bestimmt sind durch

$$G + (\tau - i\sigma) F = 0.$$

Satz 5. *Ist w pseudoanalytisch in $|z| \leqslant R$,*

$$\Lambda(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} \lambda(z), \quad M(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |w(z)| \quad (0 \leqslant r \leqslant R)$$

und $\Lambda(R)$ endlich, so gelten mit K aus (5) in

$$|z| \leqslant r < \frac{R}{C} \qquad \left(C = \frac{M^2 K^2}{\Delta}\right)$$

$$|w(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z)| \leqslant \frac{2Cr}{R - Cr} M(\Lambda(R) - \lambda_0) \tag{11}$$

und

$$M(r) \leqslant M\left[\frac{R + Cr}{R - Cr} |\lambda_0 + i\mu_0| + \frac{2Cr}{R - Cr} \Lambda(R)\right] \tag{12}$$

mit

$$w(0) = \lambda_0 F(0) + \mu_0 G(0).$$

Eine entsprechende Aussage gilt, wenn man unter $\Lambda(R)$ das Maximum von $-\lambda(z)$ versteht. Auch können die Rollen von λ und μ miteinander vertauscht werden.

Beweis. Bekanntlich folgt aus der Definition von $\Lambda(R)$

$$\lambda(z) \leqslant \Lambda(R) \quad (|z| \leqslant R).$$

Wendet man auf die wegen

$$|w(z)| \leqslant \frac{M^2}{\Delta} |w(z) - 2\Lambda F(z)| \quad (\Lambda = \Lambda(R))$$

beschränkte approximativ analytische Funktion

$$\frac{w(z)}{w(z) - 2\Lambda F(z)} \qquad (z \leqslant R)$$

unter der zusätzlichen Voraussetzung $w(0) = 0$ das Schwarzsche Lemma an, so folgt

$$R|w(z)| \leqslant C|w(z) - 2\Lambda F(z)|z| \left(|z| < R, \ C = \frac{M^2 K^2}{\Delta}\right).$$

Durch wiederholte Anwendung von (3), folgt hieraus

$$\Lambda(r) \leqslant \frac{2C^2 r}{K^2 R + C^2 r} \Lambda(R) \qquad (r \leqslant R) \tag{13}$$

und

$$|w(z)| \leqslant \frac{2C|z|}{R - C|z|} M\Lambda(R) \quad (C|z| < R). \tag{14}$$

Die erste dieser beiden Abschätzungen ist für $C^2 r > K^2 R$ nicht interessant. Im Fall

$$w(0) = \lambda_0 F(0) + \mu_0 G(0) \neq 0$$

hat man die letzte Ungleichung durch

$$|w(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z)| \leqslant \frac{2C|z|}{R - C|z|} M(\Lambda(R) - \lambda_0) \quad (C|z| < R)$$

zu ersetzen. Aus ihr folgt

$$|w(z)| \leqslant M\left[\frac{R + C|z|}{R - C|z|} |\lambda_0 + i\mu_0| + \frac{2C|z|}{R - C|z|} \Lambda(R)\right]$$

oder auch

$$|w(z)| \leqslant \frac{R + (2CK^{-2} - 1) C|z|}{R - C|z|} |\lambda_0 F(z) + \mu_0 G(z)| + \frac{2MC|z|}{R - C|z|} \Lambda(R).$$

Das Auftreten der Konstanten $C > 1$ im allgemeinen pseudoanalytischen Fall hat seine Ursache im wesentlichen darin, daß eine solche Funktion w im Gegensatz zu der ihr eineindeutig zugeordneten quasiholomorphen Funktion ω durch die Existenz eines lokalen Maximums nicht notwendig eine Konstante wird (vgl. etwa [3]). Dass die unscharfen Abschätzungen gelegentlich dennoch nützlich sein können, zeigt das folgende auf Liouville zurückgehende Ergebnis.

Satz 6. *Gibt es für die in* $\mathbf{C}$ *pseudoanalytische Funktion* w *eine nichtnegative ganze Zahl* n *mit*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{A(r)}{r^{n+1}} = 0,$$

so ist w *ein pseudoanalytisches Polynom, dessen Grad nicht grösser als* n *ist.*

Beweis. Durch die Festsetzung

$$R = \varrho r \qquad (C < \varrho,\ \varrho \text{ fest})$$

folgt aus der für einen Kreis $|z - z_0| < R$ geschriebenen Ungleichung (12)

$$M(r) \leq O(A(\varrho r))\ (r \to +\infty),$$

so daß

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{M(r)}{r^{n+1}} = 0.$$

Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung, wenn man die Entwickelbarkeit von w in eine pseudoanalytische Potenzreihe

$$w(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} Z^{(k)}(a_k, z_0, z)$$

und die Koeffizientenabschätzung (vgl. [4], S. 116 und S. 184)

$$|a_k| \leq \frac{c_k M(r)}{r^k} \qquad (1 \leq c_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

beachtet.

Die Ungleichung (11) gibt zu einem neuen Beweis für den Satz 4 Anlaß. Ist nämlich $\lambda = \operatorname{Re}\omega$ konstant, so folgt für einen in D gelegenen Kreis $|z - z_0| \leq R$ wegen $A(R) = \lambda_0$ aus (11)

$$w(z) = \lambda_0 F(z) + \mu_0 G(z).$$

Mit Rücksicht auf das Nullstellenverhalten von pseudoanalytischen Funktionen (Satz von Carleman) gilt diese Beziehung in ganz D.
Zu einer ähnlichen Aussage kann man Satz 3 ausnutzen.

Satz 7. *Haben zwei in einem Gebiet* D *gegebene* (F, G)*-pseudoanalytische Funktionen* w_1 *und* w_2 *in einer offenen, in* D *gelegenen Menge den gleichen Realteil und gilt für ein* z_0 *dieser Menge* $w_1(z_0) = w_2(z_0)$, *so stimmen beide Funktionen in* D *miteinander überein.*

Beweis. Man wende die Abschätzung (10) auf die approximativ analytische Funktion $w_1 - w_2$ in einem in D gelegenen Kreis $|z - z_0| < R$ an, in dem $\operatorname{Re}(w_1 - w_2)$ verschwindet. Da dann

$$\operatorname{Im}(w_1 - w_2) = 0 \qquad (K^4 |z - z_0|) < R),$$

ist w_1 mit w_2 wieder wegen des Satzes von Carleman in D identisch. Man kann hier wie auch in Satz 3 die Rollen von Realteil- und Imaginärteil vertauschen.

LITERATUR

1. Begehr, H. — *Zur Wertverteilung approximativ analytischer Funktionen.* Arch. Math. (Basel) 23 (1972), S. 41—49.
2. Begehr, H. — *Die logarithmische Methode in der Wertverteilungstheorie pseudoanalytischer Funktionen.* Ann. Acad. Sci. Fennicae A. I. 549 (1973).
3. Begehr, H. — *Das Schwarzsche Lemma und verwandte Sätze für pseudoanalytische Funktionen.* Erscheint demnächst.
4. Bers, L. — *Theory of pseudo-analytic functions.* Vorlesungsausarbeitung, New York University, Institute for Mathematics and Mechanics, New York, 1953.
5. Carathéodory, C. — *Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen.* Mathematische Abhandlungen Herrmann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern. S. 19—41. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1914.
6. Dinghas, A. — *Vorlesungen über Funktionentheorie.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 110. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg. 1961.
7. Habetha, K. — *Über die Werteverteilung pseudoanalytischer Funktionen.* Ann. Acad. Sci. Fennicae A. I. 406 (1967).
8. Habetha, K. — *Zum Phragmén-Lindelofschen Prinzip bei quasiholomorphen und pseudoanalytischen Funktionen.* Appl. Analysis 2 (1972), S. 169—185.
9. Landau, E. — *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* Verlag von Julius Springer, Berlin, 1916.
10. Schmidt, E. — *Bemerkung zur Potentialtheorie.* Mathematische Abhandlungen Herrmann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern. S. 365—383. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1914.
11. Vekua, I. N. — *Verallgemeinerte analytische Funktionen.* Mathematische Lehrbücher und Monographien. Akademie-Verlag, Berlin, 1963.

Eingegangen 1.III.1974

I. Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin

ASUPRA FUNCŢIILOR ANALITICE GENERALIZATE MĂRGINITE

Rezumat

Pentru funcţii aproximativ analitice se demonstrează, în anumite condiţii restrictive, inegalităţile de tipul (6), (10). Inegalităţi analoge se studiază pentru cazul funcţiilor pseudoanalitice mărginite.