Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

ÜBER EINEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DER CHARAKTERISTISCHEN FUNKTION UND DER ANZAHL DER NULLSTELLEN BEI GANZEN FUNKTIONEN DER ORDNUNG $\lambda < 1$

VON

L. VOLKMANN

1. Ist $f(z)$ eine ganze Funktion, so bezeichne $n(r, 0)$ die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion im Kreis $|z| \leqslant r$,

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi$$

die Nevanlinnasche Schmiegungsfunktion und $T(r, f)$ die Nevanlinnasche charakteristische Funktion. In der vorliegenden Arbeit wird folgender Satz bewiesen.

Satz. *Sei $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda < 1$, dann gilt*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, 0)}{T(r, f)} \geqslant \begin{cases} \lambda & \text{für } \lambda < \frac{1}{2} \\ \lambda \sin \pi\lambda & \text{für } \frac{1}{2} \leqslant \lambda < 1, \end{cases} \tag{1}$$

und diese Abschätzung ist scharf.

In den folgenden Nummern wird hierfür der Beweis gegeben, dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda > 0$ vorausgesetzt werden.

2. Um einzusehen, daß die Ungleichung (1) scharf ist, setze man

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^{\frac{1}{\lambda}}}\right).$$

Dann gilt für $r \to \infty$ (vgl. R. Nevanlinna [4], S. 18)

$$n(r, 0) \sim r^{\lambda}, \quad T(r, f) \sim \begin{cases} \dfrac{r^{\lambda}}{\lambda} & \text{für } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \\ \dfrac{r^{\lambda}}{\lambda \sin \pi\lambda} & \text{für } \frac{1}{2} \leqslant \lambda < 1. \end{cases}$$

3. Zum Beweis von (1) kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(0) = 1$ vorausgesetzt werden, so daß $f(z)$ in der Form

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Setzt man

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{|a_n|}\right),$$

so ist auch $g(z)$ von der Ordnung λ (vgl. A. Dinghas [1], S. 355), und es gilt

$$m(r, g) \geqslant m(r, f)$$

(vgl. W. H. J. Fuchs [3], S. 282). Daher genügt es, den Satz für $g(z)$ an Stelle von $f(z)$ zu beweisen, d.h. man kann die Nullstellen a_n von $f(z)$ als negativ voraussetzen. Damit wird $\log|f(re^{i\varphi})|$ eine gerade Funktion von φ, die für $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ monoton fällt. Also gilt

$$\begin{aligned} T(r, f) = m(r, f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\beta(r)} \log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \frac{m+1}{m}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{m}{m+1}\beta(r)} \log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $0 \leqslant \beta(r) \leqslant \pi$ und m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet.

4. Wegen $a_n < 0$ in (2), gilt

$$\log f(z) = z\int_0^{\infty} \frac{n(t, 0)}{t(t+z)}\, dt \qquad (-\pi < \arg z < \pi)$$

(vgl. E. C. Titchmarsh [6], S. 271), wobei die Integrale für $z = re^{i\varphi}$ (r fest, $0 \leqslant \varphi \leqslant [m/(m+1)]\beta(r) = \alpha \leqslant [m/(m+1)]\pi$) gleichmäßig konvergent sind. Daher gilt mit (3)

$$\begin{aligned} \frac{m}{m+1} T(r, f) &\leqslant \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\alpha} \log f(re^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\infty} dt\, \frac{n(t, 0)}{t}\int_0^{\alpha} \frac{re^{i\varphi}}{t + re^{i\varphi}}\, d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{n(t, 0)}{t} \operatorname{arctg} \frac{t + r\cos\alpha}{r\sin\alpha}\, dt. \end{aligned} \tag{4}$$

5. Da die Ordnung λ von $f(z)$ kleiner als eins ist, gilt

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r, 0)}{\log r} = \lambda$$

(vgl. R. Nevanlinna [5], S. 227). Man wähle nun ε durch die Ungleichungen

$$0 < \varepsilon < \lambda, \quad \lambda + \varepsilon < \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leqslant \lambda < 1 \end{cases} \tag{5}$$

und bilde die Funktionen

$$H(t) = \frac{n(t, 0)}{t^{\lambda-\varepsilon}}, \quad h(t) = t^{2\varepsilon}\left(\frac{|a_1|}{2} = t_0 \leqslant t < \infty\right).$$

Dann ist $h(t)$ positiv und monoton wachsend, und es gilt

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} H(t) = \infty.$$

Ferner existieren für $r \geqslant t_0$ die Maxima

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant r} H(t), \quad \max_{r \leqslant t < \infty} \frac{H(t)}{h(t)}.$$

Aus diesen Tatsachen über H und h läßt sich wie bei A. Edrei und W. H. J. Fuchs [2], Beweis zu Lemma 1, auf die Existenz beliebig großer $r > 0$ schließen, so daß gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$\frac{n(t, 0)}{t^{\lambda-\varepsilon}} \leqslant \frac{n(r, 0)}{r^{\lambda-\varepsilon}} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant r)$$

$$\frac{n(t, 0)}{t^{\lambda+\varepsilon}} \leqslant \frac{n(r, 0)}{r^{\lambda+\varepsilon}} \quad (r \leqslant t < \infty)$$

erfüllt sind.

6. Für diese r ist wegen (4)

$$\begin{aligned} \frac{m}{m+1} T(r, f) \leqslant \frac{n(r, 0)}{\pi}\Bigg\{&\int_0^{r} \left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda-\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{t + r\cos\alpha}{r\sin\alpha}\, \frac{dt}{t} + \\ &\int_r^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda+\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{t + r\cos\alpha}{r\sin\alpha}\, \frac{dt}{t}\Bigg\}. \end{aligned}$$

also, mit $t/r = s$,

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{T(r,f)}{n(r,0)} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\infty s^{\lambda+\varepsilon-1}\operatorname{arctg}\frac{s+\cos\alpha}{\sin\alpha}\,ds + \tag{6}$$
$$\int_0^1 (s^{-\varepsilon}-s^{\varepsilon})\,s^{\lambda-1}\,ds = I_1 + I_2 .$$

Partielle Integration und anschließende Anwendung des Residuensatzes liefert

$$I_1 = \frac{1}{\pi(\lambda+\varepsilon)}\int_0^\infty \frac{s^{\lambda+\varepsilon}\sin\alpha}{s^2+2s\cos\alpha+1}\,ds = \frac{1}{\lambda+\varepsilon}\,\frac{\sin\alpha(\lambda+\varepsilon)}{\sin\pi(\lambda+\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{(\lambda+\varepsilon)\sin\pi(\lambda+\varepsilon)} .$$

Im Falle $0 < \lambda < 1/2$ ist wegen (5) sogar $I_1 \leqslant 1/(\lambda+\varepsilon)$.
Wegen $I_2 = 2\varepsilon/(\lambda^2-\varepsilon^2)$ folgt somit aus (6) die Abschätzung

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{T(r,f)}{n(r,0)} \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda+\varepsilon} + \dfrac{2\varepsilon}{\lambda^2-\varepsilon^2} & \text{für } 0 < \lambda < \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{(\lambda+\varepsilon)\sin\pi(\lambda+\varepsilon)} + \dfrac{2\varepsilon}{\lambda^2-\varepsilon^2} & \text{für } \dfrac{1}{2} \leqslant \lambda < 1 . \end{cases} \tag{7}$$

7. Die Ungleichung (7) gilt für beliebig große r, also kann in ihr $T(r,f)/n(r,0)$ durch $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, T(r,f)/n(r,0)$ ersetzt werden.

Die Grenzübergänge $\varepsilon \to 0$ und $m \to \infty$ liefern (1).

LITERATUR

1. Dinghas, A. — *Vorlesungen über Funktionentheorie.* Berlin—Göttingen—Heidelberg. Springer-Verlag 1961.
2. Edrei, A. und Fuchs, W.H.J. — *The deficiencies of meromorphic functions of order less than one.* Duke Math. J. 27 (1960), 233—249.
3. Fuchs, W.H.J. — *Developments in the classical Nevanlinna theory of meromorphic functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 275—291.
4. Nevanlinna, R. — *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes.* Paris: Gauthier-Villars 1929.
5. Nevanlinna, R. — *Eindeutige analytische Funktionen.* 2. Aufl., Berlin-Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1953.
6. Titchmarsh, E. C. — *The theory of functions.* 2. Aufl., Oxford Univ. Press 1939.

Eingegangen 19.II.1974

I. Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XX, s. I a, fasc. 2, 1974

ON SOME COMMUTATIVITY THEOREMS. I

BY

VASILE ISTRĂŢESCU

0. One of the well-known commutativity theorem of Herstein asserts that in any associative ring R if for all $x, y \in R$ there exists an integer $n = n(x, y)$ such that

$$(xy - yx)^{n(x,y)} = (xy - yx),$$

then R is a commutative ring.

Since we are interested in Banach algebras, it is of some interest to give a proof in this setting. Our purpose in the present Note is to give a proof of the above theorem as an application of Baire's theorem and also for other theorems. At the end of the Note we give a conjecture about operators in Banach spaces.

1. Theorem 1.1. *If $\mathcal{A}$ is a Banach algebra and for each x, y, there exists an integer $n = n(x, y) > 1$ such that*

$$xy - yx = (xy - yx)^{n(x,y)}, \tag{1}$$

then $\mathcal{A}$ is commutative.

Proof. We consider the Banach space $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ and the sets

$$B_n = \{(x, y),\quad n(x, y) = n\}$$

which are closed subsets in $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ and $\mathcal{A} \times \mathcal{A} = \bigcup\limits_n B_n$. Thus we find an integer n_0 and a pair (x_0, y_0) such that there exists a neighbourhood $N(x_0, y_0)$ such that $B_n \supset N(x_0, y_0)$. It is obvious that for small t the element $(x + t(x - x_0), y_0)$ is again in $N(x_0, y_0)$ and thus we can take $n(x + t(x - x_0), y_0) = n_0$.
The vector valued function

$$t \to [(x + t(x - x_0))\,y_0 - y_0(x + t(x - x_0))]^{n_0}$$

has the derivative of order n_0 equal to zero. But in this case for $t = 0$ we obtain that

$$0 = x_0 y_0 - y_0 x_0 .$$