Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

UNELE METODE TOPOLOGICE ÎN STUDIUL RELAŢIILOR BINARE

DE

DAN BRÂNZEI

1. Dualitate. Se numeşte relaţie binară un triplet ordonat $\rho = (A\rho, B\rho, G\rho)$, unde $A\rho$ şi $B\rho$ sînt mulţimi — numite *bază*, iar $G\rho$ — *graful* relaţiei binare — o submulţime a produsului cartezian $A\rho \times B\rho$. Se notează $a\rho b$ în loc de $(a, b) \in G\rho$. Notaţiile uzuale în teoria relaţiilor binare [2, 3, 1] nu sînt în general invariate de dualitatea din teoria mulţimilor; ca excepţie cităm tăietura relaţiei binare ρ peste un element a; $\rho < a > = \{b : a\rho b\}$ şi operaţia de *conversare* $\rho \sim \to \rho^{-1}$ unde $A\rho^{-1} = B\rho \wedge B\rho^{-1} = A\rho \wedge (a\rho b \Leftrightarrow b\rho^{-1}a)$. Vom considera un operator $\neg$ *„de complementariere"* $A\neg\rho = A\rho \wedge B\neg\rho = B\rho \wedge G\neg\rho = (A\rho \times B\rho) \setminus G\rho$. Principalele noţiuni ce le vom utiliza asupra relaţiilor binare cu denumirile lor, sînt date în tabelul următor

$\mathrm{pr}_1\rho = \{a : \exists_b\, a\rho b\}$ $\mathrm{pr}_2\rho = \{b : \exists_a\, a\rho b\} = \mathrm{pr}_1\rho^{-1}$	$\mathrm{pr}^1\rho = \{a : \forall_b\, b \in B\rho \to a\rho b\}$ $\mathrm{pr}^2\rho = \{b : \forall_a\, a \in A\rho \to a\rho b\}$
Proiecţiile relaţiei binare ρ	Coproiecţiile relaţiei binare ρ
$\sigma \circ \rho = (A\rho, B\sigma, G\sigma \circ \rho)$ unde $a\sigma \circ \rho b \Leftrightarrow \rho < a > \cap \sigma^{-1} < b > \neq \emptyset$,	$\sigma * \rho = (A\rho, B\sigma, G\sigma, * \rho)$ unde $a\sigma * \rho b \Leftrightarrow \rho < a > \cup \sigma^{-1} < b > = B\rho = A\sigma$
Compunere în categoria $\mathcal{R}$, definită dacă şi numai dacă $B\rho = A\sigma$	Compunere în categoria $\mathcal{R}^*$
$\rho^1 = \rho$; $n > 0 \to \rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$; $n < 0 \to \rho^n = (\rho^{-n})^{-1}$	$\rho^{(1)} = \rho$, $n > 0 \to \rho^{(n+1)} = \rho^{(n)} * \rho$ $n < 0 \to \rho^{(n)} = (\rho^{(-n)})^{-1}$
Puteri ale relaţiei binare „omogene" ρ (— adică $A\rho = B\rho$)	Copuneri ale relaţiei binare omogene ρ
$\omega_s\rho = \rho \circ \rho^{-1}$; $\omega_a\rho = \rho^{-1} \circ \rho$	$\omega^s\rho = \rho * \rho^{-1}$; $\omega^d\rho = \rho^{-1} * \rho$
Relaţiile de filtrare ale lui ρ	(Relaţii de cofiltrare ale lui ρ)
$[\rho, \sigma, \varkappa] = \chi \circ \sigma^{-1} \circ \rho$	$[\rho, \sigma, \chi] = \chi * \sigma^{-1} * \rho$
Produs ternar de relaţii binare (— cu aceleaşi mulţimi bază).	Coprodus ternar de relaţii binare
$\check{\rho} = (P(A\rho), P(B\rho), \check{G\rho})$,	$\hat{\rho} = (P(A\rho), P(B\rho), \hat{G\rho})$ unde
unde pentru $\alpha \subseteq A \wedge \beta \subseteq B$:	pentru $\alpha \subseteq A \wedge \beta \subseteq B$:
$\alpha\check{\rho}\beta \Leftrightarrow \beta = \bigcup_{a \in \alpha} \rho < a >$	$\alpha\hat{\rho}\beta \Leftrightarrow \beta = \bigcap_{a \in \alpha} \rho < a >$
Globalizata relaţiei binare ρ	Coglobalizata relaţiei binare ρ

Fiind dată o clasă ψ (respectiv ψ) de relaţii binare, închisă la reuniuni (respectiv intersecţii) există un singur operator majorant f^{ψ} (respectiv minorant o^{ψ}) astfel încît: 1° este

definit pe relații binare ce admit majoranți în φ, (respectiv minoranți în ψ); 2° are domeniul valorilor φ (respectiv ψ); 3° satisface condiția $f^{\varphi}(\rho) \subset \rho \Leftrightarrow \rho \in \varphi$ (respectiv $o^{\psi}(\rho) \supset \rho \Leftrightarrow \rho \in \psi$). Operatorii f^{φ} și o^{ψ} sînt numiți închideri și deschideri R i g u e t [2].

Fiind dată o propoziție logică P formulată cu predicate din teoria mulțimilor, cu predicate din teoria relațiilor binare consemnate în tabelul de mai sus și cu operatori de închidere sau deschidere Riguet, vom numi duala propoziției P, propoziția logică (P) obținută din prima prin substituirea predicatelor: $\subset, \supset, \cup, \cap, \cup, \neg$ = prin $\supset, \subset, \cap; \cup, \neg, =$, a celor consemnate în tabel prin cele situate pe aceeași linie, a operatorilor f^{φ} și o^{ψ} prin operatori $0^{\overline{\varphi}}$ și $f^{\overline{\psi}}$, unde $\overline{\varphi}(\overline{\psi})$ conține complementarele relațiilor binare din φ (respectiv ψ).

Teorema 1. *Propoziția (P) este adevărată pentru valorile σ_i (relații binare) ale variabilelor independente x_i, dacă și numai dacă P este adevărată pentru valorile $\neg\sigma_i$ ale aceloraşi variabile independente x_i.*

2. Topologii asociate. Considerăm pentru o relație $\rho = (A\rho, A\rho, G\rho)$ familia $\rho\downarrow$ de submulțimi α ale lui $A = A\rho$ ce satisfac $\check{\rho}(\alpha) \subseteq \alpha$. Evident, familia $\rho\downarrow$ conține submulțimile improprii ale lui A și este închisă la reuniuni și intersecții. Vom considera în consecință următoarele topologii pe A:

τ_ρ avînd ca deschiși elementele din $\rho\downarrow$;

θ_ρ avînd ca închiși elementele din $\rho\downarrow$, deschiși α ai acestei topologii caracterizîndu-se evident prin oricare din următoarele propoziții echivalente:

$$\check{\rho}(\neg\alpha) \supseteq \neg\alpha; \quad \alpha \cap \check{\rho}(\neg\alpha) = \varnothing; \quad \rho < a > \cap \alpha \neq \varnothing \Leftrightarrow a \in \alpha; \quad \overline{\check{\rho^{-1}}}(\alpha) \leqslant \alpha.$$

Ultima expresie asigură rapid formula:

(1) $$\rho = \sigma^{-1} \text{ implică } \theta_\rho = \tau_\rho.$$

Vom interpreta τ. și θ. drept operatori definiți pe familia $\mathcal{R}(A, A)$ a relațiilor binare omogene cu valori în $\mathbf{T}(A)$ — familia topologiilor lui A în care orice intersecție de deschiși este un deschis.

3. Operatorul τ. Un raționament inductiv simplu asigură că în ipoteza $\check{\rho}(\alpha) \subseteq \alpha (\Leftrightarrow \alpha \in \tau)$ au loc implicațiile:

$$x \in \alpha \to \rho < x > \subseteq \check{\rho}(\alpha) \subseteq \alpha \ \forall_{n \geqslant 0}\ \rho^n < x > \subseteq \alpha \to [\bigcup_{n \in N_+} \rho^n] < x > \subseteq \alpha.$$

Să observăm că relația $\bigcup_{n \in N_+} \rho^n$ constituie închiderea R i g u e t a relației binare ρ, în raport cu mulțimea relațiilor tranzitive; pentru ușurința scrierii vom nota această relație prin $|\rho|$. Se deduce acum ușor formula:

(2) $$\rho\downarrow = \mathrm{pr}_2 |\check{\rho}|.$$

Observăm succesiv echivalențele logice

(3) $$: \tau_\rho < \tau_\sigma \Leftrightarrow \mathrm{pr}_2 |\check{\rho}| \subseteq \mathrm{pr}_2 |\check{\sigma}| \Leftrightarrow \forall_{a \in A}\ \exists_{\beta \subset A}\ |\rho| ka > = |\check{\sigma}| (\beta) \Leftrightarrow \exists_{\chi \in \mathcal{R}(A,A)} |\rho| = |\sigma| \circ \chi.$$

Obținem astfel:

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă ca topologia τ_σ să fie mai fină decît topologia τ_ρ este existența unei relații binare χ astfel încît*) $|\rho| = |\sigma| \circ \chi$.*

Această teoremă și formula (1) conduc imediat la:

(4) $$\theta_\rho < \theta_\sigma \Leftrightarrow \exists_{\chi \in \mathcal{R}(A,A)} |\rho| = \chi \circ |\sigma|$$

---

*) Prelucrînd aceste condiții conform unei tehnici ce se va pune în evidență ulterior se obține:

$$\exists_\chi |\rho| = |\sigma| \circ x \Leftrightarrow |\rho \subseteq |\sigma| \circ [\neg |\sigma|^{-1} * |\rho|] \text{ respectiv:}$$

$$\exists_\chi |\rho| = \chi \circ |\rho| \circ |\sigma| \Leftrightarrow |\rho| \subseteq |\rho * [\neg |\sigma|^{-1}] \circ |\sigma|]$$

Teorema 3. *Restricțiile operatorilor τ. și θ. la familia echivalențelor mulțimii A coincid și sînt bijecții.*

Pentru demonstrație se observă că în cadrul unei topologii arbitrare τ din familia considerată de topologii $\mathbf{T}(A)$, orice mulțime închisă este (intersecția tuturor deschișilor ce o conțin deci) deschisă. În consecință, pentru orice element x din A, $\overline{\{x\}}$ constituie cea mai mică vecinătate a lui x și a oricărui eventual alt punct y din $\overline{\{x\}}$. Familia $\{\overline{\{x\}}\}_{x \in A}$ constituie evident cea mai fină acoperire deschisă a lui A. Se consideră $\rho = \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}} \times \overline{\{x\}}$ și se verifică prin calcule de rutină: $i_A \subseteq \rho$, $\rho^{-1} \subseteq \rho$, $\rho^2 \subseteq \rho$, $\tau_\rho = \tau = \theta_\rho$. Injectivitatea operatorilor τ și θ (pe familia echivalențelor) se dovedește inițial pe cazurile particulare:

a) τ coincide cu familia tuturor părților lui A;

b) părțile lui A ce nu aparțin lui τ constituie acoperire pentru A;

și apoi pe cazul general, cînd se desface A în două mulțimi A_1 și A_2 unde $A_1 = \{x : \overline{\{x\}} \in \tau\}$.

Corolar. *Pentru orice relație binară ρ există echivalențe unice ε_1 și ε_2 astfel încît:*

$$\mathrm{pr}_2 |\check{\rho}| = \mathrm{pr}_2 \check{\varepsilon}_1; \quad \mathrm{pr}_1 |\check{\rho}| = \mathrm{pr}_1 \check{\varepsilon}_2.$$

Sînt satisfăcute în acest caz formulele: $\exists_\chi |\rho| = \varepsilon_1 \circ \chi$; $\exists_\lambda \varepsilon_1 | = |\rho| \circ \lambda$; $\exists_\mu |\rho| = \mu \circ \varepsilon_2$; $\exists_\nu \varepsilon_2 = |\rho| \circ \nu$.

4. Separații. Vom considera cunoscutele axiome de separație de mai jos exprimate pentru un spațiu topologic arbitrar (A, τ).

$$T_0(A, \tau): \forall_{a \in A} \forall_{b \in A}\ a \neq b \to \exists_{\alpha \in \tau}\ a \in \alpha \wedge b \notin \alpha \vee \exists_{\beta \in \tau}\ a \notin \beta \wedge b \in \beta,$$

$$T_1(A, \tau): \forall_{a \in A} \forall_{b \in A}\ a \neq b \to \exists_{\alpha \in \tau}\ a \in \alpha \wedge b \notin \alpha,$$

$$T_2(A, \tau): \forall_{a \in A} \forall_{b \in A}\ a \neq b \to \exists_{\alpha \in \tau} \exists_{\beta \in \tau}\ a \in \alpha \wedge b \in \beta \wedge \alpha \cap \beta = \varnothing \text{ (Hausdorff)},$$

$$T_{2a}(A, \tau): \forall_{a \in A} \forall_{b \in A}\ A \neq b \to \exists_{\alpha \in \tau} \exists_{\beta \in \tau}\ a \in \alpha \wedge b \in \beta \wedge \overline{\alpha} \cap \overline{\beta} = \varnothing \text{ (Urison)},$$

$$T_3(A, \tau): \forall_{a \in A} \forall_{B \in A}\ a \in \overline{B} \to \exists_{\alpha \in \tau} \exists_{\beta \in \tau}\ a \in \alpha \wedge \overline{B} \in \alpha \wedge \alpha \cap \beta = \varnothing.$$

În cazul particular al topologiilor (A, τ_ρ) unde ρ este tranzitivă, se obțin formulele:

$$T_0(A, \tau_\rho) \Leftrightarrow (\neg\rho \circ \rho^{-1}) \cup (\rho \circ \neg\rho^{-1}) \cup i_A = A \times A,$$

$$T_1(A, \tau_\rho) \Leftrightarrow (\neg\rho \circ \rho^{-1}) \cup i_A = A \times A,$$

$$T_2(A, \tau_\rho) \Leftrightarrow \rho \circ \omega_d \rho \circ \rho^{-1} = A \times A,$$

$$T_{2a}(A, \tau_\rho) \Leftrightarrow [\rho \circ [\omega_d \rho \cup \neg(\omega_d \rho)^3] \circ \rho^{-1}] \cup i_A = A \times A,$$

$$T_3(A, \tau_\rho) \Leftrightarrow \forall_{\alpha \in A} (\overline{\check{\neg\rho}})(\alpha) \times \rho(\alpha) \subset \rho \circ \neg\omega_d \rho \circ \rho^{-1}.$$

5. Continuitate. Fie (A, τ) și (B, θ) spații topologice arbitrare. Elementele χ din $\mathcal{R}(A, B)$ ce satisfac $\forall_{\alpha \in \tau} \check{\chi}(\alpha) \in \theta$ se vor numi relații binare *deschise* și vor alcătui mulțimea $\mathcal{R}^D(A, \tau; B, \theta)$. Elementele χ din $\mathcal{R}(A, B)$ cu proprietatea duală: $\forall_{\alpha \in \tau} \chi(\alpha) \in \theta$ se vor numi relații binare *închise* și vor alcătui $\mathcal{R}^I(A, \tau; B, \theta)$. Elementele χ ce satisfac $\chi^{-1} \in \mathcal{R}^D(B, \theta; A, \tau)$ se numesc relații binare *continui* și alcătuiesc mulțimea notată $\mathcal{R}^C(A, \tau; B, \theta)$. Noțiunea duală: relație *cocontinuă*; mulțimea lor: $\mathcal{R}^{(C)}(A, \tau; B, \theta)$. Elementele χ din $\mathcal{R}(A, B)$ ce constituie submulțimi deschise (respectiv închise) în $A \times B$ alcătuiesc $\mathcal{R}^0(A, \tau; B, \theta)$ respectiv $R^F(A, \tau; B, \theta)$. Pentru $\tau = \tau_\rho$ și $\theta = \tau_\sigma$ se obțin formulele:

5° $$\chi \in \mathcal{R}^C(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \Leftrightarrow \exists_\lambda \mathcal{R}(B, A) \in \chi^{-1} \circ |\sigma| = |\rho| \circ \lambda,$$

6° $$\chi \in \mathcal{R}^{(C)}(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \Leftrightarrow \exists_\mu \mathcal{R}(A, B) \in |\sigma| \circ \chi = \mu \circ |\rho|,$$

7° $$\chi \in \mathcal{R}^D(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \Leftrightarrow \exists_\nu \mathcal{R}(A, B) \in \chi \circ |\rho| = |\sigma| \circ \nu,$$

8° $$\chi \in \mathcal{R}^I(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \Leftrightarrow \exists_\eta \mathcal{R}(B, A) \in |\rho| \circ \chi^{-1} = \eta \circ |\sigma|,$$

9° $$\chi \in \mathcal{R}^0(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \Leftrightarrow (\omega_s |\sigma|) \circ \chi \circ (\omega_s |\rho|) \subseteq \chi$$

10° $$\chi \in \mathcal{R}^F(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \Leftrightarrow [(\omega_s |\sigma|) \circ (\neg\chi) \circ (\omega_s |\rho|]\, \chi \cap = \varnothing.$$

Se constată ușor:

11° $\mathcal{R}^0(A, \tau; B, 0) \subseteq \mathcal{R}^C(A, \tau; B, 0) \cap \mathcal{R}^D(A, \tau; B, 0)$.

6. Deschideri asociate. Mulțimile $\mathcal{R}^S(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma)$, pentru $S \in \{C, (C), D, I, 0\}$ sînt închise față de reuniuni și conțin ficeare relația vidă; determină deci operatori de deschidere Riguet: $S^\sigma_\rho : \mathcal{R}(A, B) \to \mathcal{R}^S(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma)$, unde evident $S^\sigma_\rho \chi$ constituie reuniunea tuturor elementelor π ce satisfac:

$$\pi \in \mathcal{R}^S(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \wedge \pi \subseteq \chi.$$

Cea mai amplă submulțime deschisă (în topologia τ_ρ) a mulțimii $\check{\chi}(A_0)$ este evident exprimată prin: $\operatorname{Int} \tau_\sigma \chi(A_0) = \bigcup_{|\sigma|<x> \subseteq \check{\chi}(\alpha)} \tilde{\sigma} < x > = \bigcup_{x \in [(\neg|\sigma|^{-1}) * \check{\chi}] < A_0 >} |\sigma| < x > = \overline{|\sigma \circ (\neg |\sigma|^{-1} * \check{\chi})} < A_0 >$

Deducem astfel:

$$\forall_{\alpha \in A} (D^\sigma_\rho \chi) < a > = \bigcap_{x \in \hat{\rho}^{-1} < a >} (|\sigma| \circ [(\neg |\sigma|^{-1}) * \chi] \circ |\rho|) < x > = [(|\sigma| \circ [(\neg |\sigma|^{-1}) * \chi] | |\rho|) * \neg |\rho|^{-1}] < a >$$

și prin urmare:

12° $D^\sigma_\rho \chi = (|\sigma| \circ [(\neg |\sigma|^{-1}) * \chi] \circ |\rho|) * \neg |\rho|^{-1}$.

Se constată imediat și egalitățile:

13° $C^\sigma_\rho \chi = D^\rho_\sigma \chi = [|\rho| \circ (\neg |\rho|^{-1} * \chi^{-1}) \circ |\sigma|] * \neg |\sigma|^{-1}$

14° $I^\sigma_\rho \chi = D^{\sigma^{-1}}_{\rho^{-1}} \chi = [|\sigma|^{-1} \circ (\neg |\sigma| * \chi) \circ |\rho|^{-1}] * \neg |\rho|$

15° $(C)^\sigma_\rho \chi = C^{\sigma^{-1}}_{\rho^{-1}} \chi = [|\rho|^{-1} \circ (\neg \circ (\neg |\rho| * \chi^{-1}) \circ |\sigma|^{-1}] * \neg |\sigma|$

prin calcul direct se obține și formula:

16° $O^\sigma_\rho \chi = [\omega_s |\sigma| \circ \chi \circ \omega_s |\rho|] \cup \chi$.

Operatorul F^σ_ρ definit prin $F^\sigma_\rho \chi = \neg(\omega_s |\sigma| \circ \neg \chi \circ \omega_s |\rho|) \cup \chi$ reprezintă evident închiderea Riguet corespunzătoare familiei $\mathcal{R}^F(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma)$.

Explicitînd în baza notațiilor introduse la 1, considerații din [3] obținem: pentru $\varphi \in \mathcal{R}(A, C)$ și $\psi \in \mathcal{R}(B, C)$ reuniunea tuturor soluțiilor ξ a ecuației $\psi \circ \xi < \varphi$ este $\neg \psi^{-1} * \varphi$; condiția necesară și suficientă ca ecuația $\psi \circ \xi = \varphi$ să admită cel puțin o soluție este: $\varphi \subseteq \subseteq \psi \circ [(\neg \psi^{-1}) * \varphi]$.

Obținem următoarele explicitări ale condițiilor 5° – 8°, dificil de obținut prin considerații directe:

17° $\chi \in R^C(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq C^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow \chi^{-1} \circ |\sigma| \subseteq |\rho| \circ [(\neg |\rho|^{-1}) * (\chi^{-1} \circ |\sigma|)]$

18° $\chi \in R^{(C)}(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq (C)^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow |\tau| \circ \chi \subseteq [(|\tau| \circ \chi) * \neg |\rho|^{-1}] \circ |\rho|$

19° $\chi \in R^D(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq D^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow \chi \circ |\rho| \subseteq |\tau| \circ [(\neg |\sigma|^{-1}) * (\chi \circ |\rho|)]$

20° $\chi \in R^I(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq I^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow |\rho| \circ \chi \subseteq [(|\rho| \circ \chi) * \neg |\sigma|^{-1}] \circ |\sigma|$.

BIBLIOGRAFIE

1. Brânzei, D. — *Structuri de varietate generalizată* (cap. I: Categorii de relații binare) Univ. Al. I. Cuza, 1975.
2. Riguet, J. — *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois.* Bull. Soc. Math. France, 76 (1948), 114—155.
3. Vagner, V. V. — *Teoria relațiilor și algebra hărților parțiale.* (l. rusă). În vol. *Teoria semigrupurilor și aplicațiile ei*, Saratov, 1965,

Primită la 20 VI 1975

Facultatea de matematică
Univ. Al. I. Cuza — Iași,

Analele științifice ale Universității „AL. I. CUZA" din Iași
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

ON THE EXISTENCE OF HALF-BOL LOOPS

BY

B. L. SHARMA and L. V. SABININ

1. Introduction: We shall say that a loop $(Q, \circ)$ is a Half-Bol loop (or left Half-Bol loop) if there exists a mapping $\tau: Q \to Q$ such that

(1) $$\tau(x) \circ [y \circ (x \circ z)] = [\tau(x) \circ (y \circ x)] \circ z,$$

for all $x, y, z \in Q$.

We shall call (1) left Half-Bol property (LHBP). It is evident from (1) that every Bol loop is a Half-Bol loop with $\tau = \mathrm{id}_Q$. The object of this paper is to construct an example of a Half-Bol loop which is not Bol.

For the convenience of reader, we shall describe a special class of Veblen-Wedderburn systems, called André systems [1].

Let $\mathcal{F}$ be a field and $\sigma \notin \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, such that

$$\sigma^n = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}, \quad \sigma^k \neq \mathrm{id}_{\mathcal{F}}, \text{ for } 0 < k < n, \text{ then}$$

(2) $$v : x \to x . \sigma(x) . \sigma^2(x) . \ldots\ldots . \sigma^{n-1}(x)$$

is well-defined. Let $\mathcal{X}$ be a fixed field of σ, then $v(x) \in \mathcal{X}$ can be easily verified.

Further we define the mapping $\mu : K \to Z_n$ with the only condition

(3) $$\mu(0) = \mu(1) = 0.$$

It is clear from the definitions of v and μ that $\mu . v$ has sense. Next we introduce

(4) $$\sigma[x] = \sigma^{\mu v(x)}$$

and define the law of composition '$\circ$' on $\mathcal{F}$ by

(5) $$x \circ y = x . \sigma[x](y).$$

Thus $Q = \mathcal{F} - \{O_{\mathcal{F}}\}'$ equipped with the composition '$\circ$' is a loop having $1_{\mathcal{F}}$ as identity Indeed,

$$a \circ y = b \Rightarrow a . \sigma[a](y) = b \Rightarrow y = (\sigma[a])^{-1}(b . a^{-1});$$
$$x \circ a = b \Rightarrow x . \sigma[x](a) = b \Rightarrow v(x) . \sigma[x](v(a)) = v(b)$$
$$\Rightarrow v(x) v(a) = v(b) \Rightarrow v(x) = v(ba^{-1}) \Rightarrow \sigma[x] = \sigma[ba^{-1}]$$
$$\Rightarrow x . \sigma[ba^{-1}](a) = b \Rightarrow x = b . \{\sigma[ba^{-1}](a)\}^{-1}.$$

Thus $(\mathcal{F}, +, \circ)$ is known as André systems [1], but in particular is a left quasifield [3] or Veblen-Wedderburn systems [2].

2. Example of Half-Bol Loop which is not Bol. Let us consider $\mathcal{F} = \mathcal{F}G(P^2)$, the finite field with P^2 elements, where $p \geqslant 5$ is a prime number. The automorphism $\sigma : x \to x^p$ is of order two i. e. $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. According to André systems described in [1], we define the mapping $\mu : \mathcal{X} \to Z_2$ such that

(6) $$\mu(0) = \mu(1) = 0, \quad \mu(k) = 1, \quad \text{for } k \neq 1,$$

$k \in \mathcal{X}$, where $\mathcal{X}$ is a fixed field of σ.