Se constată ușor:

11° $\mathcal{R}^0(A, \tau; B, 0) \subseteq \mathcal{R}^C(A, \tau; B, 0) \cap \mathcal{R}^D(A, \tau; B, 0)$.

6. Deschideri asociate. Mulțimile $\mathcal{R}^S(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma)$, pentru $S \in \{C, (C), D, I, 0\}$ sînt închise față de reuniuni și conțin fiecare relația vidă; determină deci operatori de deschidere Riguet: $S^\sigma_\rho : \mathcal{R}(A, B) \to \mathcal{R}^S(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma)$, unde evident $S^\sigma_\rho \chi$ constituie reuniunea tuturor elementelor π ce satisfac:

$$\pi \in \mathcal{R}^S(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \wedge \pi \subseteq \chi.$$

Cea mai amplă submulțime deschisă (în topologia τ_ρ) a mulțimii $\check{\chi}(A_0)$ este evident exprimată prin: $\operatorname{Int}_{\tau_\sigma} \chi(A_0) = \bigcup_{|\sigma|<x> \subseteq \check{\chi}(a)} \tilde{\sigma} < x > = \bigcup_{x \in [(\urcorner|\sigma|^{-1}) * \check{\chi}] < A_0 >} |\sigma| < x > = \overline{|\sigma \circ (\urcorner |\sigma|^{-1} * \check{\chi})} < A_0 >$

Deducem astfel:

$$\forall_{a \in A} (D^\sigma_\rho \chi) < a > = \bigcap_{x \in \hat{\rho}^{-1} < a >} (|\sigma| \circ [(\urcorner |\sigma|^{-1}) * \chi] \circ |\rho|) < x > = [(|\sigma| \circ [(\urcorner |\sigma|^{-1}) * \chi] | |\rho|) * \urcorner |\rho|^{-1}] < a >$$

și prin urmare:

12° $D^\sigma_\rho \chi = (|\sigma| \circ [(\urcorner |\sigma|^{-1}) * \chi] \circ |\rho|) * \urcorner |\rho|^{-1}$.

Se constată imediat și egalitățile:

13° $C^\sigma_\rho \chi = D^\rho_\sigma \chi = [|\rho| \circ (\urcorner |\rho|^{-1} * \chi^{-1}) \circ |\sigma|] * \urcorner |\sigma|^{-1}$

14° $I^\sigma_\rho \chi = D^{\sigma^{-1}}_{\rho^{-1}} \chi = [|\sigma|^{-1} \circ (\urcorner |\sigma| * \chi) \circ |\rho|^{-1}] * \urcorner |\rho|$

15° $(C)^\sigma_\rho \chi = C^{\sigma^{-1}}_{\rho^{-1}} \chi = [|\rho|^{-1} \circ (\urcorner \circ (\urcorner |\rho| * \chi^{-1}) \circ |\sigma|^{-1}] * \urcorner |\sigma|$

prin calcul direct se obține și formula:

16° $O^\sigma_\rho \chi = [\omega_s |\sigma| \circ \chi \circ \omega_s |\rho|] \cup \chi$.

Operatorul F^σ_ρ definit prin $F^\sigma_\rho \chi = \urcorner(\omega_s |\sigma| \circ \urcorner \chi \circ \omega_s |\rho|) \cup \chi$ reprezintă evident închiderea Riguet corespunzătoare familiei $\mathcal{R}^F(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma)$.

Explicitînd în baza notațiilor introduse la 1, considerații din [3] obținem: pentru $\varphi \in \mathcal{R}(A, C)$ și $\psi \in \mathcal{R}(B, C)$ reuniunea tuturor soluțiilor ξ a ecuației $\psi \circ \xi < \varphi$ este $\urcorner \psi^{-1} * \varphi$; condiția necesară și suficientă ca ecuația $\psi \circ \xi = \varphi$ să admită cel puțin o soluție este: $\varphi \subseteq \psi \circ [(\urcorner \psi^{-1}) * \varphi]$.

Obținem următoarele explicitări ale condițiilor 5° — 8°, dificil de obținut prin considerații directe:

17° $\chi \in R^C(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq C^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow \chi^{-1} \circ |\sigma| \subseteq |\rho| \circ [(\urcorner |\rho|^{-1}) * (\chi^{-1} \circ |\sigma|)]$

18° $\chi \in R^{(C)}(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq (C)^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow |\tau| \circ \chi \subseteq [(|\tau| \circ \chi) * \urcorner |\rho|^{-1}] \circ |\rho|$

19° $\chi \in R^D(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq D^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow \chi \circ |\rho| \subseteq |\tau| \circ [(\urcorner |\sigma|^{-1}) * (\chi \circ |\rho|)]$

20° $\chi \in R^I(A, \tau_\rho; B, \tau_\sigma) \leftrightarrow \chi \subseteq I^\sigma_\rho \chi \leftrightarrow |\rho| \circ \chi \subseteq [(|\rho| \circ \chi) * \urcorner |\sigma|^{-1}] \circ |\sigma|$.

BIBLIOGRAFIE

1. Brânzei, D. — *Structuri de varietate generalizată* (cap. I: Categorii de relații binare) Univ. Al. I. Cuza, 1975.
2. Riguet, J. — *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois.* Bull. Soc. Math. France, 76 (1948), 114—155.
3. Vagner, V. V. — *Teoria relațiilor și algebra hărților parțiale.* (l. rusă). În vol. *Teoria semigrupurilor și aplicațiile ei*, Saratov, 1965,

Primită la 20 VI 1975

Facultatea de matematică
Univ. Al. I. Cuza — Iași,

Analele științifice ale Universității „AL. I. CUZA" din Iași
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

ON THE EXISTENCE OF HALF-BOL LOOPS

BY

B. L. SHARMA and L. V. SABININ

1. Introduction: We shall say that a loop $(Q, \circ)$ is a Half-Bol loop (or left Half-Bol loop) if there exists a mapping $\tau : Q \to Q$ such that

(1) $$\tau(x) \circ [y \circ (x \circ z)] = [\tau(x) \circ (y \circ x)] \circ z,$$

for all $x, y, z \in Q$.

We shall call (1) left Half-Bol property (LHBP). It is evident from (1) that every Bol loop is a Half-Bol loop with $\tau = \mathrm{id}_Q$. The object of this paper is to construct an example of a Half-Bol loop which is not Bol.

For the convenience of reader, we shall describe a special class of Veblen-Wedderburn systems, called André systems [1].

Let $\mathcal{F}$ be a field and $\sigma \notin \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, such that

$$\sigma^n = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}, \quad \sigma^k \neq \mathrm{id}_{\mathcal{F}}, \text{ for } 0 < k < n, \text{ then}$$

(2) $$v : x \to x . \sigma(x) . \sigma^2(x) . \ldots\ldots . \sigma^{n-1}(x)$$

is well-defined. Let $\mathcal{X}$ be a fixed field of σ, then $v(x) \in \mathcal{X}$ can be easily verified.

Further we define the mapping $\mu : K \to \mathbf{Z}_n$ with the only condition

(3) $$\mu(0) = \mu(1) = 0.$$

It is clear from the definitions of v and μ that $\mu . v$ has sense. Next we introduce

(4) $$\sigma[x] = \sigma^{\mu v(x)}$$

and define the law of composition '$\circ$' on $\mathcal{F}$ by

(5) $$x \circ y = x . \sigma[x](y).$$

Thus $Q = \mathcal{F} - \{O_{\mathcal{F}}\}'$ equipped with the composition '$\circ$' is a loop having $1_{\mathcal{F}}$ as identity Indeed,

$$a \circ y = b \Rightarrow a . \sigma[a](y) = b \Rightarrow y = (\sigma[a])^{-1}(b . a^{-1});$$
$$x \circ a = b \Rightarrow x . \sigma[x](a) = b \Rightarrow v(x) . \sigma[x](v(a)) = v(b)$$
$$\Rightarrow v(x) v(a) = v(b) \Rightarrow v(x) = v(ba^{-1}) \Rightarrow \sigma[x] = \sigma[ba^{-1}]$$
$$\Rightarrow x . \sigma[ba^{-1}](a) = b \Rightarrow x = b . \{\sigma[ba^{-1}](a)\}^{-1}.$$

Thus $(\mathcal{F}, +, \circ)$ is known as André systems [1], but in particular is a left quasifield [3] or Veblen-Wedderburn systems [2].

2. Example of Half-Bol Loop which is not Bol. Let us consider $\mathcal{F} = \mathcal{F}G(P^2)$, the finite field with P^2 elements, where $p \geqslant 5$ is a prime number. The automorphism $\sigma : x \to x^p$ is of order two i. e. $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. According to André systems described in [1], we define the mapping $\mu : \mathcal{X} \to \mathbf{Z}_2$ such that

(6) $$\mu(0) = \mu(1) = 0, \quad \mu(k) = 1, \quad \text{for } k \neq 1,$$

$k \in \mathcal{X}$, where $\mathcal{X}$ is a fixed field of σ.

It is easy to verify that $\mathcal{X} \simeq \mathcal{F}G(p)$. We are interested in the loop structure of $Q = \mathcal{F} - \{O\}_{\mathcal{F}}$. It has been shown in [3] that $(Q, \circ)$ is not a Bol loop. But we claim that $(Q, \circ)$ is a Half-Bol loop. To prove our assertion we take $\tau(x) = x^{-1}$ (x^{-1} is the inverse of x in $\mathcal{F}$ with respect to $\cdot$). From the LHS of (1), we have

$$
\begin{aligned}
&\tau(x) \circ [y \circ (x \circ z)] = x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \circ (x \circ z)) = \\
(7) \qquad &= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \cdot \sigma[y] (x \cdot z)) = x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] \cdot (y \cdot \sigma[y] (x \cdot \sigma[x] (z))) \\
&= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y) \cdot \{\sigma[x^{-1}] \sigma[y]\} (x) \cdot \{\sigma[x^{-1}] \sigma[y] \sigma [x]\} (z).
\end{aligned}
$$

Also from the RHS of (1), we have

$$
\begin{aligned}
&[\tau(x) \circ (y \circ x)] \circ z = [x^{-1} \circ (y \circ x)] \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z) = \\
&= [x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \circ x] \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z) = \\
(8) \qquad &= [x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \cdot \sigma[y] (x))] \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z) \\
&= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}](y) \cdot \{\sigma[x^{-1}] \sigma[y]\} (x) \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z).
\end{aligned}
$$

Consequently we need only to show that

$$
(9) \qquad \sigma[x^{-1}] \sigma[y] \sigma[x] = \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)]
$$

to prove the assertion. Firstly

$$
\sigma[x^{-1}] = \sigma^{\mu v(x^{-1})} = \sigma^{\mu(v(x)^{-1})} = \begin{cases} \sigma \text{ if } v(x) \neq 1_{\mathcal{F}} \\ \mathrm{id}_{\mathcal{F}} \text{ if } v(x) = 1_{\mathcal{F}}, \end{cases}
$$

because of (6);

$$
\sigma[x] = \sigma^{\mu v(x)} = \begin{cases} \sigma \text{ if } v(x) \neq 1_{\mathcal{F}} \\ \mathrm{id}_{\mathcal{F}} \text{ if } v(x) = 1_{\mathcal{F}}, \end{cases}
$$

as well. Thus we have

$$
(10) \qquad \sigma[x] = \sigma[x^{-1}], \ (\sigma[x])^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{F}} \text{ and } \sigma[x] \ \sigma[x^{-1}] = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}.
$$

Secondly

$$
\begin{aligned}
&v[x^{-1} \circ (y \circ x)] = v[x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \circ x)] = v(x^{-1}). \\
&\sigma[x^{-1}] v(y \circ x) = v(x^{-1}) \cdot v(y \circ x) = v(x^{-1}) \cdot v(y \cdot \sigma[y] (x)) = v(x^{-1}) \cdot v(y) \cdot \sigma[y] v(x) \\
&= v(x^{-1}) \cdot v(y) \cdot v(x) = v(x^{-1} yx) = v(y).
\end{aligned}
$$

Thus we have

$$
(11) \qquad \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] = \sigma^{\mu v(x)^{-1}} \circ (y \circ x)) = \sigma^{\mu v(y)} = \sigma[y].
$$

Finally (10) and (11) imply (9). This completes the proof.

3. The construction of this example suggests that this new class of loops is of great importance in projective geometry. In [3] it has been shown that Veblen-Wedderburn systems with Bol property have direct concern to Pappus theorem in projective geometry. Therefore we propose the problem "what is the geometrical meaning of Veblen-Wedderburn systems with the Half-Bol property"?

The loops with LHP will be the subject matter of next communication.

REFERENCES

1. André J. — *Uber Nicht - Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*. Math. Z. 60, pp. 156—186. 1954.
2. Hall M. — *The Theory of groups*. New-York. Macmillian — 1959.
3. Burn R. P. — *Bol Quasi-Fields and Pappus Theorem*. Math. Z. 105. pp. 351—364, 1968.

Received 6. III 1975

Department of Mathematics,
University of Ife,
Ile — Ife
Nigeria

Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

TOPOLOGIE $\mathcal{C}$

PAR

RACHID BEBBOUCHI

Le but de cet article est de définir une topologie sur l'espace d'applications de classe $C^r (0 \leqslant r \leqslant +\infty)$ entre deux variétés banachiques X et Y, qui soit plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact dans le cas de dimension finie et qui en généralise les propriétés dans le cas de dimension infinie.

1. Topologie $\mathcal{C}^0$. 1.1 Proposition. *Soient X un espace topologique, Y un espace métrique et A un cône de fonctions semi-continues inférieurement (s. c. i.) de X dans $\overline{R}_+$, jamais nulles, qui vérifie les propriétés suivantes A_1 : i) si f et g sont deux éléments de A, alors $\inf(f, g)$ est un élément de A, ii) si f est un élément de A et g une fonction s. c. i. supérieure ou égale à f, alors g est un élément de A, iii) si f est un élément de A et φ une fonction continue croissante de $\overline{R}_+$ dans lui-même, alors $\varphi \circ f$ est un élément de A. A_2 : pour tout point x de X, on a $\inf_{\alpha \in A} \alpha(x) = 0$. A_3 : il existe un recouvrement ouvert dénombrable $(\gamma_i)_{i \in I}$ de X tel que la fonction $(\chi(\gamma_i))$ égale à 1 sur $\overline{\gamma}_i$ et infinie en dehors soit un élément de A, pour tout i.*

Alors la structure uniforme E_A donnée par la base d'entourages de la forme

$$
\mathcal{E}_\alpha = \{(f, g) \in F(X, Y) \times F(X, Y) \, ; \ \forall x \in X \, ; \ d(f(x), g(x)) < \alpha(x)\}
$$

est séparée, ne dépend pas de la métrique d choisie sur Y mais de la structure uniforme qu'elle définit sur Y, et $F(X, Y)$ est un espace de Baire pour cette structure. De plus si Y est complet, la restriction de la structure E_A à $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est complète.

1.2. Exemples de structures E_A. i) A est l'ensemble de toutes les fonctions s. c. i. jamais nulles de X dans $\overline{R}_+$. On obtient alors une structure uniforme que l'on notera $\mathcal{C}^0$ ainsi que la topologie associée.

ii) A est l'ensemble des fonctions s. c. i. supérieures ou égales à une fonction constante. Ce sera alors la structure de la convergence uniforme.

iii) A est l'ensemble des fonctions φ s. c. i. telles que $\varphi^{-1}(\overline{R}_+ - \{\pm\infty\})$ soit compact. Nous obtenons la structure de la convergence uniforme sur tout compact que l'on note ordinairement C^0 ainsi que la topologie associée.

1.3. Propriétés de la topologie $\mathcal{C}^0$. D'après la proposition 1.1, la topologie $\mathcal{C}^0$ est donc séparée ; elle rend $F(X, Y)$ espace de Baire et complet si Y est complet.

Nous pouvons citer deux autres propriétés :

a) *Si X est métrique et localement compact, l'ensemble $\mathrm{Hom}_p(X, Y)$ des applications propres de X dans Y est ouvert pour la topologie $\mathcal{C}^0$.*

b) *Soient U un ouvert d'un espace métrique X et f une application continue de X dans un espace métrique Y. Alors il existe un $\mathcal{C}^0$-voisinage Ω de $f|U$ dans $\mathrm{Hom}(U, Y)$ tel que, pour tout élément g de ce voisinage, l'application γ_g égale à g sur U et $f|X - U$ sur le complémentaire soit continue et que l'application γ ainsi définie de Ω dans $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soit $\mathcal{C}^0$-continue.*

Preuve : a) Il est aisé de voir que, si f est une application propre de X dans Y, $f(x)$ est localement compact (utiliser [1]). Considérons alors le recouvrement ouvert de Y formé de $Y - f(X)$ et des boules $B(y, \rho_y)$ centrées aux points de $f(X)$ et telles que $\overline{B(y, \rho_y)} \cap f(X)$ soit compact. Il existe un recouvrement plus fin, localement fini, formé d'ouverts qui ne rencontrent pas $f(X)$ et d'une famille $(U_i)_I$ d'ouverts qui rencontrent $f(X)$ et telle que $\overline{U_i \cap f(X)}$ soit compact pour tout i.