It is easy to verify that $\mathcal{X} \simeq \mathcal{F}G(p)$. We are interested in the loop structure of $Q = \mathcal{F} - \{O\}_{\mathcal{F}}$. It has been shown in [3] that $(Q, \circ)$ is not a Bol loop. But we claim that $(Q, \circ)$ is a Half-Bol loop. To prove our assertion we take $\tau(x) = x^{-1}$ (x^{-1} is the inverse of x in $\mathcal{F}$ with respect to $(\cdot, \cdot)$). From the LHS of (1), we have

$$
\begin{aligned}
\tau(x) \circ [y \circ (x \circ z)] &= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \circ (x \circ z)) = \\
= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \cdot \sigma[y] (x \circ z)) &= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] \cdot (y \cdot \sigma[y] (x \cdot \sigma[x] (z))) \\
= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y) \cdot \{\sigma[x^{-1}] \sigma[y]\} (x) &\cdot \{\sigma[x^{-1}] \sigma[y] \sigma [x]\} (z).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Also from the RHS of (1), we have

$$
\begin{aligned}
[\tau(x) \circ (y \circ x)] \circ z = [x^{-1} \circ (y \circ x)] \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z) &= \\
= [x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \circ x] \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z) &= \\
= [x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \cdot \sigma[y] (x))] \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z) &= \\
= x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}](y) \cdot \{\sigma[x^{-1}] \sigma[y]\} (x) \cdot \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] (z).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Consequently we need only to show that

$$\sigma[x^{-1}] \sigma[y] \sigma[x] = \sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] \tag{9}$$

to prove the assertion. Firstly

$$\sigma[x^{-1}] = \sigma^{\mu v(x^{-1})} = \sigma^{\mu(v(x))^{-1}} = \begin{cases} \sigma \text{ if } v(x) \neq 1_{\mathcal{F}} \\ \mathrm{id}_{\mathcal{F}} \text{ if } v(x) = 1_{\mathcal{F}}, \end{cases}$$

because of (6);

$$\sigma[x] = \sigma^{\mu v(x)} = \begin{cases} \sigma \text{ if } v(x) \neq 1_{\mathcal{F}} \\ \mathrm{id}_{\mathcal{F}} \text{ if } v(x) = 1_{\mathcal{F}}, \end{cases}$$

as well. Thus we have

$$\sigma[x] = \sigma[x^{-1}], \ (\sigma[x])^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{F}} \text{ and } \sigma[x] \ \sigma[x^{-1}] = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}. \tag{10}$$

Secondly

$$
\begin{aligned}
v[x^{-1} \circ (y \circ x)] &= v[x^{-1} \cdot \sigma[x^{-1}] (y \circ x)] = v(x^{-1}). \\
\sigma[x^{-1}] v(y \circ x) &= v(x^{-1}) \cdot v(y \circ x) = v(x^{-1}) \cdot v(y \cdot \sigma[y] (x)) = v(x^{-1}) \cdot v(y) \cdot \sigma[y] v(x) \\
&= v(x^{-1}) \cdot v(y) \cdot v(x) = v(x^{-1} yx) = v(y).
\end{aligned}
$$

Thus we have

$$\sigma[x^{-1} \circ (y \circ x)] = \sigma^{\mu v(x)^{-1}} \circ (y \circ x)) = \sigma^{\mu v(y)} = \sigma[y]. \tag{11}$$

Finally (10) and (11) imply (9). This completes the proof.

3. The construction of this example suggests that this new class of loops is of great importance in projective geometry. In [3] it has been shown that Veblen-Wedderburn systems with Bol property have direct concern to Pappus theorem in projective geometry. Therefore we propose the problem "what is the geometrical meaning of Veblen-Wedderburn systems with the Half-Bol property" ?

The loops with LHP will be the subject matter of next communication.

REFERENCES

1. André J. — *Uber Nicht - Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*. Math. Z. 60, pp. 156—186. 1954.
2. Hall M. — *The Theory of groups*. New-York. Macmillian — 1959.
3. Burn R. P. — *Bol Quasi-Fields and Pappus Theorem*. Math. Z. 105. pp. 351—364, 1968.

Received 6. III 1975

Department of Mathematics,
University of Ife,
Ile — Ife
Nigeria

Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

TOPOLOGIE $\mathcal{C}$

PAR

RACHID BEBBOUCHI

Le but de cet article est de définir une topologie sur l'espace d'applications de classe $C^r (0 \leqslant r \leqslant +\infty)$ entre deux variétés banachiques X et Y, qui soit plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact dans le cas de dimension finie et qui en généralise les propriétés dans le cas de dimension infinie.

1. Topologie $\mathcal{C}^0$. 1.1 Proposition. *Soient X un espace topologique, Y un espace métrique et A un cône de fonctions semi-continues inférieurement (s. c. i.) de X dans $\overline{R}_+$, jamais nulles, qui vérifie les propriétés suivantes A_1 : i) si f et g sont deux éléments de A, alors $\inf(f, g)$ est un élément de A, ii) si f est un élément de A et g une fonction s. c. i. supérieure ou égale à f, alors g est un élément de A, iii) si f est un élément de A et φ une fonction continue croissante de $\overline{R}_+$ dans lui-même, alors $\varphi \circ f$ est un élément de A. A_2 : pour tout point x de X, on a $\inf_{\alpha \in A} \alpha(x) = 0$. A_3 : il existe un recouvrement ouvert dénombrable $(\gamma_i)_{i \in I}$ de X tel que la fonction $(\chi(\gamma_i))$ égale à 1 sur $\overline{\gamma}_i$ et infinie en dehors soit un élément de A, pour tout i.*

Alors la structure uniforme E_A donnée par la base d'entourages de la forme

$$\mathcal{E}_\alpha = \{(f, g) \in F(X, Y) \times F(X, Y) \, ; \ \forall x \in X \, ; \ d(f(x), g(x)) < \alpha(x)\}$$

est séparée, ne dépend pas de la métrique d choisie sur Y mais de la structure uniforme qu'elle définit sur Y, et $F(X, Y)$ est un espace de Baire pour cette structure. De plus si Y est complet, la restriction de la structure E_A à $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est complète.

1.2. Exemples de structures E_A. i) A est l'ensemble de toutes les fonctions s. c. i. jamais nulles de X dans $\overline{R}_+$. On obtient alors une structure uniforme que l'on notera $\mathcal{C}^0$ ainsi que la topologie associée.

ii) A est l'ensemble des fonctions s. c. i. supérieures ou égales à une fonction constante. Ce sera alors la structure de la convergence uniforme.

iii) A est l'ensemble des fonctions φ s. c. i. telles que $\varphi^{-1}(\overline{R}_+ - \{\pm\infty\})$ soit compact. Nous obtenons la structure de la convergence uniforme sur tout compact que l'on note ordinairement C^0 ainsi que la topologie associée.

1.3. Propriétés de la topologie $\mathcal{C}^0$. D'après la proposition 1.1, la topologie $\mathcal{C}^0$ est donc séparée ; elle rend $F(X, Y)$ espace de Baire et complet si Y est complet.

Nous pouvons citer deux autres propriétés :

a) *Si X est métrique et localement compact, l'ensemble $\mathrm{Hom}_p(X, Y)$ des applications propres de X dans Y est ouvert pour la topologie $\mathcal{C}^0$.*

b) *Soient U un ouvert d'un espace métrique X et f une application continue de X dans un espace métrique Y. Alors il existe un $\mathcal{C}^0$-voisinage Ω de $f|U$ dans $\mathrm{Hom}(U, Y)$ tel que, pour tout élément g de ce voisinage, l'application γ_g égale à g sur U et $f|X - U$ sur le complémentaire soit continue et que l'application γ ainsi définie de Ω dans $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soit $\mathcal{C}^0$-continue.*

Preuve : a) Il est aisé de voir que, si f est une application propre de X dans Y, $f(x)$ est localement compact (utiliser [1]). Considérons alors le recouvrement ouvert de Y formé de $Y - f(X)$ et des boules $B(y, \rho_y)$ centrées aux points de $f(X)$ et telles que $\overline{B(y, \rho_y)} \cap f(X)$ soit compact. Il existe un recouvrement plus fin, localement fini, formé d'ouverts qui ne rencontrent pas $f(X)$ et d'une famille $(U_i)_I$ d'ouverts qui rencontrent $f(X)$ et telle que $\overline{U_i} \cap f(X)$ soit compact pour tout i.

On choisit alors pour tout i un voisinage compact L_i de $\overline{U}_i \cap f(X)$ dans $f(X)$ et pour tout x dans X on note $\beta(x)$ la borne inférieure des nombres $d(f(X), \overline{U}_i)$ pour tous les i tels que $f(x)$ ne soit pas dans L_i. Pour tout x, il existe un entier strictement positif tel que la boule $B(f(x), \rho)$ ne rencontre qu'un nombre fini des $\overline{U}_i$ donc, ou bien $\beta(x)$ est supérieur à ρ, ou bien $\beta(x)$ est inférieur à ρ et est la borne inférieure d'un nombre fini de fonctions continues. Il en résulte que β est localement minorée par une fonction continue strictement positive. Il existe donc une fonction continue α_0 de X dans $\overline{R}_+$ telle que, pour tout x, $0 < \alpha_0(x) \leqslant 1/2\, \beta(x)$. Pour tout x, posons :

$$\alpha_1(x) = d(f(x),\ Y - \bigcup_i U_i) \quad \text{et} \quad \alpha(x) = \inf(\alpha_0(x),\ \alpha_1(x)).$$

Alors $V(f, \alpha) = \{g\,;\ d(g(x), f(x)) < \alpha(x)\,;$ pour tout $x\}$ est uniquement formé d'applications propres.

b) Le voisinage Ω sera $V(f/U, \alpha/U)$ où α est définie par $\alpha(x) = d(x, X - U)$.

2. Topologie $\mathcal{C}^r$ pour $1 \leqslant r < +\infty$: 2.1. Definition. *Soient X et Y deux variétés banachiques métriques et $J^r(X, Y)$ le fibré de jets d'ordre r. Notons u l'injection naturelle de* $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ *dans* $\mathrm{Hom}^0(X, J^r(X, Y))$. *Si nous munissons l'espace* $\mathrm{Hom}^0(X, J^r(X, Y))$ *de la topologie $\mathcal{C}^0$, la topologie induite par u sur* $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ *est appelée topologie $\mathcal{C}^r$.*

Donc si f est une application de classe C^r de X dans Y et α une application s. c. i. de X dans $\overline{R}_+$, un $\mathcal{C}^r$-voisinage de f sera de la forme :

$V(f, \alpha) = \{g$ de classe $C^r\,;\ d'(f^r(x), g^r(x)) \leqslant \alpha(x),\ \forall x \in X\}$ où $f^r = u(f)$, $g^r = u(g)$ et d' est la distance induite par la structure de variété banachique de $J^r(X, Y)$ (voir [6]).

2.2 Proposition. *Soient E un espace de Banach séparable, lissable de classe C^r et C^r,^{s}-lissable $(1 \leqslant 2s - 1 < r \leqslant +\infty)$, Ω un ouvert de E et F un espace de Banach quelconque. Alors* $\mathrm{Hom}^r(\Omega, F)$ *est partout dense dans* $\mathrm{Hom}^{2s-1}(E, F)$ *pour la topologie $\mathcal{C}^s$.*

Soient X et Y deux variétés banachiques paracompactes, séparables, modelées sur E et F respectivement. Alors $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ *est partout dense dans* $\mathrm{Hom}^{2s-1}(X, Y)$ *pour la topologie $\mathcal{C}^s$ $(1 \leqslant 2s - 1 < r \leqslant +\infty)$.*

Pour la démonstration de cette proposition, je renvoie à [2] et [4].

3. Topologie $\mathcal{C}^\infty$. 3.1. Définition. *Soient X et Y deux variétés banachiques modelées respectivement sur E et F. A un germe d'applications f de classe C^∞ de X dans Y et à tout point x de X, nous associons un élément noté $j_x^\infty f$ dans $X \times Y \times (E, F)^N$ de composantes x, $f(x)$ et le développement de Taylor à l'ordre infini de f au voisinage de x. $J^\infty(X, Y)$ sera par définition l'ensemble de ces $j_x^\infty f$ pour tout x et tout f.*

3.2. Propriétés de $J^\infty(X, Y)$. $J^\infty(X, Y)$ est muni d'une structure de fibré localement trivial au-dessus de $X \times Y$ de fibre $(E, F)^N$ et si Y est complet, il est complet pour la topologie définie par la métrique suivante ; $\delta_\infty(a, b) = \sum_{r=1} \frac{1}{2r} \inf(1, d_r(\pi_r(a), \pi_r(b))$ où π_r est la projection naturelle de $J^\infty(X, Y)$ sur $J^r(X, Y)$ et d_r la distance dans $J^r(X, Y)$.

3.3. Définition de la topologie $\mathcal{C}^\infty$. *Si* $\mathrm{Hom}^\infty(X, Y)$ *désigne l'ensemble des applications de classe C^∞ de X dans Y, nous appelons topologie $\mathcal{C}^\infty$ la topologie induite par l'injection u de* $\mathrm{Hom}^\infty(X, Y)$ *dans* $\mathrm{Hom}^0(X, J^\infty(X, Y))$ *muni de la topologie $\mathcal{C}^0$.*

4. Propriétés de la topologie $\mathcal{C}^r$ $(1 \leqslant r \leqslant +\infty)$. Si Y est complet, la structure uniforme $\mathcal{C}^r$ rend $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ complet et de Baire. Ceci est une conséquence de 1.3.

4.1. Théorème. *Soient X et Y deux variétés banachiques de classe $C^s (s \geqslant 1)$ modelées respectivement sur E et F. On suppose que F est lissable de classe C^s et séparable. Alors, pour tout élément f de* $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ *pour $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant +\infty$, il existe un $\mathcal{C}^r$-voisinage de f qui se rétracte sur f par une déformation de classe C^r.*

Preuve. Démontrons d'abord les lemmes suivants :

Lemme 1. *Soit Y une variété modelée sur un espace de Banach F séparable et lissable de classe C^s et j la projection de la diagonale Δ_Y de $Y \times Y$ sur Y qui à (y, y) associe y. Il existe alors une applications G de classe C^s définie sur un voisinage U de Δ_Y dans $Y \times Y$*

et à valeurs dans le fibré tangent TY, telle que : i) G prolonge j (on identifie Y à la section nulle de TY),

ii) G respecte la première projection en ce sens qu'elle envoie un point (u, v) dans l'espace tangent T_uY,

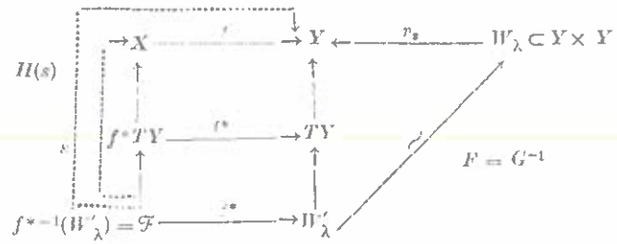
iii) l'application linéaire tangente de G est un isomorphisme en tout point de la diagonale Δ_Y.

C'est le théorème d'existence des voisinages tubulaires (voir [5]). L'hypothèse sur F nous permet d'assurer l'existence de partitions de l'unité de classe C^s (voir [3]).

Lemme 2. *Il existe une application λ s. c. i. de Y dans $\overline{R}_+$ et un voisinage W_λ de la diagonale Δ_Y de $Y \times Y$ tels que : i) G est un isomorphisme de W_λ sur son image $W'_\lambda = G(W_\lambda)$ voisinage de la section nulle dans TY, ii) $W'_\lambda \cap T_yY$ est une boule de rayon $\lambda(y)$ centrée à l'origine, pour tout point y de Y.*

Nous donnons donc une structure de fibré en boules à W'_λ.

Démonstration du théorème. Soit f une application de classe C^r de X dans Y. Construisons le diagramme suivant :



Pour toute section s du fibré $\mathcal{F}$ au-dessus de X, on pose : $H(s) = p_2 \circ F \circ f \circ)s$. On définit ainsi une application H qui va de l'ensemble $\Gamma(\mathcal{F})$ des sections de classe C^r de $\mathcal{F}$ dans $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$. Cette application est injective car, si $H(s) = H(s')$, on a par définition :

$(f, p_2 \circ F \circ f^* \circ s) = (f, p_2 \circ F \circ f \circ s')$ donc $F \circ f^* \circ s = F \circ f^* \circ s'$ et F bijective entraîne $f^* \circ s = f^* \circ s'$ d'où $s = s'$.

D'autre part, on voit que $\mathrm{Im}\, H = \{g \in \mathrm{Hom}^r(X, Y)\,;\ \mathrm{Im}\, f \times g \subset W_\lambda\}$. Par conséquent H est une bijection de $\Gamma(\mathcal{F})$ sur son image. Comme $H = (p_2 \circ F \circ f^*)_*$, H est continue pour la topologie $\mathcal{C}^r$ d'après le lemme suivant :

Lemme 3. *Soient X, Y, Z trois variétés banachiques de classe $C^r (0 \leqslant r \leqslant +\infty)$ et f une application de classe C^r de Z dans Y. L'application f_* de* $\mathrm{Hom}^r(X, Z)$ *dans* $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$, *qui à g associe $f \circ g$, est $\mathcal{C}^r$-continue.*

Pour une application g dans $\mathrm{Im}\, H$, on a : $H^{-1}(g) = (f, F^{-1}(f \times g))$. Le lemme 3 nous permet aussi de conclure que H^{-1} est continue.

Nous construisons ainsi un homéomorphisme d'un voisinage de f sur l'ensemble $\Gamma(\mathcal{F})$ des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de X qui envoie f sur la section nulle. Comme W'_λ est un fibré en boules, $\mathcal{F}$ est aussi un fibré en boules ouvertes et $\Gamma(\mathcal{F})$ se rétracte par une déformation différentiable sur la section nulle, d'où le résultat attendu.

Pour la démonstration du lemme 3, on ramène à la topologie $\mathcal{C}^0$ grâce à l'application $j^r f$ de $J^r(X, Z)$ dans $J^r(X, Y)$ qui à un jet $j_x^r g$ associe le jet $j_x^r(f \circ g)$. Comme f_* est continue localement uniformément, on montre facilement qu'elle est $\mathcal{C}^0$-continue.

4.2 Théorème. *Soient X, Y, Z des variétés banachiques de classe $C^r (r \geqslant 0)$. On note* $\mathrm{Hom}^r_p(X, Z)$ *l'ensemble des applications propres de X dans Z. L'application composition 1 de* $\mathrm{Hom}^r_p(X, Z) \times \mathrm{Hom}^r(Z, Y)$ *dans* $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ *qui à (f, g) associe $g \circ f$ est $\mathcal{C}^r$-continue.*

Preuve : Notons $\triangle = J^r(X, Z) \times_Z J^r(Z, Y) = \{(u, v)\,;\ \pi(u) = \pi'(v)\}$, π et π' étant les projections respectives de $J^r(X, Z)$ sur Z et de $J^r(Z, Y)$ sur Z. Soit c l'application suivante

$$c : \triangle \to J^r(X, Y)$$
$$(j_x^r f, j_{f(x)}^r f') \to j_x^r(f' \circ f).$$

Elle est continue et la démonstration du théorème se ramène à trouver, pour tout voisinage ouvert U de $j^r(f' \circ f)$, des voisinages ouverts V de $j^r f$ et W de $j^r f'$ tels que $c(V x_Z W) \subset U$. En remarquant que $\pi | j^r f = f$ est propre et que $\pi' | j^r f' = \mathrm{Id}_Z$ l'est aussi, le lemme suivant nous donne la réponse voulue :

Lemme. *Soient A, B et P trois espaces métriques complets, π et π' deux applications continues respectivement de A dans P et de B dans P. Soient K une partie de A et L une partie de B telles que $\pi | K$ et $\pi' | L$ soient propres et donnons-nous un voisinage U de $K x_P L$ dans $D = A x_P B$. Alors il existe un ouvert V, voisinage de K dans A, et un ouvert W, voisinage de L dans B, tels que : $V x_P W \subset U$.*

4.3 Théorème. *Soient Y et Z deux variétés banachiques de classe C^r et X une sous-variété (fermée) de classe C^r de Z. Alors l'application restriction χ de $\mathrm{Hom}^r(Z, Y)$ dans $\mathrm{Hom}^r(X, Y)$ qui à g associe $g|X$ est continue si on munit les deux espaces d'applications de la topologie $\mathcal{C}^r$.*

Il suffit de voir que χ se décompose de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}^r(Z, Y) & \to & \mathrm{Hom}^r_p(X, Z) \times \mathrm{Hom}^r(Z, Y) & \xrightarrow{1} & \mathrm{Hom}^r(X, Y) \\ g & \to & (i, g) & \longrightarrow & g \circ i \end{array}$$

où i est l'injection de X dans et on applique le théorème précédent.

5. Conclusion. Nous avons ainsi construit une topologie qui nous permet d'ignorer l'hypothèse de locale compacité et d'avoir néanmoins des théorèmes d'approximation très utiles dans l'étude de certains systèmes hydrodynamiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Arnaudies — *Partitions de l'unité dans certains espaces*, Séminaire Lelong 1966—67, exposé 1.
2. Bourbaki N. — *Topologie générale, chapitre I, livre III*, Hermann (Paris 1960).
3. Lang S. — *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod (Paris 1967).
4. Moulis N. — *Approximations de fonctions différentiables sur certains espaces de Banach*, Annales de l'Institut Fourier 1971, tome XXI, fascicule 4, p 293—345.
5. Wells J. — *Differentiable functions in C_0*, Bulletin of American Math. Society 1969, n^0 75, p 117—118.

Reçu le 24. III. 1975

Département de Mathématique,
Université d'Oran la Sénia
Algérie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

ON SOME NONLINEAR VOLTERRA INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

B. G. PACHPATTE

1. Introduction. In recent years much attention has been given to the study of nonlinear Volterra integral and integrodifferential equations. Excellent accounts on this subject may be found in two recent monographs by R. K. Miller [6] and C. Corduneanu [1]. The first one is a pure mathematics product while the second emphasizes the significance of these equations in the theory of feedback systems. The purpose of this paper is to study the behavior of solutions of a Volterra integrodifferential system of the form

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)\, x(s) ds + x(t)\, H(t, x(t), \sigma(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

with

$$\sigma(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, x(s)) ds, \tag{2}$$

where $0 \leqslant t < \infty$, A and $B(t)$ are $n \times n$ matrices. The system will be studied as a perturbation of the linear system

$$y'(t) = Ay(t) + \int_0^t B(t-s)\, y(s) ds, \quad y(0) = x_0. \tag{3}$$

Here x, y, H, σ, f, k are vector functions with n components. The allowable perturbations $xH(t, x, \sigma)$ are to be thought of as being small and motivated by recent studies of Corduneanu [1], [2], Grossman and Miller [3], [4], Keller [5], Miller [6], [7], Nohel [8], and Pachpatte [9]—[12].

The mathematical literature provides a good deal of information concerning the existence, uniqueness and continuous dependence of solutions of various classes of Volterra integral and integrodifferential equations, see, [1], [3]—[6], [8]. We therefore turn our attention to other problems. One of the problems of interest that arise in this connection is concerned with the question of whether the stability, boundedness and other problems of the system (1) are shared with the system (3). The present paper takes up this question when the perturbation satisfy certain conditions. Although such problems have been considered by various investigators (see, [1]—[8]), the results in the present paper are of interest because of the weak assumptions on the functions involved and the approach to the problem is different from those of the cited results.

2. Preliminaries. Let R^n denote real n-dimensional Euclidean space of column vectors with Euclidean norm $|\,.\,|$. R^+ denotes the set of all t such that $0 \leqslant t < \infty$. For p in the interval $1 \leqslant p < \infty$, L^p is the usual Lebesgue space of measurable functions g such that

$$\| g \|_p = \left(\int_0^\infty | g(t) |^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$