Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

FIXED POINTS OF IMPLICIT CONTRACTION MAPPINGS

BY

MIHAI TURINICI

1. In this note the notion of "implicit contraction mapping" of a complete metric space into itself is introduced and some fixed point theorems for such a class of mappings are presented.

Let R be the real axis, R_+ the positive half-axis, $D = R_+$ the strict positive half-axis (i. e. $R_+ = [0, +\infty[$, $D =]0, +\infty[$) $S \neq \emptyset$ an arbitrary set and $\emptyset \neq P \subset S$ an arbitrary fixed subset.

Definition 1.1. *A function $f: D \times D \times R_+ \times R_+ \times R_+ \times R_+ \to S$ will be said to have property (P) if it satisfies:*

A. *Global conditions:*

a.1) $$t, u > 0,\ v, w, p, q \geqslant 0 \Rightarrow f(t, u, v, w, p, q) = f(t, u, w, v, p, q) = f(t, u, v, w, q, p)$$

a.2) $$u, v > 0,\ 0 \leqslant p \leqslant u + v,\ f(u, v, u, v, p, 0) \in P \Rightarrow u \leqslant v$$

a.3) $$w > 0 \Rightarrow f(w, w, 0, 0, w, w) \in S \setminus P$$

B. *Local conditions:* $\forall r > 0\ \exists a(r) \in]0, r[$ *such that*

b.1) $$u, v \in [r, r + a(r)[,\ u \leqslant v,\ 0 \leqslant p \leqslant u + v \Rightarrow f(u, v, u, v, p, 0) \in S \setminus P.$$

b.2) $$t, p, q \in]r - a(r), r + a(r)[,\ u \in [r, r + a(r)[,\ v, w \in]0, a(r)[\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t, u, v, w, p, q) \in S \setminus P$$

b.3) $$t, p \in]r - a(r), r + a(r)[,\ u, v, q \in]0, a(r)[\Rightarrow f(t, u, v, r, p, q) \in S \setminus P.$$

Definition 1.2. *Let $f: D \times D \times R_+ \times R_+ \times R_+ \times R_+ \to S$ be a given function and let (X, d) be a complete metric space. A mapping $T: X \to X$ will be called an implicit contraction mapping (abbreviated i. c. m.) with respect to f if*

(1.1) $$f(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)) \in P$$
$$\text{for all } x, y \in X,\ Tx \neq Ty.$$

Our main result can be stated as follows.

Theorem 1.1. *Suppose that $T: X \to X$ satisfies*

(1.2) $$T \text{ is an i. c. m. with respect to } f$$

(1.3) $$f \text{ has the property (P)}$$

Then the following conclusions hold:

(1.4) $$T \text{ has a unique fixed point } z \in X$$

(1.5) $$T^n x \to z, \text{ as } n \to +\infty,\ \forall x \in X.$$

Proof. First we prove the uniqueness of the fixed point of T. Let $u, v \in X$ be such that $u = Tu$, $v = Tv$, $u \neq v$. From (1.1) and a.3) we obtain

$$P \ni f(d(u, v), d(u, v), 0, 0, d(u, v), d(u, v)) \in S \setminus P \tag{1.6}$$

a contradiction. Therefore, $u = v$, i. e. the fixed point of T is unique. Now we prove the existence. Take any $x \in X$ and consider the sequence $\{T^n x ; n \geq 0\}$. If $T^n x = T^{n+1} x$ for some n, then the conclusion follows. Assume that $T^n x \neq T^{n+1} x$, $\forall n \geq 0$. From (1.1) we have $\forall n \geq 1$:

$$f(d(T^n x, T^{n+1} x), d(T^{n-1} x, T^n x), d(T^{n-1} x, T^n x), d(T^n x, T^{n+1} x), d(T^{n-1} x, T^{n+1} x), 0) \in P \tag{1.7}$$

and on the other hand:

$$d(T^{n-1} x, T^{n+1} x) \leq d(T^{n-1} x, T^n x) + d(T^n x, T^{n+1} x). \tag{1.8}$$

From (1.7), (1.8) and a.2) we obtain $\forall n \geq 1$:

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leq d(T^{n-1} x, T^n x), \tag{1.9}$$

i. e. the sequence $\{d(T^n x, T^{n+1} x) ; n \geq 0\}$ decreases. Let $r = \lim\limits_{n \to \infty} d(T^n x, T^{n+1} x)$ and assume that $r > 0$. One can find $n(r) \in N$ such that

$$n \geq n(r) \Rightarrow d(T^{n-1} x, T^n x) \in [r, r + a(r)[. \tag{1.10}$$

Taking into account (1.8), (1.9), (1.10) and b.1) we have

$$f(d(T^n x, T^{n+1} x), d(T^{n-1} x, T^n x), d(T^{n-1} x, T^n x), d(T^n x, T^{n+1} x), d(T^{n-1} x, T^{n+1} x), 0) \in S \setminus P, \tag{1.11}$$

which contradicts (1.7) for $n \geq n(r)$. Therefore $r = 0$.

Suppose that $\{T^n x ; n \geq 0\}$ is not a Cauchy sequence. Then there exist $\varepsilon > 0$ and two sequences of natural numbers $\{m(j) ; j \geq 1\}$ and $\{n(j) ; j \geq 1\}$, $m(j) < n(j)$, $m(j) \to \infty$ as $j \to \infty$, such that $d(T^{m(j)} x, T^{n(j)} x) \geq \varepsilon$ while $d(T^{m(j)} x, T^{n(j)-1} x) < \varepsilon$, $\forall j \geq 1$. For the sake of simplicity we shall write m, n, instead of $m(j)$, $n(j)$, respectively.

Now, since $d(T^k x, T^{k+1} x) \to 0$ as $k \to \infty$, we can find $j(\varepsilon) \in N$ such that

$$0 < d(T^{n-1} x, T^n x) \leq d(T^m x, T^{m+1} x) < \frac{1}{3} a(\varepsilon) < a(\varepsilon) < \varepsilon, \ \forall j \geq j(\varepsilon). \tag{1.12}$$

On the other hand, from the triangle inequality we have; $\forall j \geq 1$

$$\begin{aligned} d(T^m x, T^n x) - d(T^m x, T^{m+1} x) - d(T^n x, T^{n+1} x) &\leq d(T^{m+1} x, T^{n+1} x) \leq \\ &\leq d(T^m x, T^n x) + d(T^m x, T^{m+1} x) + d(T^n x, T^{n+1} x), \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$d(T^m x, T^n x) \leq d(T^m x, T^{n-1} x) + d(T^{n-1} x, T^n x). \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} d(T^m x, T^n x) - d(T^n x, T^{n+1} x) &\leq d(T^m x, T^{n+1} x) \leq \\ &\leq d(T^m x, T^n x) + d(T^n x, T^{n+1} x), \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} d(T^m x, T^n x) - d(T^m x, T^{m+1} x) &\leq d(T^n x, T^{m+1} x) \leq \\ &\leq d(T^m x, T^n x) + d(T^m x, T^{m+1} x). \end{aligned} \tag{1.16}$$

From (1.12)—(1.16) it easily follows $\forall j \geq j(\varepsilon)$

$$\begin{gathered} d(T^{m+1} x, T^{n+1} x), d(T^m x, T^{n+1} x), d(T^n x, T^{m+1} x) \in \left]\varepsilon - a(\varepsilon), \varepsilon + a(\varepsilon)\right[\\ d(T^m x, T^n x) \in [\varepsilon, \varepsilon + a(\varepsilon)[. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Now, (1.1), (1.17) and b.2) gives us for $j \geq j(\varepsilon)$

$$\begin{gathered} P \ni f(d(T^{m+1} x, T^{n+1} x), d(T^m x, T^n x), d(T^m x, T^{m+1} x), d(T^n x, T^{n+1} x), \\ d(T^m x, T^{n+1} x), d(T^n x, T^{m+1} x)) \in S \setminus P, \end{gathered} \tag{1.18}$$

a contradiction. Therefore, $\{T^n x ; n \geq 0\}$ is a Cauchy sequence. Since (X, d) is complete, $T^n x \to z$, for some $z \in X$. We have two possibilities:

i) There exists a sequence of natural numbers $\{k(n) : n \geq 1\}$, $k(n) \to \infty$ as $n \to \infty$, such that $T^{k(n)} x = z$. Then, $T^{k(n)+1} x = Tz$. Letting n tends to $+\infty$ and using the fact that $\{T^{k(n)+1} x ; n \geq 1\}$ is a subsequence of $\{T^n x ; n \geq 0\}$ we get $z = Tz$.

ii) There exists $n_0 \in N$, such that $n \geq n_0 \Rightarrow T^n x \neq z$. Suppose that $z \neq Tz$; then $r = d(z, Tz) > 0$. We can find $n(r) \in N$, such that, $\forall n \geq n(r)$

$$0 < d(T^n x, T^{n+1} x), d(T^n x, z) < \frac{1}{3} a(r) < a(r) < r. \tag{1.19}$$

On the other hand, from the triangle inequality we have $\forall n \geq 1$

$$r - d(T^n x, z) \leq d(T^n x, Tz) \leq r + d(T^n x, z). \tag{1.20}$$

From (1.19), (1.20) we obtain, $\forall n \geq n(r)$

$$d(T^n x, Tz) \in \left]r - a(r), r + a(r)\right[. \tag{1.21}$$

Now, (1.1), (1.19), (1.21) and b.3) give us for $n \geq n(r)$

$$P \ni f(d(T^{n+1} x, Tz), d(T^n x, z), d(T^n x, T^{n+1} x), r, d(T^n x, Tz), d(z, T^{n+1})) \in S \setminus P \tag{1.22}$$

a contradiction. Therefore, $z = Tz$, which completes the proof. Q. E. D.

2. In this paragraphe we give some corollaries of the preceding main result.

Let R_+, D, S, P be defined as before.

Definition 2.1. *A function $f : D \times D \times R_+ \times R_+ \to S$ will be said to have property* (P) *if it satisfies:*

A. Global conditions:

a.1) $\quad t, u > 0, \ v, w \geq 0 \Rightarrow f(t, u, v, w) = f(t, u, w, v)$,

a.2) $\quad u, v > 0, f(u, v, u, v) \in P \Rightarrow u \leq v$,

a.3) $\quad w > 0 \Rightarrow f(w, w, 0, 0) \in S \setminus P$.

B. Local conditions: $\forall r > 0$, $\exists a(r) \in \left]0, r\right[$ *such that*

b.1) $\quad u, v \in [r, r + a(r)[, \ u \leq v \Rightarrow f(u, v, u, v) \in S \setminus P$,

b.2) $\quad t \in \left]r - a(r), r + a(r)\right[$, $u \in [r, r + a(r)[$, $v, w \in \left]0, a(r)\right[\Rightarrow f(t, u, v, w) \in S \setminus P$,

b.3) $\quad t \in \left]r - a(r), r + a(r)\right[$, $u, v \in \left]0, a(r)\right[\Rightarrow f(t, u, v, r) \in S \setminus P$.

Definition 2.2. *Let $f : D \times D \times R_+ \times R_+ \to S$ be a given function. A mapping $T : X \to X$ will be called an i. c. m. with respect to f if*

$$f(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)) \in P, \ \forall x, y \in X, \ Tx \neq Ty. \tag{2.1}$$

Theorem 2.1. *Suppose that $T : X \to X$ satisfies*

(2.2) $\quad$ *T is an i. c. m. with respect to f,*

(2.3) $\quad$ *f has the property* (P).

Then, the following conclusions hold:

(2.4) $\quad$ *T has a unique fixed point $z \in X$,*

(2.5) $\quad$ *$T^n x \to z$, as $n \to \infty$, $\forall x \in X$.*

Proof. Clearly, the preceding theorem is applicable. Q. E. D.

Definition 2.3. *A function $f: D \times D \to S$ will be said to have property* (P) *if it satisfies*
A. *Global conditions* :

a.1) $$u, v > 0,\ f(u, v) \in P \Rightarrow u \leqslant v,$$

a.2) $$w > 0 \Rightarrow f(w, w) \in S \setminus P.$$

B. *Local conditions* : $\forall r > 0,\ \exists a(r) \in]0, r[$ *such that*

b.1) $$u, v \in [r, r + a(r)[,\ u \leqslant v \Rightarrow f(u, v) \in S \setminus P,$$

b.2) $$t \in]r - a(r),\ r + a(r)[,\ u \in [r, r + a(r)[\Rightarrow f(t, u) \in S \setminus P,$$

b.3) $$t \in]r - a(r),\ r + a(r)[,\ u \in]0,\ a(r)[\Rightarrow f(t, u) \in S \setminus P,$$

Definition 2.4. *Let $f: D \times D \to S$ be a given function. A mapping $T: X \to X$ will be called an i. c. m. with respect to f if*

(2.6) $$f(d(Tx, Ty),\ d(x, y)) \in P,\ \forall x,\ y \in X,\ Tx \neq Ty.$$

Theorem 2.2. *Suppose that $T: X \to X$ satisfies*

(2.7) T *is an i. c. m. with respect to* f

(2.8) f *has the property* (P).

Then the following conclusions hold :

(2.9) T *has a unique fixed point* $z \in X$,

(2.10) $$T^n x \to z,\ as\ n \to \infty,\ \forall x \in X.$$

Proof. See the preceding result. Q. E. D.

Remark. The main result is a partial extension of a result due to Hardy and Rogers [1]. The theorem 2.1 extends some results of Reich [3, 4], Rus [5, 6] and of the author [7, 8], and the theorem 2.2 represents an extension of a result due to Boyd and Wong [2].

REFERENCES

1. Hardy, G. E. and Rogers, T. D. — *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull., 16 (1973), 201—206.
2. Boyd, D. W. and Wong, J. S. W. — *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458—464.
3. Reich, S. — *Kannan's fixed point theorem*, Boll. Un. Mat. Ital., 4 (1971), 1—11.
4. Reich, S. — *Fixed points of contractive functions*, Boll. Un. Mat. Ital., 5 (1972), 26—42.
5. Rus, I. A. — *Some fixed point theorems in metric spaces*, Rend. Ist. di Mat. Univ. Trieste, 3 (1971), 169—172.
6. Rus, I. A. — *O metode posledovatelnych priblizenij*, Rev. Roum. Math. Pures et Apl., 17 (1972), 1433—1437.
7. Turinici, M. — *A fixed point theorem on metric spaces*, An. şt. Univ. Iaşi, s. I, 20 (1974), 101—105.
8. Turinici, M. — *Fixed points in complete metric spaces*, to appear.

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 2

STRUCTURES ET CONNEXIONS CLASSIQUES SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

PAR

V. CRUCEANU

L'étude de la structure et des connexions projectives sur une variété différentiable, commencée par H. Weyl [15] et E. Cartan [3] a préoccupé et préoccupe encore un grand nombre de géomètres. En poursuivant les travaux, consacrés à ce sujet, on peut croire que la simplicité et la dualité des notions et des résultats, qui ont fait de la géométrie projective l'une des disciplines géométriques les plus belles, ont disparu dans la géométrie projective des variétés.

Le but de ce travail est de donner une définition simple pour la structure et les connexions projectives et de mettre en évidence un principe de dualité dans la géométrie projective différentielle des variétés. A cette occasion nous allons considérer aussi d'autres structures et connexions classiques sur une variété différentiable, qui peuvent être regardées comme subordonnées respectivement à la structure et aux connexions projectives.

Les résultats principaux de ce travail ont été communiqué au IV-ème Congrès des mathématiciens d'expression latine, Bucarest, 17—24 sept. 1969.

1. Structures classiques associées à un espace vectoriel. Soit V un espace vectoriel à n-dimensions sur le corp R des réels.

Définition 1.1. *On appelle espace projectif canoniquement associé à l'espace vectoriel V, l'espace projectif engendré* [1] *par l'espace vectoriel $R \times V$.*

Il sera noté par $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R \times V)$. Si $\pi: R \times V \to \mathcal{P}$ est la projection canonique, alors on peut distinguer sur $\mathcal{P}$: le point $z_0 = \pi(1, 0)$ nommé *le centre*, l'hyperplan $c^0 = \pi(\{0\} \times V)$ nommé *l'hyperplan à l'infini* et la famille des repères projectifs,

(1) $$z_0 = \pi(1,\ 0),\ z_i = \pi(0,\ Z_i),\ (i,\ j,\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ est une base sur V, nommée *la famille des repères projectifs préférentiels*

Par des considérations duales on peut associer à l'espace vectoriel V^*, dual de V l'espace projectif $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}(R \times V^*)$ nommé *l'espace projectif dual à* $\mathcal{P}(R \times V)$. Le repère projectif de $\mathcal{P}^*$, défini par les relations

(2) $$c^0 = \pi^*(1,\ 0),\ c^i = \pi^*(0,\ C^i),$$

où $\{C^1, C^2, \ldots, C^n\}$ est la base sur V^*, duale à la base $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ sur V, *s'appelle le corepère projectif préférentiel dual au repère* (1). On peut constater que $\mathcal{P}^*$ peut être identifié avec l'ensemble des hyperplans de $\mathcal{P}$. Dans cette identification, que nous allons faire dorénavant, le centre de $\mathcal{P}^*$ coïncide avec l'hyperplan à l'infini de $\mathcal{P}$ et l'hyperplan à l'infini de $\mathcal{P}^*$ coïncide avec le centre de $\mathcal{P}$. D'une manière plus générale, dans cette identification, le point c^β de corèpere $\{c^\alpha\}$, dual au repère $\{z_\alpha\}$, coïncide avec l'hyperplan $\{z_0, z_1, \ldots, z_{\beta-1}, z_{\beta+1}, \ldots, z_n\}$ de $\{z_\alpha\}$.

Définition 1.2. *On appelle espace affine, centro-projective (coaffine) et centro-affine, canoniquement associé à l'espace vectoriel V, l'espace qui s'obtient de $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R \times V)$ en fixant respectivement l'hyperplan à l'infini c^0, le centre z_0 ou le couple (c^0, z_0) et en considérant le sous-groupe du groupe projectif qui conserve la figure correspondante.*

Au lieu de dire que nous avons associé à V un espace projectif, affine, etc. nous dirons que nous avons défini sur V *une structure, projective, affine* etc. On obtient des struc-