Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES; LE LEMME DE POINCARÉ

PAR

NECULAI PAPAGHIUC

Dans cette Note nous considérons les formes différentielles définies dans des espaces localement convexes à valeurs dans des espaces localement convexes et généralisons le lemme de Poincaré pour le cas des espaces localement convexes complets pour des suites. Tous les espaces localement convexes sont supposés sur le corp R de nombres réels, séparés Hausdorff et complets pour des suites.

Soient E et F deux espaces localement convexes, Γ_E et Γ_F les ensembles de toutes les semi-normes continues sur E et respectivement F. Notons par ${}_p\Phi$ $(p \in N,\ 0 \leqslant p \leqslant \infty)$ l'ensemble

$$ {}_p\Phi = \{ {}_p\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) : \Gamma_F \to \Gamma_E \times \dots \times \Gamma_E = \Gamma_E^p \}. $$

Pour toute application ${}_p\varphi \in {}_p\Phi$ désignons par $L^p_{p\varphi}(E, F)$ le sous-espace vectoriel formé d'applications p-linéaires de E^p à F continues par rapport à l'application ${}_p\varphi$. On démontre facilement que $L^p_{p\varphi}(E, F)$ est aussi un espace localement convexe dont la topologie est définie par un ensemble de semi-normes équivalent à l'ensemble Γ_F oú, par définition, F est identifié à $L^0_{0\varphi}(E, F)$.

Définition 1. *Une application $u \in L^p_{p\varphi}(E, F)$ est dite alternée si $u(x_1, \dots, \dots, x_p) = 0$ chaque fois que l'on a $x_i = x_{i+1}$ pour au moins un indice i $(1 \leqslant i < p)$.*

Nous notons par $A^p_{p\varphi}(E, F) = \{ u \in L^p_{p\varphi}(E, F);\ u$ est alternée$\}$. On convient, pour $p = 1$, que $A^1_{\varphi_1}(E, F) = L_{\varphi_1}(E, F)$ et par définition, $A^0_{0\varphi}(E, F) = F$.

Il est évident que $A^p_{p\varphi}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $L^p_{p\varphi}(E, F)$ et il résulte facilement que $A^p_{p\varphi}(E, F)$ est un sous-espace fermé dans $L^p_{p\varphi}(E, F)$.

La démonstration de la proposition suivante est analogue à celle du cas des espaces normés.

Proposition 1. *Soit $u \in A^p_{p\varphi}(E, F)$. Alors :*

(a) *chaque fois qu'on a $x_i = x_j$ pour un couple (i, j) d'indices distincts, on a $u(x_1, \dots, x_p) = 0$;*

(b) *pour tout permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, p\}$, on a* $u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, u(x_1, \dots, x_p)$, *où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.*

Soient E, F, G, H des espaces localement convexes, $u_1 \in A^p_{p\varphi}(E, F)$ $u_2 \in A^q_{q\psi}(E, G)$ et $K : F \times G \to H$ une application bilinéaire et continue, par rapport à l'application $(\varphi, \psi) : \Gamma_H \to \Gamma_F \times \Gamma_G$ donnée par $(\varphi, \psi)(\delta) = (\varphi(\delta), \psi(\delta))$, $\delta \in \Gamma_H$. Nous pouvons alors associer à u_1 et u_2 l'application $u : E^{p+q} \to H$, définie par :

$$(1) \qquad u(x_1, \dots, x_{p+q}) = K(u_1(x_1, \dots, x_p), u_2(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})).$$

L'application u est évidemment $p+q$-linéaire et continue par rapport à l'application $({}_p\varphi \circ \varphi, {}_q\psi \circ \psi) : \Gamma_H \to \Gamma_E^{p+q}$ et alternée comme application des p premières variables $x_1, \dots, x_p$ et comme application des q dernières variables $x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$, c'est-à-dire, $u \in A^{p,q}_{({}_p\varphi\circ\varphi,\, {}_q\psi\circ\psi)}(E, H)$. Considérons l'application linéaire canonique :

$$a_{p,q} : A^{p,q}_{({}_p\varphi\circ\varphi,\, {}_q\psi\circ\psi)}(E, H) \to A^{p+q}_{({}_p\varphi\circ\varphi,\, {}_q\psi\circ\psi)}(E, H) \text{ donnée par :}$$

$$(2) \qquad [a_{p,q}(u)](x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}),$$

où σ parcourt l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots p+q\}$ telles que $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$.

Définition 2. *On appelle produit extérieur de $u_1 \in A^p_{p\varphi}(E, F)$ et $u_2 \in A^q_{q\psi}(E, G)$ relativement à $K : F \times G \to H$, et on note $u_1 \underset{K}{\wedge} u_2$, l'élément $a_{p,q}(u)$ où l'application u est définie par* (1) *et l'application $a_{p,q}$ est définie par* (2).

Les propriétés de la multiplication extérieure des applications multilinéaires alternées définies sur des espaces localement convexes à valeurs dans des espaces localement convexes sont les mêmes que les propriétés de la multiplication extérieure des applications multilinéaires alternées définies sur des espaces de Banach à valeurs dans des espaces de Banach, ces propriétés étant de nature algébrique et pas topologique.

Soit U un sous-ensemble de E tel que pour tout $x \in U$, l'ensemble $U - x$ soit absorbant pour le sous-espace vectoriel qu'il engendre.

Définition 3. *On appelle ${}_p\varphi$-forme différentielle de degré p, définie dans U, à valeurs dans F, une application $\omega : U \to A^p_{p\varphi}(E, F)$. Une ${}_p\varphi$-forme différentielle ω est dite de classe C^n si l'application ω admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur U* (dans le sens des définitions de [4]), *continues dans les topologies localement convexes* (par rapport à l'ensemble de définition).

Désignons par $\Omega^n_{p\varphi}(U; F)$ l'ensemble de toutes ${}_p\varphi$-formes différentielles de degré p définies dans U à valeurs dans F qui sont de classe C^n. C'est évidemment un espace vectoriel.

Soient E, F, G, H des espaces localement convexes, $K : F \times G \to H$ une application bilinéaire continue par rapport à $(\varphi, \psi) : \Gamma_H \to \Gamma_F \times \Gamma_G$, U un sous-ensemble de E tel que pour tout $x \in U$, l'ensemble $U - x$ soit absorbant pour le sous-espace vectoriel qu'il engendre, et soit $\omega_1 : U \to A^p_{p\varphi}(E, F)$ (respectivement $\omega_2 : U \to A^q_{q\psi}(E, G)$) une ${}_p\varphi$-forme différentielle définie dans U à valeurs dans F (respectivement une ${}_q\psi$-forme différentielle définie dans U à valeurs dans G).

Définition 4. *On appelle produit extérieur des formes différentielles ω_1 et ω_2, et on note $\omega_1 \underset{K}{\wedge} \omega_2$, l'application $\omega : U \to A^{p+q}_{({}_p\varphi\circ\varphi,\, {}_q\psi\circ\psi)}(E, H)$ définie par $\omega(x) = \omega_1(x) \underset{K}{\wedge} \omega_2(x)$, où $\omega_1(x) \underset{K}{\wedge} \omega_2(x)$ est donnée par la définition 2.*

De la définition 4, il résulte que le produit extérieur $\omega_1 \underset{K}{\wedge} \omega_2$ est une $({}_p\varphi \circ \varphi, {}_q\psi \circ \psi)$-forme différentielle de degré $p+q$ définie dans U à valeurs dans H.

La multiplication extérieure des formes différentielles hérite les propriétés de la multiplication des applications multilinéaires alternées.

Soit $\omega \in \Omega^n_{p\varphi}(U; F)$. Alors l'application dérivée $\omega' : U \to L_{\varphi_{p+1}}(E, A^p_{p\varphi}(E, F))$ est de classe C^{n-1} et pour tout $x \in U$ il résulte que $\omega'(x)$ est une application $p+1$-linéaire, continue par rapport à l'application ${}_{p+1}\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1})$ et alternée comme application des p dernières variables, c'est-à-dire $\omega'(x) \in A^{1,p}_{p+1\varphi}(E, F)$.

Définition 5. *Définissons comme différentielle extérieure de ω, l'application $d\omega = a_{1,p} \circ \omega'$* (où $a_{1,p}$ est définie par (2)). Evidemment, la différentielle extérieure de ω est une ${}_{p+1}\varphi$-forme différentielle définie dans U à valeurs dans F, c'est-à-dire $d\omega \in \Omega^{n-1}_{p+1\varphi}(U; F)$.

Comme conséquence de la symétrie de l'application $\omega''(x)$, on obtient facilement :

Proposition 2. *Si $\omega \in \Omega^n_{p\varphi}(U; F)$ $(n \geqslant 2)$, alors $d(d\omega) = 0$.* Nous allons démontrer dans ce qui suit le lemme de Poincaré qui donne la condition pour qu'une forme différentielle ω soit égale à $d\alpha$.

Théorème 1. (le lemme de Poincaré). *Soient E et F deux espaces localement convexes complets pour des suites et U un sous-ensemble convexe de E tel que pour tout $x \in U$, l'ensemble $U - x$ soit absorbant pour le sous-espace vectoriel qu'il engendre.*
Si $\omega \in \Omega^n_{p\varphi}(U; F)$ $(n \geqslant 1,\ p \geqslant 1)$ et $d\omega = 0$ alors, il existe $\alpha \in \Omega^n_{p-1\varphi}(U; F)$ telle que $d\alpha = \omega$.

Pour la démonstration du théorème 1 nous utiliserons :

Lemme 1. *Soient E et F deux espaces localement convexes complets pour des suites, U un sous-ensemble de E tel que pour tout $x \in U$, l'ensemble $U - x$ soit absorbant pour le sous-espace vectoriel qu'il engendre, $I = [0, 1] \subset R$ et soit $\varphi : U \times I \to F$ une application continue qui satisfait à la condition que la dérivée n-ième $\partial^n\varphi/\partial x^n$ existe et est une application continue $U \times I \to L^n_{n\varphi}(E, F)$. Alors l'application $\Psi : U \to F$ définie par $\Psi(x) = \int_0^1 \varphi(x, t)dt$ est de classe C^n et $\Psi^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n \varphi(x, t)}{\partial x^n}\, dt$.*

La démonstration du lemme est standard (par récurrence sur n) en utilisant les résultats de [4, chap. IV, §4].

Démonstration du théorème 1. Nous supposons que $0 \in U$ et démontrons le théorème dans le cas où $p = 1$ ($n \geqslant 1$). Soit $\omega \in \Omega^n_{\varphi_1}(U; F)$ une φ_1-forme de classe C^n. Définissons l'application $f : U \to F$ par

$$f(x) = \int_0^1 \omega(tx) \cdot x \, dt.$$

Montrons que f est une application de classe C^n. D'après le lemme 1 il suffit de montrer que l'application $\varphi(t, x) = \omega(tx) \cdot x$ est de classe C^n par rapport à x et que les applications $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$ sont continues de $U \times I$ dans F, $L_{\varphi_1}(E, F), \ldots, L^n_{n\varphi}(E, F)$. Mais φ s'obtient par composition des applications suivantes :

(a) $U \times I \to U \times E$; $(x, t) \to (tx, x)$ de classe C^∞,

(b) $U \times E \to L_{\varphi_1}(E, F) \times E$: $(x, \xi) \to (\omega(x), \xi)$; cette application est de classe C^n, comme ω,

(c) $L_{\varphi_1}(E, F) \times E \to F$; $(\omega(x), \xi) \to \omega(x) \cdot \xi$ de classe C^∞. Il résulte que l'application f est de classe C^n.

Montrons maintenant que l'application f satisfait au théorème 1, c'est-à-dire que $df = \omega$. En effet, le lemme 1 implique ;

$$f'(x) = \int_0^1 [t\omega'(tx) \cdot x + \omega(tx)] \, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}[t\omega(tx)] \, dt = [t\omega(tx)]\Big|_0^1 = \omega(x),$$

c'est-à-dire $\omega = df$.

Observation. Pour $p = 1$, le lemme de Poincaré résulte aussi du théorème 2 de [4, pg. 50].

Montrons enfin le théorème 1 dans le cas général (p quelconque). Soit $\omega \in \Omega^n_{p\varphi}(U; F)$ et définissons l'application :

(3) $\alpha : U \to A^{p-1}_{p-1\varphi}(E, F)$ par $\alpha(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) = \int_0^1 t^{p-1} \omega(tx)(x, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \, dt.$

Le deuxième membre de (3), considéré comme application multilinéaire alternée de $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$, est $\int_0^1 t^{p-1} \omega(tx) \cdot x dt$ et c'est précisément $\alpha(x) \in$ $\in A^{p-1}_{p-1\varphi}(E, F)$. D'après le lemme 1, parce que l'application $(x, t) \to t^{p-1} \omega(tx) x$ est de classe C^n, étant la composée des trois applications suivantes :

(a) $U \times I \to U \times I \times E$, qui transforme (x, t) dans (tx, t, x) ; cette application existe parce que U est convexe et elle est de classe C^∞.

(b) l'application $U \times I \times E \to A^p_{p\varphi}(E, F) \times E$, qui envoie (x, t, ξ) dans $(t^{p-1} \omega(x), \xi)$; elle est de classe C^n comme ω ;

(c) l'application $A^p_{p\varphi}(E, F) \times E \to A^{p-1}_{p-1\varphi}(E, F)$, qui transforme (u, ξ) dans l'élément de $A^{p-1}_{p-1\varphi}(E, F)$ défini par $(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \to u(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1})$; cette application est de classe C^∞ ;

il résulte que l'application α définie par (3) est de classe C^n et par suite $\alpha \in \Omega^n_{p-1\varphi}(U; F)$.

Calculons $d\alpha$; on obtient :

$$[d\alpha(x)](\xi_1, \ldots, \xi_p) = \{[(a_{1,p-1} \circ \alpha')(x)] \cdot \xi_p\}(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \int_0^1 t^p [\omega'(tx) \cdot \xi_i](x, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) \, dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \int_0^1 t^{p-1} [\omega(tx)](\xi_i, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) \, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \int_0^1 t^p [\omega'(tx) \cdot \xi_i](x, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) \, dt +$$

$$+ p \int_0^1 t^{p-1} [\omega(tx)](\xi_1, \ldots, \xi_p) \, dt.$$

Parce que $d\omega = 0$ nous obtenons :

$$[d\alpha(x)](\xi_1, \ldots, \xi_p) = [d\alpha(x)](\xi_1, \ldots, \xi_p) + \int_0^1 t^p [d\omega(tx)](x, \xi_1, \ldots, \xi_p) \, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \int_0^1 t^p [\omega'(tx) \cdot \xi_i](x, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) \, dt +$$

$$+ p \int_0^1 t^{p-1} [\omega(tx)](\xi_1, \ldots, \xi_p) \, dt + \int_0^1 t^p [\omega'(tx) x](\xi_1, \ldots, \xi_p) dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^p (-1)^i \int_0^1 t^p [\omega'(tx) \cdot \xi_i](x, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) \, dt =$$

$$= \int_0^1 t^p [\omega'(tx) \cdot x](\xi_1, \ldots, \xi_p) \, dt + p \int_0^1 t^{p-1} [\omega(tx)](\xi_1, \ldots, \xi_p) dt =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^p \cdot \omega(tx)] \, dt \right\} (\xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Il résulte que :

$$d\alpha(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[t^p\omega(tx)]\,dt = [t^p\omega(tx)]\Big|_0^1 = \omega(x), \text{ pour tout } x \in U, \text{ c'est-à-dire}$$

que $d\alpha = \omega$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan H. — *Calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
2. Cartan H. — *Formes différentielles*. Hermann, Paris, 1967.
3. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcțională*, vol. I. Ed. Academiei, București, 1970.
4. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcțională*, vol. II. Ed. Academiei, București, 1972.
5. Papaghiuc N. — *Calculul diferențial în spațiile local-convexe și aplicații la geometria diferențială* (thèse).

Reçu le 29.III.1977

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

COURBES SUBCARACTÉRISTIQUES SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE COMPLEXE

PAR

LIVIU NICOLESCU

Dans cette Note on considère l'algèbre de déformation associée à un couple de connexions linéaires sur une variété presque complexe. On met en evidence les champs et les courbes subcaractéristiques de cette algèbre.

1. Les variétés différentiables, les applications différentiables, les champs tensoriels et les connexions linéaires qui interviennent dans la suite sont supposés de classe C^∞.

Soit M une variété différentiable à n dimensions. On note par $\mathcal{F}(M)$ — l'anneau des fonctions réelles, différentiables, définies sur M et par $\mathcal{X}(M)$-le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de vecteurs.

2. Nous supposons que la variété M est munie d'une structure presque complexe définie par un champ de tenseurs F du type (1,1), nondégénéré, tel que :

$$F^2(X) = F \circ F(X) = -X, \text{ pour tout } X \in \mathcal{X}(M). \tag{1}$$

Soit ∇ une connexion linéaire sur la variété presque complexe (M, F).

Nous considérons une courbe $C : I \to M$, où $I \subseteq R$ est un intervalle ouvert. On note $X = \frac{dC(t)}{dt}$ et soit $p = C(t_0)$ un point régulier de la courbe C.

Notons par $\frac{D}{dt}$ la différentiele covariante par rapport à la connexion ∇ le long de la courbe C.

Définition 1. *Le point p s'appelle ∇-plane holomorphe si le vecteur $F_p(X_p)$ se trouve dans le plan osculateur* [2], [5] *de la courbe C au point p, c'est-à-dire s'il existe $a, b \in R$ tel que*

$$\left.\frac{DX}{dt}\right|_{t_0} = aX_p + bF_p(X_p), \tag{2}$$

où on a noté $X_p = \left.\frac{dC}{dt}\right|_{t_0}$.

Les courbes dont tous les points sont ∇-planes holomorphes sont appelées *des courbes planes holomorphes*.