Il résulte que :

$$d\alpha(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[t^p\omega(tx)]\,dt = [t^p\omega(tx)]\Big|_0^1 = \omega(x),\ \text{pour tout } x \in U, \text{ c'est-à-dire}$$

que $d\alpha = \omega$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan H. — *Calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
2. Cartan H. — *Formes différentielles*. Hermann, Paris, 1967.
3. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcţională*, vol. I, Ed. Academiei, Bucureşti, 1970.
4. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcţională*, vol. II, Ed. Academiei, Bucureşti, 1972.
5. Papaghiuc N. — *Calculul diferenţial în spaţiile local-convexe şi aplicaţii la geometria diferenţială* (thèse).

Reçu le 29.III.1977

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

COURBES SUBCARACTÉRISTIQUES SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE COMPLEXE

PAR

LIVIU NICOLESCU

Dans cette Note on considère l'algèbre de déformation associée à un couple de connexions linéaires sur une variété presque complexe. On met en evidence les champs et les courbes subcaractéristiques de cette algèbre.

1. Les variétés différentiables, les applications différentiables, les champs tensoriels et les connexions linéaires qui interviennent dans la suite sont supposés de classe C^∞.

Soit M une variété différentiable à n dimensions. On note par $\mathcal{F}(M)$ — l'anneau des fonctions réelles, différentiables, définies sur M et par $\mathcal{X}(M)$-le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de vecteurs.

2. Nous supposons que la variété M est munie d'une structure presque complexe définie par un champ de tenseurs F du type (1,1), nondégénéré, tel que :

$$F^2(X) = F \circ F(X) = -X, \text{ pour tout } X \in \mathcal{X}(M). \tag{1}$$

Soit ∇ une connexion linéaire sur la variété presque complexe (M, F).

Nous considérons une courbe $C : I \to M$, où $I \subseteq R$ est un intervalle ouvert. On note $X = \dfrac{dC(t)}{dt}$ et soit $p = C(t_0)$ un point régulier de la courbe C. Notons par $\dfrac{D}{dt}$ la différentiele covariante par rapport à la connexion ∇ le long de la courbe C.

Définition 1. *Le point p s'appelle ∇-plane holomorphe si le vecteur $F_p(X_p)$ se trouve dans le plan osculateur* [2], [5] *de la courbe C au point p, c'est-à-dire s'il existe $a, b \in R$ tel que*

$$\left.\frac{DX}{dt}\right|_{t_0} = aX_p + bF_p(X_p), \tag{2}$$

où on a noté $X_p = \left.\dfrac{dC}{dt}\right|_{t_0}$.

Les courbes dont tous les points sont ∇-planes holomorphes sont appelées *des courbes planes holomorphes*.

Les courbes planes holomorphes sont données par les équations [9]

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \lambda(t)\frac{dx^i}{dt} + \mu(t)F^i_j\frac{dx^j}{dt}. \tag{3}$$

où Γ^i_{jk}, resp. F^i_j sont les composantes de ∇, resp. F.

3. Soient $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ deux connexions linéaires sur la variété presque complexe (M, F) et soit $A = \overset{2}{\nabla} - \overset{1}{\nabla}$ le champ tensoriel de déformation [3], [4]. Si on définit le produit de deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ par la formule $X \cdot Y = A(X, Y)$, alors le $\mathcal{F}(M)$-module $\mathcal{X}(M)$ devient une $\mathcal{F}(M)$-algèbre. Cette algèbre s'appelle *algèbre de déformation* de la paire de connexions $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ et sera notée par $\mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ [7].

Définition 2. 2.1. Un champ $X \in \mathcal{X}(M)$ s'appelle champ subcaractéristique de l'algèbre $\mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ s'il existe deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(M)$ telles que :

$$A(X, X) = fX + gF(X). \tag{4}$$

2.2. Un champ subcaractéristique $X \in \mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ avec la propriété que $X_p \neq 0$, $(\forall)\, p \in M$, s'appelle champ de directions subcaractéristiques dans l'algèbre $\mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$.

2.3. Les trajectoires des champs de directions subcaractéristiques sont appelées courbes subcaractéristiques.

Application. Soit ∇ une connexion linéaire sur la variété presque complexe (M, F) et soit N_F le champ tensoriel Nijenhuis associé à F donné par la formule [1], [8], [9] :

$$N_F(X, Y) = [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)]) - [X, Y],$$
$$(\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Du fait que N_F est antisymétrique, il résulte que $\mathcal{U}((M, F), \nabla, \nabla + N_F)$ est une algèbre anticommutative. Donc on a : *Tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{U}((M, F), \nabla, \nabla + N_F)$ sont des champ subcaractéristiques* (avec $f = g = 0$).

3.1. *Remarque 3.* Pour un champ X qui ne s'annule pas en aucun point de M, (4) est équivalent à

$$\begin{aligned}&\{A(X, X) \otimes X - X \otimes A(X, X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} =\\ &= \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{A(X, X) \otimes X - X \otimes A(X, X)\}.\end{aligned} \tag{5}$$

3.2. Si on note avec A^i_{jk}, resp. F^i_j, les composantes de A, resp. F, dans un système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, alors en employant (5) on obtient le système différentiel d'équations des courbes subcaractéristiques associées à l'algèbre $\mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$:

$$M^{ijpq}_{ksrhl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^s}{dt}\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^l}{dt} = 0, \tag{6}$$

où on a noté :

$$M^{ijpq}_{ksrhl} = (A^i_{ks}\delta^j_r - A^j_{ks}\delta^i_r)(\delta^p_h F^q_l - \delta^q_h F^p_l) - (A^p_{ks}\delta^q_r - A^q_{ks}\delta^p_r)(\delta^i_h F^j_l - \delta^j_h F^i_l). \tag{6'}$$

L'interprétation géométrique des champs de directions subcaractéristiques de l'algèbre $\mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4. *Considérons une paire de connexions linéaires $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ sur la variété presque complexe (M, F) et soit $X \in \mathcal{X}(M)$ avec la propriété que $X_p \neq 0$, $(\forall)\, p \in M$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) X est champ de directions subcaractéristiques dans l'algèbre $\mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ (donc il existe deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(M)$ telles que nous avons la relation (4)) ;

(ii) Pour tout $p \in M$ il existe $f_p, g_p \in R$ telles que $A_p(X_p, X_p) = f_pX_p + g_pF_p(X_p)$, où $A = \overset{2}{\nabla} - \overset{1}{\nabla}$.

(iii) Considérons un point $p \in M$. Si C est la courbe $\overset{1}{\nabla}$-plane holomorphe qui vérifie les conditions :

$$C(t_0) = p, \left.\frac{dC}{dt}\right|_{t_0} = aX_p, \quad a \in R - \{0\}, \tag{7}$$

alors le point p est $\overset{2}{\nabla}$-plane holomorphe.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evidemment.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Il faut montrer que les fonctions $(q \to f_q)$, $(q \to g_q) : M \to R$ sont différentiables.

Remarquons que pour un champ X qui ne s'annulle pas en aucun point de M, la relation (4) est équivalente à :

$$A(X, X) \otimes X - X \otimes A(X, X) = g\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\}. \tag{8}$$

La relation (8), en coordonnées locales, s'écrit :

$$(A^i_{jk}\delta^h_r - A^h_{jk}\delta^i_r)X^jX^kX^r = g(F^i_j\delta^h_k - F^h_j\delta^i_k). \tag{8'}$$

Soit maintenant un point $p \in M$. Evidemment il existe un voisinage de coordonnées U autour de p et deux indices $i_0, h_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que la fonction $F^{i_0}_j X^j X^{h_0} - F^{h_0}_j X^j X^{i_0} : U \to R$ ne s'annule pas en aucun point $q \in U$. En tenant compte de (8'), on obtient :

$$g_q = \frac{\{A^{i_0}_{jk}(q)\delta^{h_0}_r - A^{h_0}_{jk}(q)\delta^{i_0}_r\}X^j(q)X^k(q)X^r(q)}{\{F^{i_0}_j(q)\delta^{h_0}_k - F^{h_0}_j(q)\delta^{i_0}_k\}X^j(q)X^k(q)}, \tag{8''}$$

pour tout $q \in U$. Donc $q \to g_q$ est différentiable.

Maintenant nous montrerons que la fonction $(p \to f_p) : M \to R$ est différentiable. La condition (ii) en coordonnées locales s'écrit :

$$A^i_{jk}(p)\, X^j(p)\, X^k(p) = f_p X^i(p) + g_p F^i_j(p)\, X^j(p).$$

Supposons le point p fixé. Puisque $X_p \neq 0$, il en résulte qu'il existe un voisinage de coordonnées U autour de p et un indice i_0 tel que la fonction $X^{i_0}: U \to R$ ne s'annulle pas en aucun point $q \in U$. La relation :

$$f_q = \frac{A^{i_0}_{jk}(q)\, X^j(q)\, X^k(q) - g_q F^{i_0}_j(q)\, X^j(q)}{X^{i_0}(q)}, \quad (\forall)\, q \in U$$

montre que la fonction $q \to f_q$ est différentiable.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $p \in M$ et soit C la courbe $\overset{1}{\nabla}$-plane holomorphe que satisfait aux conditions :

$$C(t_0) = p, \quad \left.\frac{dC}{dt}\right|_{t_0} = a X_p, \quad a \in R - \{0\}. \tag{9}$$

Les équations différentielles des courbes C sont :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha \frac{dx^i}{dt} + \beta F^i_j \frac{dx^j}{dt}, \tag{10}$$

où α et β sont des fonctions de t. Puisque $A = \overset{2}{\nabla} - \overset{1}{\nabla}$, en employant (10) nous avons :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = -A^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \alpha \frac{dx^i}{dt} + \beta F^i_j \frac{dx^j}{dt}. \tag{10'}$$

Nous considérons (10′) au point t_0 et en tenant compte de (ii), nous obtenons :

$$\left.\frac{d^2 x^i}{dt^2}\right|_{t_0} + \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}(p) \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t_0} \left.\frac{dx^k}{dt}\right|_{t_0} = \alpha_p \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t_0} + \beta_p F^i_j(p) \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t_0}. \tag{10''}$$

Les relations (10″) montrent que le point p est $\overset{2}{\nabla}$-plane holomorphe.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Soit $p \in M$ et soit C la courbe $\overset{1}{\nabla}$-plane holomorphe que satisfait aux conditions $C(t_0) = p$ et $\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t_0} = X_p$. De plus, au point p nous avons :

$$\left.\frac{d^2 x^i}{dt^2}\right|_{t_0} + \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}(p) \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t_0} \left.\frac{dx^k}{dt}\right|_{t_0} = f_p \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t_0} + g_p F^i_j(p) \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t_0}. \tag{11}$$

Nous considérons (10) dans t_0 et en tenant compte de (11), on obtient facilement (ii).

Théorème 5. *Soit $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ deux connexions linéaires symétriques sur la variété presque complexe (M, F). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ possèdent les mêmes courbes planes holomorphes ;

(b) Il existe deux 1-forme ω et η sur M telles que :

$$\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} + \delta^i_j \omega_k + \delta^i_k \omega_j + F^i_j \eta_k + F^i_k \eta_j, \tag{12}$$

où $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}$, $\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}$, ω_k, F^i_j, η_j sont les composantes de $\overset{2}{\nabla}$, $\overset{1}{\nabla}$, ω, F et η dans un voisinage de coordonnées ;

(c) Tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{U}((M, F), \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ sont des champs subcaractéristiques ;

(d) Par tous point $p \in M$ passe une courbe plane holomorphe tangente à une direction donnée.

Démonstration. (a) $\Leftrightarrow$ (b) voir [6] (p. 95, Appendix I, Lemma 3).

(b) $\Rightarrow$ (c) Soit $A = \bar{\nabla} - \nabla$. En tenant compte de (12) et de (4) il résulte (c).

(c) $\Rightarrow$ (b). En employant (4′), nous avons :

$$M^{ijpq}_{ksrhl}\, X^k X^s X^r X^h X^l = 0, \tag{13}$$

où M^{ijpq}_{ksrhl} est donnée par (6′). Puisque les relations (13) sont verifiées pour tout X^i, nous avons :

$$M^{ijpq}_{(ksrhl)} = 0. \tag{14}$$

En tenant compte de (6′) et (14), il résulte (b).

(c) $\Leftrightarrow$ (d). Evidemment.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cruceanu, V. et Miron, R. — *Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque complexe.* Ann. şt. Univ. „Al. I. Cuza". Iaşi, Sect. I. Tomul XII, Fasc. 1, 1967, pp. 79—88.
2. Finikov S. P. — *Teoria congruenţelor.* Gostehizdat, Moscova, 1950.
3. Gheorghiev G., Miron R., Papuc D. — *Geometrie analitică şi diferenţială.* E.D.P. Bucureşti, 1968—1969.
4. Gheorghiev G. şi Oproiu V. — *Geometrie diferenţială.* Vol. I, II, Univ. Iaşi, 1971.
5. Petkancin B. — *Differenţialnaia geometria.* Izd. Nauka, Sofia, 1955.
6. Tachibana S. and Ishihara S. — *On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds.* Tôhoku. Math., J. Vol. 12, 1960, pp. 77—101.
7. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global.* Comm. Math., 41, 1966——1967, pp. 73—87.
8. Vrănceanu G. — *Lecţii de geometrie diferenţială.* Vol. II, EDP Bucureşti, 1964.
9. Yano, K. — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces.* Pergamon Press, 1965.

Reçu le 14.II. 1977

B-dul Uverturii 71—73
Bl. 11, Sc. A, ap. 7
Bucureşti 7
România