$$\varphi(-t, x) = \varphi(t, x), \tag{3.36}$$

for $t \in \mathbf{R}$, $x \in [0, a]$.

Proof. Let S_1 consist of all functions in S that satisfy the relation (3.36). By (3.36) it follows that

$$\varphi_x(-t, x) = \varphi_x(t, x), \quad \varphi_{xx}(-t, x) = \varphi_{xx}(t, x),$$

and therefore

$$f(-t, x, \varphi(-t, x), \varphi_x(-t, x), \varphi_{xx}(-t, x)) =$$
$$= -f(t, x, \varphi(t, x), \varphi_x(t, x), \varphi_{xx}(t, x)).$$

Consequently,

$$m(x) = T^{-1}\int_0^T f(t, x, \varphi(t, x), \varphi_x(t, x), \varphi_{xx}(t, x))\, dt = 0, \tag{3.37}$$

for $\varphi \in S_1$, $x \in [0, a]$.

Then, from (3.17), (3.18), (3.19) and (3.37) we see that

$$(\mathcal{T}\varphi)(-t, x) = u_0(x) + \int_0^a G(x; \xi)\int_0^{-t} f(\tau, \xi, \varphi(\tau, \xi), \varphi_x(\tau, \xi), \varphi_{xx}(\tau, \xi))\, d\tau d\xi =$$
$$= (\mathcal{T}\varphi)(t, x),$$

and similarly

$$\frac{\partial(\mathcal{T}\varphi)}{\partial x}(-t, x) = \frac{\partial(\mathcal{T}\varphi)}{\partial x}(t, x), \quad \frac{\partial^2(\mathcal{T}\varphi)}{\partial x^2}(-t, x) = \frac{\partial^2(\mathcal{T}\varphi)}{\partial x^2}(t, x)$$

for $\varphi \in S_1$. Further, the proof is identical with the proof of Theorem 1.

REFERENCES

1. Cesari, L. — *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*, Symposium Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Colorado Springs. Academic Press, 1963, pp. 33—57.
2. Haimovici, A. — *Ecuații diferențiale și ecuații integrale*, EDP, București, 1965.
3. Hale, K. J. — *Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter*. Arch. Rational Mech. Anal. 23 (1966), pp. 380—398.
4. Petrovanu, D. — *Periodic solutions of the Tricomi problem*, Michigan Math. J., 16 (1969), pp. 331—348.
5. Sansone, G. — *Obyknovennye differencial'neje uravnenija*, Tom I, IL, Moskva, 1953
6. Calistru N. — *Existence and approximation of the solution of a boundary value problem* Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur, 107 (1972—1973), pp. 473—486.

Received 20. XII. 1976

Faculty of Mathematics
University of Iași
Romania

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

FONCTIONS δ-OSCILLANTES

PAR

CONSTANTIN SIMIRAD

1. Notions générales. Définition 1.1. *Soit $f(t)$ une fonction définie sur R à valeurs réelles. On appelle cette fonction δ-oscillante, si $\forall t \in R$ et $\varepsilon > 0$, il existe $t^*(t, \varepsilon) \in R$, tel que $|f(t + t^*) - f(t)| < \varepsilon$, où $t^*(t, \varepsilon) > \delta$ et $R = (-\infty, +\infty)$.*

Observation 1.1. Si une fonction $f: R \to R$ est δ-oscillante alors $\forall t \in R$ et $\varepsilon > 0$, il existe une suite $t_n \in R$ convergente à $+\infty$, telle que $\forall n \in N$, on a $|f(t + t_n) - f(t)| < \varepsilon$.

En effet, puisque $f(t)$ est δ-oscillante, $\forall \varepsilon/2^2$ et $t + t_1^*$, il existe $t_2^* > \delta$, tel que $|f(t + t_1^* + t_2^*) - f(t + t_1^*)| < \varepsilon/2^2$. Par induction soit t_n^* tel que $|f(t + t_1^* + \ldots + t_n^*) - f(t + t_1^* + \ldots + t_{n-1}^*)| < \varepsilon/2^n$ et posons $t_n = t_1^* + \ldots + t_n^*$. En intercalant une suite de termes intermédiaires, nous avons $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ et $\forall n \in N$, on a $|f(t + t_n) - f(t)| < \varepsilon$.

Théorème 1.1. *Si une fonction δ-oscillante a limite à $+\infty$, alors elle est une constante.*

Démonstration. Supposons que $\lim_{t\to\infty} f(t) = C$. Soit $t \in R$ arbitraire, $\varepsilon > 0$ et t_n définis dans l'observation (1.1). Nous aurons $f(t + t_n) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f(t + t_n) + \varepsilon$ et à la limite $C - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant C + \varepsilon$, donc $f(t) = C$, puisque ε, t sont arbitraires. On voit que si une fonction $f: R \to R$ *est* δ-oscillante, alors les fonctions cf, $c + f$ et $f(t + c)$ sont δ-oscillantes.

Théorème 1.2. *Supposons que $f: R \to R$ est uniformément continue et que $x: R \to R$ est δ-oscillante. Alors la fonction $f(x(t))$ est δ-oscillante.*

Démonstration. Soit $t \in R$, $\varepsilon_1 > 0$ et t^* le correspondant de (t, ε_1, x), c'est à dire $|x(t + t^*) - x(t)| < \varepsilon_1$. On aura $|f(x(t + t^*)) - f(x(t))| < \varepsilon$ si ε_1 est convenablement choisi.

Théorème 1.3. *La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions δ-oscillantes est une fonction δ-oscillante.*

Démonstration. Soit une suite $f_n(t)$ des fonctions δ-oscillantes uniformément convergente à $f(t)$. On a $|f(t + t^*) - f(t)| \leqslant |f(t + t^*) - f_n(t + t^*)| + |f_n(t + t^*) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ si $n > N(\varepsilon)$ et t^* est le correspondant de (t, ε_1, f_n) c'est à dire $|f_n(t + t^*) - f_n(t)| < \varepsilon_1$. On aura aussi :

Si une fonction $f: R \to R$ est δ-oscillante alors :

a) $|f(t)|$ est δ-oscillante ;

b) si $\inf_{t\in R} |f(t)| \geqslant r > 0$, la fonction $\dfrac{1}{f(t)}$ est δ-oscillante ;

c) si $|f(t)| \leqslant M$, $M < +\infty$, la fonction f^p est δ-oscillante.

Les trois inégalités suivantes $||f(t+t^*)| - |f(t)|| \leqslant |f(t+t^*) - f(t)|$, $\left|\frac{1}{f(t+t^*)} - \frac{1}{f(t)}\right| \leqslant \frac{1}{r^2} |f(t) - f(t+t^*)|$ et $|f^p(t+t^*) - f^p(t)| \leqslant |f(t+t^*) - f(t)| \cdot pM$ conduisent à ces trois affirmations.

Observation 1.2. Les fonctions périodiques et presque-périodiques[1]) sont δ-oscillantes.

L'affirmation est évidente pour les fonctions périodiques et pour les fonctions presque-périodiques elle résulte de la définition donnée à ces fonctions par H. Bohr.

Il existe des fonctions δ-oscillantes qui ne sont pas presque-périodiques. On sait que la fonction $f(t) = \sin t^2$ n'est pas presque-périodique, mais elle est δ-oscillante. Soit, en effet, $t \in R$ et $\varepsilon > 0$, alors $|\sin(t+t^*)^2 - \sin t^2| < \varepsilon$ en choisissant $t^* = \sqrt{t^2 + 2k\pi} - t$ et si k est assez grand on a $t^* > \delta$.

2. Quelques exemples de fonctions δ-oscillantes. A) *Soit une fonction $f: R \to R$ continue et monotone croissante à $+\infty$; alors la fonction $f(t) \cdot \sin t$ est δ-oscillante.* En effet, posons $h(\tau) = f(t+\tau)\sin(t+\tau) - f(t) \cdot \sin t$, alors on a :

$$h\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - t\right) = f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - f(t)\sin t > 0 \text{ et}$$

$$h\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} - t\right) = -f\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) - f(t)\sin t < 0$$

en choisissant k convenablement. Puisque $h(\tau)$ est continue, il existe $t^* \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - t, 2k\pi + \frac{3\pi}{2} - t\right)$ tel que $h(t^*) = 0$, c'est à dire $f(t) \cdot \sin t$ est δ-oscillante.

B) *Si une fonction $f: R \to R$ est δ-oscillante, alors tout polynôme de la forme $T_{n,f}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k f(t)}$, $\lambda_k \in R$, est une fonction δ-oscillante.* En effet, il suffit de montrer ce fait pour les polynômes de la forme suivante: $T_{n,f}(t) = \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos \lambda_k f(t) + b_k \sin \lambda_k f(t)]$. On a $|T_{n,f}(t+t^*) - T_{n,f}(t)| < \varepsilon$ en choisissant t^* le correspondant de $\left(t, \frac{\varepsilon}{A\left[\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)\right]}, f\right)$ où $A = \sup_k |\lambda_k|$.

Soit C_f l'ensemble de fonctions uniformément approximables sur R (dans le sens de la convergence uniforme) par les polynômes trigonométriques de la forme ci-dessus. Toute fonction de C_f sera δ-oscillante et si $f, g \in C_f$, alors les fonctions cf, $|f|$, $f(t+c)$, $c+f$, $f+g$, fg, f^p, $f(ct)$ appartiennent à C_f. Si $\inf_{t \in R} |g(t)| \geqslant r > 0$, alors $1/f \in C_f$.

[1]) Pour tout ce qui concerne les fonctions presque-périodiques, voir [1] et [2].

C) *Les fonctions uniformément approximables sur R par les polynômes de la forme $T_n(t^p) = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{i\lambda_k t^p}$ sont δ-oscillantes.* En effet, $T_n(u)$, comme fonction de u, est presque-périodique, donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon)$ tel que dans chaque intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ il existe $\tau(\varepsilon)$ ayant la propriété que $|T_n(u+\tau) - T_n(u)| < \varepsilon$, $\forall u \in R$ et de plus $\lim_{\varepsilon \to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty$. En choisissant $t^*(t, \varepsilon) = \sqrt[p]{t^p + \tau} - t$ et $\tau(\varepsilon)$ assez grand, on a $t^* > \delta$, et $|T_n(t+t^*) - T_n(t)| < \varepsilon$. Soit $F^{(p)}$ l'ensemble de fonctions définies ci-dessus. Toute fonction de $F^{(p)}$ sera δ-oscillante, continue et bornée sur R. L'ensemble $F^{(1)}$ coïncide avec l'ensemble de fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.

Si $f, g \in F^{(p)}$, alors cf, $|f|$, $f(t+c)$, $f+g$, fg, f^p, $f(ct)$ appartiennent à $F^{(p)}$ et si $\inf_{t \in R} |g(t)| \geqslant r > 0$, alors $1/f \in F^{(p)}$.

La démonstration de ces affirmations est immédiate.

Soit un polynôme trigonométrique appartenant à $F^{(p)}$, et considérons le probleme de l'existence de la moyenne de ce polynôme. Multiplions ce polynôme par pt^{p-1} et intégrons de 0 à $\sqrt[p]{T}$. Alors nous aurons

$$p\int_0^{\sqrt[p]{T}} t^{p-1} T_n(t^p)\, dt = p\int_0^{\sqrt[p]{T}} \left(C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\lambda_k t^p}\right) t^{p-1}\, dt$$

et en changeant la variable, on a

$$\int_0^T T_n(x)\, dx = C_0 T + \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{1}{i\lambda_k}(e^{i\lambda_k T} - 1)$$

d'où on a

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T T_n(x)\, dx = C_0.$$

Dans le cas général où $f \in F^{(p)}$, on peut affirmer qu'il existe.

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^{\sqrt[p]{T}} t^{p-1} f(t^p)\, dt = M_f < +\infty.$$

Evidemment, un problème analogue d'association d'une série Fourier à une fonction δ-oscillante d'argument t^p, se pose. Si $f \in F^{(p)}$, il résulte que $f(u)$ est une fonction presque-périodique et alors elle a une série Fourier associée. Dans le cas où

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{i\lambda_k u}, \text{ alors on a } f(t^p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{i\lambda_k t^p}.$$

En ce qui concerne la dérivée et la primitive d'un polynôme trigonométrique en t^p des grandes difficultés aparaîssent pour montrer qu'elles sont δ-oscillantes.

D) *Soit C_p l'ensemble des fonctions uniformément approximables sur R par des polynômes trigonométriques de la forme $T_{n,p}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{i\lambda_k P(t)}$, où $P(t)$ est un polynôme quelconque à coefficients réels. Toute fonction de C_p est δ-oscillante.* En effet, la fonction $T_{n,p}(u)$, où $u = P(t)$ est presque-périodique et on a :

$$|T_{n,p}(u+\tau) - T_{n,p}(u)| < \varepsilon, \ \forall u \in R, \text{ ou } |T_{n,p}(P(t)+\tau) - T_{n,p}(P(t))| < \varepsilon, \ \forall t \in R.$$

Soit $h(t^*) = P(t+t^*) - P(t) - \tau$, et $t_1^* > \delta$; alors on peut choisir τ tel que $h(t_1^*) < 0$. Puisqu'on peut considérer $P(t) = a_0 t^n + \ldots + a_n$ avec $a_0 > 0$ (sinon, on introduira le signum dans les coefficients λ_k), il existe $t_2^* > t_1^*$, tel que $h(t_2^*) > 0$. Donc il existe $t^* \in (t_1^*, t_2^*)$ tel que $h(t^*) = 0$, c'est à dire $P(t+t^*) = P(t) + \tau$ et nous aurons $|T_{n,p}(t+t^*) - T_{n,p}(t)| < \varepsilon$. L'ensemble C_p est fermé par rapport aux opérations algébriques élémentaires. Si on remplace la fonction $P(t)$ par une fonction monotone croissante non-bornée, le résultat ci-dessus reste encore valable.

3. Propriétés caractéristiques des fonctions δ-oscillantes. Théorème 3.1. *Afin qu'une fonction $f: R \to R$, continue et bornée soit δ-oscillante, il faut et il suffit l'existence de deux suites $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ convergentes à $+\infty$, telles que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$ et $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = m$, où $m = \inf_{t\in R} f(t)$ et $M = \sup_{t\in R} f(t)$.*

Démonstration. Supposons que $f(t)$ est δ-oscillante. Soit $\{t_k\}$, une suite, telle que $M \geqslant f(t_k) \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Si $\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$, alors on la note $\{x_n\}$ et $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Si non, alors soit $\lim_{k\to\infty} t_k = t_0$, donc $f(t_0) = M$. Soit t_1^* le correspondent de $\left(t_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, c'est à dire $|f(t_0 + t_1^*) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, t_2^* le correspondant de $\left(t_0 + t_1^*, \frac{\varepsilon}{2^2}\right)$ et ainsi de suite, t_n^* le correspondant de $\left(t_0 + t_1^* + \ldots + t_{n-1}^*, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$.

Posons $t_n = t_0 + \ldots + t_{n-1}^*$ et on aura

$$(*) \qquad |f(t_n) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Donc, étant doné $\varepsilon > 0$, on peut construire une suite $\{t_n\}$, avec $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, ayant la propriété (*). Soit la suite $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots$ et les suites $\{t_{n,k}\}$ qui leur correspondent. En prenant la suite diagonale, on aura $|f(t_{n,n}) - f(t_0)| < \frac{1}{2^n}$ et $\lim_{n\to\infty} t_{n,n} = +\infty$. Si la suite $\{t_k\}$ tend vers $-\infty$, alors on peut construire une suite $\{t_k^*\}$ positive ayant la même propriété, c'est à dire $M \geqslant f(t_k^*) \geqslant M - \frac{1}{2^k}$. Pour la construction de la suite $\{y_n\}$ on procédera d'une manière analogue.

Réciproquement, soient deux suites $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ convergentes à $+\infty$ telles que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$ et $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = m$. Nous choisirons deux sous-suites $\{x_n'\}$ et $\{y_n'\}$ ayant la propriété qu'entre deux termes consécutifs d'une suite, il existe un seule terme de la deuxième sous-suite et réciproquement, et telles que la suite $f(x_n')$ soit monotone non-décroissante et la suite $f(y_n')$ soit monotone non-croissante. Soit $t \in R$, alors $f(t) \in [f(y_n'), f(x_n')]$, pour tout $n > N(t)$ et puisque $f(t)$ est continue, elle a la propriété de Darboux, donc il existe $t_n^* \in [y_n', x_n']$ tel que $f(t_n^*) = f(t)$ et en posant $t_{n_0}^* = t_0^* - t$ nous aurons $f(t + t_0^*) - f(t) = 0$. Etant donnée $\delta > 0$, on peut évidemment choisir n^0 tel que $t_0^* > \delta$. Si $m = -\infty$ et $M = +\infty$, alors le théorème 3.1 reste encore valable.

Observation 3.1. Si une fonction $f: R \to R$ est non-bornée inférieurement et supérieurement, continue et δ-oscillante, alors sa somme avec une fonction bornée est une fonction δ-oscillante. En effet, soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ les deux suites définies dans le théorème 3.1 et $|g(t)| \leqslant M$. Alors on a évidemment $\lim_{n\to\infty} [g(x_n) + f(x_n)] = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} [g(y_n) + f(y_n)] = -\infty$, c'est à dire $f + g$ est δ-oscillante (ou $f - g$). Si $g(t)$ est une fonction continue et positive à partir de $t > T$, la fonction $g(t) f(t)$ sera δ-oscillante. Si $\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty$ et $f(t)$ est δ-oscillante bornée, alors :

— $f(t) g(t)$ n'est pas δ-oscillante si $\inf_{t\in R} f(t) = m > 0$, $\sup_{t\in R} f(t) = M > 0$

— $f(t) g(t)$ est δ-oscillante si $\inf_{t\in R} f(t) = m < 0$, $\sup_{t\in R} f(t) = M > 0$.

Observation 3.2. Soit $f: R \to R$ une fonction continue et δ-oscillante, alors on peut choisir une sous-suite de minima relatifs monotone, non-croissante et une sous-suite de maxima relatifs monotone non-décroissante, ayant les abscisses dans deux suites de nombres réelles convergentes à $+\infty$.

En effet, soient les deux suites $\{x_n'\}$ et $\{y_n'\}$ définies dans le théorème 3.1. Posons $f(t_n^*) = \sup_{t\in[x_n', x_{n+1}']} f(t) \geqslant f(x_n')$ puisque $y_n' < x_n' < y_{n+1}'$, il suit que $f(t_n^*)$ est un maximum relatif. La suite $\{f(t_n^*)\}$ est convergente à $M = \sup_{t\in R} f(t)$ et donc on peut choisir une sous-suite monotone non-décroissante.

Définition 3.1. *La fonction $f: R \to R$ s'appelle asymptotiquement δ-oscillante si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $T(\varepsilon)$ tel que $\forall t > T(\varepsilon)$ et $\delta > 0$, il existe un $t^*(t, \varepsilon) > \delta$, ayant la propriété $|f(t + t^*) - f(t)| < \varepsilon$.*

Théorème 3.2. *Soit $f: R \to R$, asymptotiquement δ-oscillante et continue. La fonction $f(t)$ est décomposable en une somme de deux fonctions $g(t) + \varpi(t)$ où $g(t)$ est δ-oscillante et $\lim_{t\to\infty} \varpi(t) = 0$.*

La démonstration est très longue ; c'est pourquoi nous l'omettons. La décomposition ci-dessus n'est pas unique puisque on peut construire, en partant de la fonction $g(t)$, d'autres fonctions δ-oscillantes ayant la même propriété. En effet, soient les fonctions

$$g_a(t) = \begin{cases} g(a) & \text{si } t \leqslant a, \\ g(t) & \text{si } t > a; \end{cases}$$

ces fonctions sont δ-oscillantes et si on pose $f(t) = g_a(t) + \varpi_a(t)$, alors on a $\lim_{t\to\infty} \varpi_a(t) = 0$.

On peut affirmer que dans un ensemble de fonctions δ-oscillantes dans lequel la différence de deux fonctions est δ-oscillante, la décomposition ci-dessus est unique dans le sens que dans cet ensemble il y a une seule fonction $g(t)$ telle que $f(t) = g(t) + \varpi(t)$, où $\lim_{t\to\infty} \varpi(t) = 0$.

En effet, si $f(t) = h(t) + \varpi^*(t)$, où $\lim_{t\to\infty} \varpi^*(t) = 0$, alors nous aurons $\lim_{t\to\infty} [g(t) - h(t)] = \lim_{t\to\infty} [\varpi^*(t) - \varpi(t)] = 0$ et d'apres le théorème 1.1 on a $g(t) \equiv h(t)$.

Définition 3.2. *Soient $f, g: R \to R$, deux fonctions δ-oscillantes et continues. On dit que les fonctions f, g sont également δ-oscillantes si $\forall \varepsilon > 0$, et $t \in R$, il existe $t^*(t, \varepsilon)$, $t^* > \delta$, tel que $|f(t + t^*) - f(t)| < \varepsilon$ et $|g(t + t^*) - g(t)| < \varepsilon$.*

Cette définition nous permet d'introduire des classes d'équivalence dans l'ensemble des fonctions δ-oscillantes.

Théorème 3.3. *Soient $f, g: R \to R$, deux fonctions dérivables et supposons que $\left|\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\right| \leqslant K$, alors si la fonction $g(t)$ est δ-oscillante, la fonction $f(t)$ sera aussi δ-oscillante, de plus elles seront également δ-oscillantes.*

En effet, soit $t^* \in R$, on a $|f(t + t^*) - f(t)| \leqslant K\,|g(t + t^*) - g(t)|$ et pour t^* convenablement choisi, résulte l'affirmation du théorème.

4. Fonctions δ-oscillantes dépendant de paramètres. Soit $\Omega \subset C^n$ (C^n est l'espace complexe n-dimensionel) et $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega \subset C^n$. Envisageons des fonctions à valeurs complexes, définies sur $R \times \Omega$, continues sur ce domaine.

Définition 4.1. *La fonction $f(z, t)$ s'appelle δ-oscillante en t, uniformément par rapport à $z \in \Omega$, si $\forall t \in R$, $\varepsilon > 0$, il existe $t^*(t, \varepsilon) \in R$, $t^* > \delta$, tels que $|f(z, t) - f(z, t + t^*)| < \varepsilon$, $\forall z \in \Omega$.*

Supposons que $f(z, t)$ est δ-oscillante en t, uniformément par rapport à $z \in \Omega$; alors les fonctions cf, $|f|$, $f(z, t + c)$, sont δ-oscillantes en t, uniformément par rapport à $z \in \Omega$. Si de plus $|f(z, t)| \geqslant m > 0$, alors $1/f(z, t)$ est δ-oscillante en t, uniformément par rapport à $z \in \Omega$. La même propriété sera valable pour $f^p(z, t)$ si $f(z, t)$ est bornée.

Théorème 4.1. *Soit $f(z, t)$ la limite d'une suite $f_n(z, t)$ uniformément convergente. Si les fonctions $f_n(z, t)$ sont δ-oscillantes en t, uniformément par rapport à $z \in \Omega$, alors la fonction $f(z, t)$ sera δ-oscillante en t, uniformément par rapport à $z \in \Omega$.*

Définition 4.2. *Soit $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$, où $z_i = z_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. On dit que le vecteur $z \in C^n$ est δ-oscillant si les fonctions $z_i(t)$ sont également δ-oscillantes.*

On voit que si un vecteur est δ-oscillant, alors il est δ-oscillant en norme.

Théorème 4.2. *Soit $f(z, t)$ uniformément continue, δ-oscillante en t, uniformément par rapport à $z \in \Omega$ et $z(t)$ une fonction également δ-oscillante avec $f(z, t)$, alors $f(z(t), t)$ est une fonction δ-oscillante.*

En effet, en choisissant t^* le correspondant de (t, ε_1, z, f) tel que

$$|z(t + t^*) - z(t)| < \varepsilon_1 \text{ et } |f(z, t + t^*) - f(z, t)| < \varepsilon_1, \text{ on a}$$

$$f(z(t + t^*), t + t^*) - f(z(t), t)| \leqslant |f(z(t + t^*), t + t^*) - f(z(t), t + t^*)| + \\ + |f(z(t), t + t^*) - f(z(t), t)| < \varepsilon.$$

5. Quelques applications à l'étude de certaines systèmes d'équations différentielles. 5.a. Soit le système

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(t), \quad |f_i(t)| \leqslant M < +\infty, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où $a_{ij} \in R$, $f_i(t)$ sont des fonctions δ-oscillantes appartenant à un ensemble $\mathcal{M}$ de fonctions δ-oscillantes dans lequel les opérations algébriques élémentaires sont des opérations intérieures.

Théorème 5.1. *Si* Re $\lambda_i \neq 0$, *où λ_i sont les racines de l'équation* det $(A - \lambda I) = 0$, $A = (a_{ij})$, *alors le système* (1) *a une seule solution bornée et elle est δ-oscillante. De plus on a $|y_i(t)| \leqslant KM$, $i = 1, \ldots, n$, K est une constante que nous allons déterminer.*

En faisant une transformation convenable $y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_j$ le système (1) peut avoir la forme triangulaire :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 + b_{12} z_2 + \ldots + b_{1n} z_n + f_1^*(t) \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 + \ldots + b_{2n} z_n + f_2^*(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_n}{dt} = \lambda_n z_n + f_n^*(t) \end{cases}$$

où $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j^*(t) = f_i(t)$ et on voit que les $f_i^*(t)$ appartiennent à la même classe fermée par rapport aux opérations algébriques élémentaires. De même, on observe le fait que si les fonctions $y_i(t)$ sont bornées, alors $z_i(t)$ le sont aussi et réciproquement. Supposons $\operatorname{Re}\lambda > 0$ et soit l'équation

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + f(t), \tag{3}$$

où $f(t)$ est δ-oscillante bornée ; alors (3) a la solution bornée

$$z_0(t) = -\int_t^{\infty} e^{\lambda(t-x)} f(x)\, dx.$$

Puisque $f(t)$ est δ-oscillante soit $\alpha(t, \varepsilon) = \inf\{t^*/t^* \geqslant \delta$ et $|f(t + t^*) - f(t)| < \varepsilon,\ t \in R\}$. Nous aurons alors $|f(t + \alpha(t, \varepsilon)) - f(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in R$ et

$$z_0(t + \alpha(t, \varepsilon)) = -\int_{t+\alpha(t,\varepsilon)}^{\infty} e^{\lambda(t+\alpha(t,\varepsilon)-x)} f(x)\, dx = -e^{\lambda t}\int_t^{\infty} e^{-\lambda u} f(u + \alpha(t, \varepsilon))\, du.$$

D'ici il résulte $|z_0(t + \alpha(t, \varepsilon)) - z_0(t)| \leqslant \frac{1}{\mu} \sup_{t \in R} |f(t + \alpha(t, \varepsilon)) - f(t)|$, où $\mu = \operatorname{Re}\lambda > 0$, c'est à dire que $z_0(t)$ est δ-oscillante et appartient au même ensemble $\mathcal{M}$, donc $z_n(t)$ est δ-oscillante.

En revenant au système (2), de proche en proche il résulte que la solution bornée $z_i(t)$ est δ-oscillante et qu'elle appartient au même ensemble $\mathcal{M}$. Puisque l'équation (3) a une seule solution bornée, alors il résulte qu'il existe une seule solution bornée du système (2), c'est à dire du système (1). De plus on a

$|z_n(t)| \leqslant \frac{M}{\mu_n} = K_n M$ et puisque $z'_{n-1} = \lambda_{n-1} z_{n-1} + b_{n-1,n} z_n + f^*_{n-1}(t)$ $(' = d/dt)$ il résulte

$|z_{n-1}(t)| \leqslant \frac{1}{\mu_{n-1}}\left[|b_{n-1,n}| \frac{M}{\mu_n} + M\right] = K_{n-1} M$ et par induction $|z_1(t)| \leqslant K_1 M$.

Posons $K = \max(K_1, \ldots, K_n)$; nous aurons $|z_i(t)| \leqslant KM$. Si $\operatorname{Re}\lambda < 0$, on procéde d'une manière analogue.

5.b. Soit le système quasi-linéaire

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(t) + \mu g_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad |g_i(t, y)| \leqslant M \tag{4}$$

et le système générateur

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4'}$$

Les fonctions $f_i(t)$ sont dans un ensemble C de fonctions également δ-oscillantes, $g_i(t, y)$ sont des fonctions également δ-oscillantes en t, uniformément par rapport à $y \in \Delta_1 \subset C^n$, appartenant à C (comme fonction de t), $(\Delta_1) = \{y/|y_i - y_i^0| \leqslant a\}$, y_i^0 étant la solution du (4'). On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.2. i. *Si l'équation* $\det(A - \lambda I) = 0$ *a les racines* λ_i *et* $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$,

ii. *Si les fonctions* $g_i(t, y)$ *sont continues en* (Δ) : $|y_i - y_i^0| \leqslant a$, $t \in R$ et $|g(t, y) - g(t, z)| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$ *en* (Δ_1).

Alors le système (4) a une seule solution bornée δ-oscillante et si μ est assez petit, elle a le graphique en (Δ_1). *De plus* $\lim_{\mu \to 0} y_i(t) = y_i^0(t)$.

La *démonstration* de ce théorème est similaire à la démonstration d'un théorème analogue dans le cas presque-périodique.

En partant de la solution du système générateur, nous formerons la suite des approximations successives, en prenant y_i^k la solution bornée du système

$$\frac{dy_i^k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^k + f_i(t) + \mu g_i(t, y_1^{k-1}, \ldots, y_n^{k-1}), \quad i = 1, \ldots, n \text{ et} \tag{5}$$

$k = 1, 2, \ldots$ On observe que dans chaque étape des approximations successives, on doit intégrer un système de la forme (1). Il faut montrer que la suite des approximations successives a les éléments en (Δ_1) si μ est assez petit. Evidemment $y_i^0(t) \in (\Delta_1)$ et supposons que l'approximante d'ordre $k - 1$ a le graphique en (Δ_1). De (5) il résulte :

$$\frac{d(y_i^k - y_i^0)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y_j^k - y_j^0) + \mu g_i(t, y_1^{k-1}, \ldots, y_n^{k-1})$$

et d'après le théorème (5.1) on a $|y_i^k(t) - y_i^0| \leqslant |\mu| KM$ et si $|\mu| \leqslant a/KM$, nous avons $y_i^k(t) \in (\Delta_1)$. La solution $y_i^0(t)$ est δ-oscillante, donc $g_i(t, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ est δ-oscillante et d'après le théorème 5.1, la solution $y_i^1(t)$ sera δ-oscillante. Par induction il résulte que la suite des approximations successives est constituée d'éléments δ-oscillantes. De (5) il résulte

$$\frac{d(y_i^{k+1} - y_i^k)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y_j^{k+1} - y_j^k) + \mu\,[g_i(t, y_1^k, \ldots, y_n^k) - g_i(t, y_1^{k-1}, \ldots, y_n^{k-1})] \tag{6}$$

et d'après le théorème 5.1 nous aurons

$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \leqslant |\mu| KL \sum_{j=1}^{n} \sup_{t \in R} |y_j^k(t) - y_j^{k-1}(t)|, \quad i = 1, \ldots, n \text{ et } k = 1, 2, \ldots$$

Soit $C_k = \max_j [\sup_{t \in R} | y_j^{k+1}(t) - y_j^k(t)]$; de l'inégalité ci-dessus on a

$$C_k \leqslant |\mu| nKLC_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

et puisque $C_0 \leqslant |\mu| nKM$ il résulte que $C_k \leqslant M/L (|\mu| nKL)^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ En choisissant $|\mu| < \min \left\{ \frac{a}{KM}, \frac{1}{nKL} \right\}$, la suite des approximations successives est convergente puisque la série $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ est convergente et elle est une majorante de la série $\sum_{k=0}^{\infty} | y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t) |$. Posons $y_i(t) = \lim_{k \to \infty} y_i^k(t)$ et d'après (5) $y_i(t)$ est une solution de (4), δ-oscillante (voir le théorème 1.3). En ce qui concerne l'unicité, supposons qu'il existe encore une solution $z_i(t)$; nous aurons alors l'inégalité (en utilisant le théorème 5.1)

$$| z_i(t) - y_i^k(t) | \leqslant |\mu| KL \left[\sum_{j=1}^{n} \sup_{t \in R} | z_j(t) - y_j^{k-1}(t) | \right] \quad i = 1, \ldots, n \text{ et } k = 1, 2, \ldots$$

Posons $d_k = \max_i [\sup_{t \in R} | z_i(t) - y_i^k(t) |]$ et alors $d_k \leqslant |\mu| nKLd_{k-1}$, ou $d_k \leqslant (|\mu| n KL)^k d_0$, c'est-à-dire $\lim_{k \to \infty} y_i^k(t) = z_i(t)$. Puisque $| y_i^k - y_i^0 | \leqslant$ $\leqslant |\mu| KM$ il résulte que $\lim_{\mu \to 0} y_i(t) = y_i^0(t)$.

5.c. Soit l'équation

$$\ddot{y}t - \dot{y}[(p-1) - 2At^p] + t^{2p-1} By = t^{2p-1} f(t^p), \text{ où } f(t^p) \in F^{(p)}. \tag{8}$$

En posant $z = \dot{y}/t^{p-1}$ on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{y} = t^{p-1} z, \\ \dot{z} = t^{p-1} - (2Az - By + f(t^p)). \end{cases}$$

et en faisant $u = t^p$ ce système devient :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 2Az - By + f(u) \quad \text{où } ' = d/du. \end{cases} \tag{9}$$

La fonction $f(u)$ est presque-périodique, et alors si $A \neq 0$, $B \neq 0$, nous aurons une solution presque-périodique de (9), c'est à dire une solution δ-oscillante de (8).

5.d. Nous nous proposons d'étudier l'équation différentielle homogène d'ordre n à coefficients constants

$$Ly = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \quad p_i \in R. \tag{10}$$

Théorème 5.3. 1. *Si toutes les racines caractéristiques de (10) sont réelles, alors aucune solution de (10) n'est pas δ-oscillante.*

2. Si certaines racines caractéristiques de l'équation (10) sont complexes, c'est à dire $r_i = \alpha_i + i\beta_i$, $r_i^* = \alpha_i - i\beta_i$ et $r_k = \gamma_k$, $i = 1, \ldots, h$ et $k = 1, \ldots, n - 2h$, alors :

a. Si $\alpha = \max_i (\alpha_i) > \gamma_k$, $\alpha > 0$, la solution générale de (10) est δ-oscillante.

b. Si $\alpha < \gamma_{k0}$, la solution générale de (10) n'est pas δ-oscillante.

3. Si les racines caractéristiques sont complexes et parmi elles il y a au moins une à partie réelle positive, alors la solution générale de (10) est δ-oscillante.

Dans la démonstration de ce théorème nous utiliserons le théorème 3.1. La première affirmation est évidente, étant donée la forme des solutions particulières et par conséquent de la solution générale.

Supposons que les racines de l'équation caractéristique sont simples, la solution générale, en considérant $\alpha = \alpha_1$ sera :

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta_1 t + C_1' \sin \beta_1 t) + e^{\alpha_2 t} (C_2 \cos \beta_2 t + C_2' \sin \beta_2 t) + \ldots +$$
$$+ e^{\alpha_h t} (C_h \cos \beta_h t + C_h' \sin \beta_h t) + A_1 e^{\gamma_1 t} + \ldots + A_{n-2h} e^{\gamma_{n-2h} t}.$$

Les suites $x_n = 2n\pi/|\beta_1|$, $\bar{x}_n = (2n+1)\pi/|\beta_1|$ sont convergentes à $+\infty$ et on a $\lim_{n \to \infty} y(x_n) = +\infty$ (sign C_1), $\lim_{n \to \infty} y(\bar{x}_n) = -\infty$ (sign C_1) et donc $y(t)$ sera δ-oscillante. D'une manière analogue, on peut trouver les deux suites dans le cas 3. Dans le cas où on a $\forall i$, $\alpha_i < 0$, alors $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ et donc la solution générale n'est pas δ-oscillante. Si les racines caractéristiques sont multiples, on trouvera les deux suites pour lesquelles $y(t)$ sera convergente à $\pm\infty$.

Le cas de l'équation non-homogène peut être étudié directement.

5.e. Soit l'équation

$$\ddot{z} - \frac{f'(t)}{f(t)} \dot{z} + f^2(t) z = 0, \text{ où } f(t) \geqslant r > 0 \text{ (où } f(t) \leqslant r < 0) ; \tag{11}$$

toute solution de (11) est δ-oscillante.

En effet, l'équation (11) est équivalente au système ([4], pag. 76)

$$\begin{cases} \dot{y} = -f(t) z, \\ \dot{z} = f(t) y, \end{cases} \tag{11'}$$

et en faisant le changement

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \int f(t) dt & -\sin \int f(t) dt \\ \sin \int f(t) dt & \cos \int f(t) dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

on obtient $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$ et donc la solution (y, z) est δ-oscillante. Si la fonction $\int_t f(t) dt$ est δ-oscillante alors la solution de (11) restera δ-oscillante.

5.f. En [3] N. Gheorghiu a montré, en utilisant un procédé de linéarisation, que dans certaines conditions, toute solution de l'équation $x' = f(t, x)$, qui est bornée, est presque-périodique. En utilisant le même procédé, nous allons montrer une propriété pour les solutions bornées de l'équation

$$x' = f(t, x, \mu), \quad ' = d/dt, \quad \mu \in (0, a], \quad a > 0. \tag{12}$$

Théorème 5.4. Si 1. *$f(t, x, \mu)$ est continue et bornée dans le domaine $|x| \leqslant M$, $t \in R$, $\mu \in (0, a]$*

2. *$f_x(t, x, \mu)$ est continue et $f_x(t, x, \mu) \geqslant K > 0$,*

3. *il existe une fonction $\alpha(t, \mu)$ dont $\lim\limits_{\mu \to 0} \dfrac{\partial \alpha(t, \mu)}{\partial t} = 0$ et qui, pour μ assez petit satisfait à $\alpha(t, \mu) \geqslant \delta$, telle que $|f(t + \alpha(t, \mu), x, \mu) - f(t, x, \mu)| < \varepsilon$, uniformément par rapport à $x \in D$ et $\mu \in (0, a]$, où $D = \{x \mid |x| \leqslant M\}$.*

Alors toute solution bornée de (12) a la propriété que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\mu_0 \in (0, a]$ tel que $|x(t + \alpha(t, \mu), \mu) - x(t, \mu)| < \varepsilon$, $\forall \mu < \mu_0$.

Démonstration. Soit $x(t, \mu)$ une solution bornée de l'équation (12). Alors on a

$$\frac{dx(t, \mu)}{dt} = f(t, x(t, \mu), \mu) \quad \text{et}$$

$$\frac{dx(t + \alpha(t, \mu), \mu)}{dt} = f(t + \alpha(t, \mu), x(t + \alpha(t, \mu), \mu), \mu) \cdot [1 + \alpha'(t, \mu)]$$

où $' = d/dt$.

Posons $\Delta(t) = x(t + \alpha(t, \mu), \mu) - x(t, \mu)$; alors on a :

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = f(t + \alpha(t, \mu), x(t + \alpha(t, \mu), \mu), \mu) - f(t, x(t, \mu), \mu) + \alpha'(t, \mu) f(t + \alpha(t, \mu), x(t + \alpha(t, \mu), \mu), \mu).$$

En utilisant le lemme de Hadamard on aura

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \varphi(t)\,\Delta(t) + \{f(t + \alpha(t, \mu), x(t, \mu), \mu) - f(t, x(t, \mu), \mu)\} + \alpha'(t, \mu) f(t + \alpha(t, \mu), x(t + \alpha(t, \mu), \mu), \mu), \quad \text{où} \tag{*}$$

$$\varphi(t) = \int_0^1 f_x(t + \alpha(t, \mu), x(t, \mu) + u\Delta(t), \mu)\,du \quad \text{est continue et} \quad \varphi(t) \geqslant K.$$

L'équation (*) est linéaire du premier ordre et donc

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(u)\,du +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \{f(\theta + \alpha(\theta, \mu), x(\theta, \mu), \mu) - f[\theta, x(\theta, \mu), \mu]\} \exp\left\{-\int_{t}^{\theta} \varphi(u)\,du\right\} d\theta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \alpha'(\theta, \mu) f(\theta + \alpha(\theta, \mu), x(\theta + \alpha(\theta, \mu), \mu), \mu) \exp\left\{-\int_{t}^{\theta} \varphi(u)\,du\right\} d\theta.$$

La solution $x(t, \mu)$ est bornée et en utilisant le lemme de Demidovitch pour $\tau = \alpha(t^*, \mu)$ il résulte qu'il existe t_0 arbitrairement grand, tel que $|\alpha(t^*, \mu) - \alpha(t_0, \mu)| = |\alpha'(\zeta, \mu)(t_0 - t^*)| < \varepsilon_2$ si $\mu < \mu^*(\varepsilon_2)$. Puisque la solution $x(t, \mu)$ est continue, il résulte que $|x(t_0 + (t_0, \mu)) - x(t_0, \mu)| < \varepsilon/3$. Fixons t et choisissons $t_0 > t$ et μ convenablement de manière que $|\alpha'(\theta, \mu)| < \dfrac{\varepsilon}{3P} K$, où $\theta \in [t, t_0]$ et $|f(t, x, \mu)| \leqslant P$. Alors on aura

$$|\Delta(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}[1 - e^{K(t - t_0)}] + \frac{\varepsilon}{3}[1 - e^{K(t - t_0)}] < \varepsilon \quad \text{et donc} \quad |\Delta(t)| < \varepsilon \text{ si } \mu < \mu_0$$

A titre d'exemple soit $f(t, x, \mu) = (x^3 + x)\left[\sin \dfrac{1}{\mu} e^{\mu x t} + 2\right]$. Dans ce cas on a $\alpha(t, \mu) = \dfrac{1}{\mu^2} \ln(e^{\mu x t} + 2k\pi\mu) - t$ et $\lim\limits_{\mu \to 0} \dfrac{\partial \alpha(t, \mu)}{\partial t} = 0$.

On observe que, dans le cas de l'équation $x' = f(t, x)$, s'il existe $\alpha(t, \varepsilon) > \delta$ telle que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\partial \alpha(t, \varepsilon)}{\partial t} = 0$, alors toute solution de cette équation qui est bornée est δ-oscillante. Malheureusement nous n'avons pa trouvé un exemple de ce type, sauf les fonction presque-périodiques. Des difficultés apparaîssent puisque en général une fonction δ-oscillante n'est pas également δ-oscillante avec sa dérivée.

6. Quelques considérations finales. La notion de fonction δ-oscillante est très générale et une étude globale est difficile. Pour faciliter le travail avec ce type de fonctions, on peut utiliser des ensembles particuliers. Par exemple, on peut prendre l'ensemble de fonctions presque-périodiques, en remplaçant l'argument par des fonctions réelles à valeurs réelles, non-bornées et d'introduire des ε-presque-périodes en dépendant de la variable t. Evidemment, des difficultés apparaîssent, mais étant donée la multitude des phénomènes oscillants rencontrés dans la nature qui ne peuvent pas être décrits par les fonctions presque-périodiques, l'effort mérite d'être fait.

Nous avons considéré seulement le cas des fonctions δ-oscillantes à $+\infty$, mais sans des difficultés on peut définir la notion de fonction δ-oscillante à $-\infty$, ou de fonction δ-oscillante dans un point $t_0 \in R$. Par exemple, on dit que la fonction $f : R \to R$ est δ-oscillante à $-\infty$, si $\forall t \in R$ et $\varepsilon > 0$, il existe $t^*(t, \varepsilon)$ $t^* < \delta$, $\delta < 0$, tel que $|f(t + t^*) - f(t)| < \varepsilon$. On peut dire q'une fonction est δ-oscillante sur R, si elle est δ-oscillante à $+\infty$ et à $-\infty$. On appellera une fonction δ-oscillante en $t_0 \in R$, si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une suite $\{t_n\} \subset R$, convergente à $+\infty$, telle que $|f(t + t_n) - f(t)| < \varepsilon$, $\forall n \in N$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Funcții aproape-periodice*. Ed. Acad. R. S. Romania, 1961.
2. Corduneanu C. — *Soluții aproape periodice ale ecuațiilor diferențiale nelineare de ordinul al doilea*. Comunicările Acad. R.S.R. 5, 21—26, 1963.
3. Gheorghiu N. — *Asupra soluțiilor aproape-periodice și asimptotic aproape-periodice ale ecuațiilor nelineare de primul ordin*. Analele șt. Univ. Iași, 1, 17—20, 1955.
4. Харасахал В. Х. — *Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений*. Алма-Ата 1970.

Reçu le 18. V. 1977

Faculté de Mathematiques
Université de Jassy
Roumanie

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

SUBDIFFERENTIALS OF COMPOSED FUNCTIONS AND APPLICATIONS IN OPTIMAL CONTROL

BY

DAN TIBA

1. Introduction and main results. Let V be a reflexive Banach space with dual V'. The norms in V, V' will be denoted by $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ and the duality between V and V' by $(\ldots)$.

Let $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ be a convex, lower semicontinuous, proper function.

We suppose familiarity with the definitions and basic results in theory of convex functions defined on infinite dimensional spaces. However, for easy references we remember some facts about subdifferentials.

We denote by $\partial\varphi(x)$ the set of all $z \in V'$ such that

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y) + (x - y, z), \quad \forall y \in V,$$

and we call it the subdifferential of φ at x.

For every $x \in V$, $\partial\varphi(x)$ is a closed convex subset (possibly empty) of V'.

Now, let $A : V \to V$ be a linear bounded operator and A^* its adjoint operator. Consider the composed mapping $\psi : V \to]-\infty, +\infty]$ given by

$$\psi(x) = \varphi(Ax), \qquad \forall x \in V. \tag{1.1}$$

Function ψ is convex, lower semicontinuous, proper if

$$R(A) \cap \mathrm{Dom}\ \varphi \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

The main result of this paper may be stated as follows:

Theorem 1. *Assume V can be decomposed into the direct sum of its subspaces:*

$$V = V_1 \otimes V_2,$$

such that

$$R(A) \cap \mathrm{int}\, V_1\ [\mathrm{Dom}\ \varphi \cap V_1] \neq \emptyset \tag{1.3}$$

$$A^*/V_1' : V_1' \to V' \tag{1.4}$$

has bounded inverse. Then we have the formula:

$$\partial\psi(x) = A^*\partial\psi(Ax), \qquad \forall x \in V. \tag{1.5}$$