Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DE H. VON KOCH et VAN VLECK SUR LA CONVERGENCE DES FRACTIONS CONTINUES

PAR

N. NEGOESCU

Hommage au professeur ILIE POPA à l'occasion de son soixantedizième anniversaire

1. Soient A une algèbre de Banach avec unité e, $G(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A, $a_n \in A$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\frac{a_1}{e^+}\frac{a_2}{e^+}\frac{a_3}{e^+}\ldots$ une fraction continue non commutative et $\{q_n^{-1}p_n\}$ (en supposant q_n inversible pour n assez grand) la suite des réduites [2].

Les théorèmes 1, 3, 4, démontrés ici, sont des généralisations des résultats de von Koch [5] et Van Vleck [3] pour les fractions continues complexes.

Théorème 1. *Si A est une algèbre de Banach avec unité e et $\sum_{n=2}^{\infty} \| a_n \| < \infty$, on a :* (i) *les suites $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$, définies par les relations de récurrence*

(i) $p_n = p_{n-1} + a_n p_{n-2}$, $q_n = q_{n-1} + a_n q_{n-2}$, $p_1 = p_2 = a_1$, $q_1 = e$, $q_2 = e + a_2$,

sont convergentes vers les éléments p et q de A ;
(ii) *de plus, si $q \in G(A)$, l'ensemble des éléments inversibles de A, alors la fraction continue non commutative $\frac{a_1}{e+}\frac{a_2}{e+}\frac{a_3}{e+}\ldots$ converge vers l'élément $q^{-1}p$.*

Démonstration. (i) En vertu de (1) on a

$$\| q_2 \| \leqslant 1 + \| a_2 \|, \quad \| q_3 \| \leqslant \| a_3 \| + \| q_2 \| \leqslant (1 + \| a_2 \|) \| a_3 \| + 1 + \| a_2 \| = (1 + \| a_2 \|)(1 + \| a_3 \|)$$

et, par induction,

$$\| q_n \| \leqslant (1 + \| a_2 \|)(1 + \| a_3 \|) \ldots (1 + \| a_n \|).$$

Le produit infini $\prod_{n=2}^{\infty} (1 + \| a_n \|)$ est convergent parce que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \| a_n \|$ est convergente par hypothèse. Donc, pour tout n, $\| q_n \| \leqslant c$, où $c = \prod_{n=2}^{\infty} (1 + \| a_n \|)$.

On obtient aussi

$$q_n = a_n q_{n-2} + q_{n-1} = a_n q_{n-2} + a_{n-1} q_{n-3} + q_{n-2} = a_n q_{n-2} + \\ + a_{n-1} q_{n-3} + \dots + a_3 q_1 + a_2 + e$$

et, en conséquence, on déduit $q_{n+m} - q_n = a_{n+m} q_{n+m-2} + a_{n+m-1} q_{n+m-3} + \\ + \dots + a_{n+1} q_{n-1}$ et

$$\| q_{n+m} - q_n \| \leqslant c \, (\| a_{n+1} \| + \| a_{n+2} \| + \dots + \| a_{n+m} \|).$$

Parce que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \| a_n \|$ est convergente, $\{ q_n \}$ est une suite de Cauchy et comme l'algèbre de Banach A avec unité est complète par rapport à la topologie métrique induite par la norme, il suit que la suite $\{ q_n \}$ converge vers un élément $q \in A$.

De la même manière on peut démontrer que la suite $\{ p_n \}$ converge vers un élément $p \in A$.

(ii) on sait (cf [1]) que, si $q_n \to q$ et $q \in G(A)$, alors on a $q_n \in G(A)$ pour n assez grand et $q_n^{-1} \to q^{-1}$. Donc la suite des réduites $q_n^{-1} p_n$ converge vers $q^{-1} p$ parce que le produit est continu, c'est-à-dire que

$$\| q_n^{-1} p_n - q^{-1} p \| = \| q^{-1} (p_n - p) + (q_n^{-1} - q^{-1}) p + (q_n^{-1} - q^{-1}) (p_n - p) \| \leqslant \\ \leqslant \| q^{-1} \| \| p_n - p \| + \| p \| \| q_n^{-1} - q^{-1} \| + \| q_n^{-1} - q^{-1} \| \| p_n - p \| \to 0$$

si $n \to \infty$.

2. Considérons d'abord une proposition utile sur les nombre réels.

Proposition. *Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ des nombres réels non négatifs tels que $\sum_1^n \beta_k < 1$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$. Alors il existe des nombres α_n tels que $0 \leqslant \alpha_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ et*

$$\beta_1 = \alpha_1, \ \beta_n = (1 - \alpha_{n-1}) \alpha_n \ (n = 2, 3, \dots).$$

Parce que $\beta_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ il suit que $0 \leqslant \beta_1 < 1$. Donc $\alpha_1 = \beta_1$ a la propriété demandée. Supposons que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ont été déterminés. Alors

$$\beta_{k+1} < 1 - \beta_1 - \beta_2 \dots - \beta_k = 1 - \alpha_1 - (1 - \alpha_1) \alpha_2 - (1 - \alpha_2) \alpha_3 - \dots - \\ - (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) - (1 - \alpha_2) \alpha_3 - \dots - (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k \leqslant \\ \leqslant (1 - \alpha_2) - (1 - \alpha_2) \alpha_3 - (1 - \alpha_3) \alpha_4 \dots - (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k = (1 - \alpha_2)(1 - \\ - \alpha_3) - (1 - \alpha_3) \alpha_4 - \dots - (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k \leqslant \dots = (1 - \alpha_{k-2})(1 - \alpha_{k-1}) - \\ - (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k \leqslant (1 - \alpha_{k-1}) - (1 - \alpha_{k-1}) \alpha_k = (1 - \alpha_{k-1})(1 - \alpha_k) \leqslant 1 - \alpha_k.$$

Donc $\beta_{k+1} < 1 - \alpha_k$ et, en conséquence, il existe un nombre α_{k+1}, tel que $0 \leqslant \alpha_{k+1} < 1$ et $\beta_{k+1} = (1 - \alpha_k) \alpha_{k+1}$. La proposition s'ensuit par induction.

Dans une note précedente [2] nous avons démontré le:

Théorème 2. *Si A est une algèbre de Banach avec unité e, $0 \leqslant \alpha_n < 1$ ou $0 < \alpha_n \leqslant 1$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$, $x_n \in A$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$, alors*

(i) *la fraction continue non commutative*

$$\frac{\alpha_1 e}{e +} \frac{(1 - \alpha_1) \alpha_2 x_2}{e + \dots} \frac{(1 - \alpha_{n-1}) \alpha_n x_n}{e + \dots} \tag{2}$$

est uniformément convergente pour $\| x_n \| \leqslant 1$ $(n = 2, 3, \dots)$ vers un élément $x \in A$:

(ii) *les valeurs de la fraction continue (2) et ses réduites appartiennent à l'ensemble défini par l'inégalité*

$$\| x \| \leqslant 1 - \frac{1}{\sigma}, \tag{3}$$

où σ est la somme de la série

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \dots \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_k}. \tag{4}$$

avec $\sigma \in R$ et $\sigma \geqslant 1$ ou $\sigma = \infty$; la valeur de la fraction continue (2) pour $x_n = -e$ $(n \geqslant 2)$, est $(1 - 1/\sigma) e$;

(iii) *les valeurs de la fraction continue (2) et de ses réduites appartiennent aussi à l'ensemble défini par l'inégalité*

$$\| \alpha_1 e - x \| \leqslant (1 - \alpha_1) \| x \|. \tag{5}$$

On en déduit notamment le :

Théorème 3. *Si A est une algèbre de Banach avec unité e, $0 \leqslant \alpha_n < 1$, $x_n \in A$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, et la série (4) est convergente, alors la fraction continue non commutative*

$$\frac{e}{e +} \frac{\alpha_1 x_1}{e +} \frac{(1 - \alpha_1) \alpha_2 x_2}{e +} \frac{(1 - \alpha_2) \alpha_3 x_3}{e + \dots} \tag{6}$$

est uniformément convergente pour $\| x_n \| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ vers un élément $y \in A$, la norme de sa valeur ne dépasse pas σ et sa valeurs pour $x_n = -e$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ est σe.

Démonstration. Conformément au théorème 2, $\| x \| < 1$ et alors il existe $y = (e + x)^{-1}$ et il suit

$$\| y \| = \| (e + x)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \| x \|} \leqslant \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right)} = \sigma.$$

Pour $x_n = -e$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, conformément à la deuxième partie de l'assertion (ii) du théorème 2, on a

$$\frac{e}{e -} \frac{\alpha_1 e}{e -} \frac{(1 - \alpha_1) \alpha_2 e}{e -} \frac{(1 - \alpha_2) \alpha_3 e}{e - \dots} = \left[e - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) e \right]^{-1} = \left[\frac{1}{\sigma} e \right]^{-1} = \sigma e.$$

3. Théorème 4. *Si A est une algèbre de Banach avec unité e, $a_n \in A$ $(n = 2, 3, \ldots)$ des éléments donnés qui satisfont aux inégalités*

$$\sum_{k=1}^{n} \| a_{k+1} \| < 1 \quad (n = 1, 2, 3 \ldots), \tag{7}$$

alors la fraction continue non commutative

$$\frac{e}{e+}\,\frac{a_2}{e+}\,\frac{a_3}{e+\ldots} \tag{8}$$

est convergente vers un élément $x \in A$.

Démonstration. En employant la condition (7) et la propositon démontrée on peut écrire $a_2 = \alpha_1 x_1$, $a_{n+1} = (1 - \alpha_{n-1})\, \alpha_n x_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, où $0 \leqslant \alpha_n < 1$ et $\| x_n \| = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Donc, si un ou plusieurs éléments a_n sont nuls alors il existe $n_1 \in N$ tel que $\alpha_{n_1} = 0$ et la série (4) est convergente. La convergence de la fraction continue (8) est une conséquence du théorème 3. Si $a_n \neq 0$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, soient $\alpha_{n+1} = 1 - \sum_{k=n+2}^{\infty} \| a_k \|$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ tels que $0 \leqslant \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_n < 1$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ $\Big[$ de (7) il suit $0 \leqslant \alpha_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \| a_k \| < 1$ et $0 < \alpha_n = 1 - \sum_{n+1}^{\infty} \| a_k \| < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)\Big]$.

Alors

$$(1 - \alpha_n)\, \alpha_{n+1} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \| a_k \| \right) \left(1 - \sum_{k=n+2}^{\infty} \| a_k \| \right) = \| a_{n+1} \| + \left(\sum_{k=n+2}^{\infty} \| a_k \| \right) \left(1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \| a_k \| \right)$$

et, en conséquence,

$$(1 - \alpha_1)\, \alpha_2 \geqslant \| a_2 \|, \quad (1 - \alpha_n)\, \alpha_{n+1} > \| a_{n+1} \| \quad (n = 1, 2, 3 \ldots). \tag{9}$$

Donc, si on pose $a_{n+1} = (1 - \alpha_n)\, \alpha_{n+1} x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, en vertu de (9) on a :

$$\| a_2 \| = \| (1 - \alpha_1)\, \alpha_2 x_2 \| = (1 - \alpha_1)\, \alpha_2 \| x_2 \| \leqslant (1 - \alpha_1)\, \alpha_2,$$

$$\| a_{n+1} \| = \| (1 - \alpha_n)\, \alpha_{n+1} x_{n+1} \| = (1 - \alpha_n)\, \alpha_{n+1} \| x_{n+1} \| < (1 - \alpha_n)\, \alpha_{n+1},$$

ce qui implique $\| x_2 \| \leqslant 1$, $\| x_{n+1} \| \leqslant 1$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

Si $\alpha_1 = 0$, la série (4) converge et a la somme $\sigma = 1$. En appliquant le théorème 3 on obtient que la fraction continue (8) est convergente vers un élément $x \in A$.

Si $\alpha_1 > 0$, conformément au théorème 2, la fraction continue (8) est convergente vers un élément $x \in A$.

Remarque. Dans la cas particulier $A = C$ le théorème 3 est un résultat de Van Vleck [3] et le théorème 4 généralise une forme perfectionnée d'un résultat de von Koch [4], due à Dennis et Wall [6].

4. Théorème 5. *Si A est une algèbre de Banach avec unité et division $(G(A) = A - \{0\})$, $0 < \alpha_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ et la série (4) est divergente, alors la fraction continue (6) est convergente pour $\| x_n \| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ avec la condition que $x_n \neq -e$ au moins pour une valeur de n.*

Soient $x_1, x_2 \ldots$ de A et $\| x_n \| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ pour lesquels (6) est divergente. Parce que (2) converge vers y_1 et $\| y_1 \| \leqslant 1$ par suite du théorème 2. A étant une algèbre de Banach avec unité et division, il suit que $e + x_1 y_1 = 0$ et, en conséquence, $x_1 y_1 = -e$.

Comme on a $\| x_1 \| \leqslant 1$, $\| y_1 \| \leqslant 1$, alors il faut avoir aussi $1 \leqslant \| x_1 \| \, \| y_1 \|$. Donc $1 \leqslant \| x_1 \| \, \| y_1 \| \leqslant 1$ et $\| x_1 \| \, \| y_1 \| = 1$ implique $\| x_1 \| = 1$, $\| y_1 \| = 1$. On a $\| y_1 \| = 1 \Leftrightarrow y_1 = e$. En effet, soient $\| y_1 \| = 1$ et β_n une suite convergente à 1, $0 < \beta_1 < 1$. De (5) il suit que pour tout β_n, on a $\| \beta_n e - y_1 \| \leqslant 1 - \beta_n$, mais $1 - \beta_n \leqslant \| \beta_n e - y_1 \|$, donc $\| \beta_n e - y_1 \| = 1 - \beta_n$. Par la continuité de la norme on a $\| e - y_1 \| = \lim_{n \to \infty} \| \beta_n e - y_1 \| = \lim_{n \to \infty} (1 - \beta_n) = 0$.

Donc $\| e - y_1 \| = 0$ et, en conséquence, $y_1 = e$. La réciproque, $y_1 = e \Rightarrow \| y_1 \| = 1$ est évidente. De $x_1 y_1 = -e$ et $y_1 = e$ il suit $x_1 = -e$. En répétant le raisonnement précédent pour y_1 on déduit $x_2 y_2 = -e$ et ainsi de suite. Donc on a $x_n = -e$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Il résulte immédiatement le

Théorème 6. *Si A est une algèbre de Banach avec unité et division et $0 \leqslant \alpha_n < 1$ ou $0 < \alpha_n \leqslant 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ alors la fraction continue (6) est uniformément convergente pour $\| x_1 \| \leqslant q$, $\| x_n \| \leqslant 1$ $(n = 2, 3, \ldots$ où $q < 1$.*

Les théorèmes 5 et 6 généralisent deux résultats de Paydon et Wall [7].

BIBLIOGRAPHIE

1. H. G. Garnir et J. Gobert — *Algèbres de Banach* — Université de Liège, 1966 — 1967, pp. 16—17.
2. N. Negoescu *Sur les fractions continues non commutatives.* Proceedings of the Inst. of Math. Iași, 1976, pp. 137—143.
3. E. V. Van Vleck — *On the convergence and the character of the continued fraction* — Trans. Amer. Math. Soc. vol. 2, 1901, pp. 476—483.
4. H. von Kock — *Quelques théorèmes concernant la théorie générale des fractions continues* — Ofversigt af Kongl. Vetenskaps Akad. Forhandlinger, vol. 52, 1895, pp. 135—142.
5. * * * — *Sur un théorème de Stieltjes et sur les fractions continues* — Bull. Soc. Math. de France, vol. 23, 1895, pp. 23—40.
6. J. J. Dennis and H. S. Wall — *The limit-circle case for a positive definite J-fraction*, Duke Math. Journ. vol. 12, 1945, pp. 255—273.
7. J. F. Paydon and H. S. Wall — *The continued fraction as a sequence of linear transformations* — Duke Math. Journ. vol. 9, 1942, pp. 360—372.

Reçue le 25.VI.1977

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie