Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LES INTÉGRALES RELATIVEMENT INVARIANTES SUR UN ANNEAU TOPOLOGIQUE

PAR

OLGA COSTINESCU

Hommage au Prof. ILIE POPA, à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire.

Soient $(A, +, \times, \tau)$ un anneau topologique et μ une intégrale de Haar sur le groupe localement compact $(A, +, \tau)$. On suppose que A est un anneau à unité et que l'ensemble A^* des éléments inversibles de A^* est τ^* - ouvert. Dans les conditions mentionnées, on peut construire une intégrale positive, ν_μ, invariante à gauche sur le groupe localement compact $(A^*, \times, \tau^*)$; τ^* signifie la topologie induite par τ, sur A^*.

J. Smith a considéré une telle intégrale (voir [3]) ; il n'est pas difficile à voir que l'idée fondamentale et le procédé de travail utilisés par lui sont justifiés par quelques résultats de la théorie générale des intégrales relativement invariantes et par certains problèmes concrets (voir, par exemple, le problème qu'on trouve en [2], pp. 70).

En ce qui suit, nous allons étudier, quelques aspects de l'intégrale ν_μ. La terminologie et les notations sont celles utilisées en [1]. D'abord, quelques précisions :

§ 1. Soit $\mu \neq 0$ une intégrale de Haar sur le groupe localement compact $(A, +, \tau)$, alors, si $f \in \mathcal{K}(A)$ et $t \in A^*$, la fonction $tf : A \to R$ définie par la relation $(tf)(x) = f(t^{-1}x)$, $x \in A$, est continue à support compact, $tf \in \mathcal{K}(A)$, donc, il existe l'intégrale de cette fonction par rapport à μ, $\int_A (tf)(x)\, d\mu(x)$. L'application $\nu_t : \mathcal{K}(A) \to R$, définie par la formule

$$\nu_t(f) = \int_A (tf)(x)\, d\mu(x), \quad f \in \mathcal{K}(A),$$

est, évidemment, une intégrale de Haar sur A, et comme conséquence du théorème d'unicité, (voir [2], pp 65), il résulte qu'il existe un élément $\Delta(\mu, t) \in R_+^*$, tel que

$$\nu_t = \Delta(\mu, t)\, \mu.$$

Il est tout à fait évident que l'application

$$t \to \Delta(\mu, t),\ t \in A^*,$$

est un homomorphisme continu défini sur le groupe multiplicatif localement compact $(A^*, \times, \tau^*)$ à valeurs dans le groupe multiplicatif localement compact (R_+^*, τ_u^*), (τ_u^* est la trace, sur R_+^*, de la topologie usuelle, τ_u, sur R.

Pour fixer les idées, appelons cette fonction $\Delta(\mu, \cdot)$ le μ-module sur A^*.

Si $f : A^* \to R$ est une fonction continue à support compact, donc, $f \in \mathcal{K}(A^*)$, alors, on a $f/\Delta(\mu, \cdot) \in \mathcal{K}(A^*)$; vu que $A^* \in \tau$, on peut prolonger cette fonction à une fonction $g_f : A \to R$, $g_f \in \mathcal{K}(A)$. En effet, l'application g_f définie par

$$g_f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\Delta(\mu, x)} & x \in A^* \\ 0 & x \in A - A^* \end{cases}$$

répond à la question. On introduit ensuite, la transformation $\nu_\mu : \mathcal{K}(A^*) \to R$ donnée par la relation

$$\nu_\mu(f) = \mu(g_f) = \int_A g_f(x)\, d\mu(x),\ f \in \mathcal{K}(A^*),$$

et on prouve, sans difficulté, que ν_μ est une intégrale de Haar invariante à gauche sur le groupe multiplicatif localement compact $(A^*, \times, \tau^*)$.

Remarques 1. En partant d'une intégrale de Haar, μ, sur le groupe additif localement compact $(A, +, \tau)$ on peut construire, de la même manière, une intégrale positive invariante à droite sur $(A^*, \times, \tau^*)$.

2. Dans le cas où $A = \mathcal{L}(E)$ est le groupe des transformations linéaires sur un espace linéaire, E, à dimension finie, $A^* = \mathcal{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ est le groupe multiplicatif des transformations inversibles, τ est la topologie naturelle sur $\mathcal{L}(E)$ — donc, une topologie d'espace localement compact — et μ est une intégrale de Haar sur $\mathcal{L}(E)$, alors, la fonction μ-module $\Delta(\mu, \cdot)$ est définie par la formule $\Delta(\mu, T) = |\det(T)|^n$, $T \in \mathcal{GL}(E)$. Il faut souligner que dans ce cas là, l'intégrale positive ν_μ est, aussi, invariante à droite.

Un autre exemple — si μ indique l'intégrale de Lebesgue sur le groupe additif localement compact $(R, +, \tau_u)$, alors, la fonction μ-module est définie par la relation

$$\Delta(\mu, t) = t^2,\ t \in R - \{0\}.$$

3. Si μ est une intégrale de Haar sur le groupe topologique $(A, +, \tau)$, donc, elle est une intégrale positive sur l'espace localement compact (A, τ), alors, sa restriction, γ, à l'espace (A^*, τ^*) est, aussi, une intégrale positive ; de plus, γ est égale à l'intégrale relativement invariante déterminée par ν_μ et par l'homomorphisme continu $\Delta(\mu, .)$, et on a

$$\Delta_l^\gamma = \Delta(\mu, .),$$

où Δ_l^γ indique le module à gauche de l'intégrale γ.

§ 2. Dans le cas où la fonction μ-module satisfait à certaines conditions supplémentaires, on peut représenter l'intégrale ν_μ à l'aide d'un produit homomorphique — notamment, on a le

Théorème 1. *Soient $(A, +, \times, \tau)$ un anneau topologique localement compact et μ une intégrale de Haar sur $(A, +, \tau)$. Supposons que le μ-module $\Delta(\mu, .)$ est une application surjective et ouverte; alors, quels que soient : β_1 — une intégrale positive invariante à gauche sur le noyau N de $\Delta(\mu, .)$, et β_2 — une intégrale de Haar sur R_+^*, l'intégrale ν_μ est égale au produit homomorphique des β_1 et β_2, à un facteur constant près.*

Démonstration. Pour toute $f \in \mathcal{K}(A^*)$, l'application $h_1 : A^* \to R$ définie par la formule

$$h_1(x) = \int_N f(xy)\, d\beta_1(y),\ x \in A^*, \tag{1}$$

est constante sur chaque élément de l'ensemble quotient A^*/N, donc, il existe une fonction $h_2 : R_+^* \to R$, et une seule, de sorte que

$$h_2[\Delta(\mu, x)] = \int_N f(xy)\, d\beta_1(y),\ x \in A^*. \tag{2}$$

Du fait que $f \in \mathcal{K}(A^*)$ et $\operatorname{supp} h_2 \subset \Delta(\mu, \operatorname{supp} f)$, il suit que $h_2 \in \mathcal{K}(R_+^*)$. On prouve, sans difficulté, que l'application $\psi : \mathcal{K}(A^*) \to R$ donnée par la relation

$$\psi(f) = \int_{R_+^*} h_2(z)\, d\beta_2(z),\ f \in \mathcal{K}(A^*), \tag{3}$$

est une intégrale positive sur A^*, invariante à gauche ; cette intégrale représente, par définition, le produit homomorphique des intégrales β_1 et β_2. Vu que ν_μ est aussi une intégrale positive invariante à gauche sur A^*, et compte tenu du théorème d'unicité concernant les intégrales de Haar sur un groupe localement compact, (voir [2], pp. 65), il résulte qu'il existe un nombre $c(\beta_1, \beta_2) \in R_+^*$ tel que

$$\nu_\mu = c(\beta_1, \beta_2)\, \psi ; \tag{4}$$

ainsi, le théorème 1 est complètement démontré.

Le groupe additif localement compact $(A, +, \tau)$ est unimodulaire, mais, en général, le groupe multiplicatif $(A^*, \times, \tau^*)$ n'a pas cette propriété ; alors, on pose, d'une manière tout à fait naturelle, le problème d'établir, à l'aide des éléments qui font la liaison entre les deux espaces, des conditions suffisantes pour que le groupe A^* soit, aussi, unimodulaire. On en donne une réponse dans le

Théorème 2. *En notant toujours par μ une intégrale de Haar sur $(A, +, \tau)$, $\Delta(\mu, \cdot)$ la fonction μ-module, et N le noyau de $\Delta(\mu, \cdot)$, on suppose que :*

a) *l'application* $\Delta(\mu, \cdot)$ *est surjective et ouverte.*

b) *les automorphismes intérieurs de l'espace* N *sont unimodulaires, alors, le groupe* $(A^*, \times, \tau^*)$ *est unimodulaire.*

Démonstration. Sur le groupe multiplicatif, invariant et fermé N, on considère la topologie τ' induite par τ. Si β_1 est une intégrale de Haar invariante à gauche sur N, β_2 est une intégrale de Haar sur le groupe R_+^*, et ν_μ indique l'intégrale invariante à gauche construite sur A^*, en partant de l'intégrale μ sur A, alors il existe $c(\beta_1, \beta_2) \in R_+^*$, de sorte que

$$\nu_\mu = c(\beta_1, \beta_2)\,\psi, \tag{4}$$

où ψ est le produit homomorphique de β_1 et β_2 ; donc, ψ est une intégrale positive, invariante à gauche sur $(A^*, \times, \tau^*)$, (voir le théorème 1). Pour chaque $f \in \mathcal{K}(A^*)$ et chaque $s \in A^*$, on a

$$\int_{A^*} (fs)(x)\, d\psi(x) = \int_{R_+^*} (hs)_2(z)\, d\beta_2(z)\,; \tag{5}$$

l'application $(hs)_2 : R_+ \to R$ satisfait à la condition (2), donc :

$$(hs)_2[\Delta(\mu, x)] = \int_N (fs)(xy)\, d\beta_1(y), \quad x \in A^*.$$

Du fait que N est un sous-groupe de A^* satisfaisant aux conditions mentionnées, il résulte

$$\Delta_r^N(t) = \Delta_r^A(t), \quad t \in N.$$

Soient $s \in A^*$ et $a_s : N \to N$ un automorphisme intérieur, $a_s(y) = sys^{-1}$, $y \in N$, alors il existe un nombre $\delta^N(a_s) \in R_+^*$ tel que

$$\int_N f[a_s^{-1}(y)]\, d\beta_1(y) = \delta^N(a_s) \int_N f(y)\, d\beta_1(y), \tag{6}$$

(voir [2], pp. 83). Des relations (2) et (6) et en raison de l'invariance à droite de l'intégrale β_2, on obtient :

$$\begin{aligned} (hs)_2[\Delta(\mu, x)] &= \int_N (fs)(xy)\, d\beta_1(y) = \int_N f(xs^{-1}sys^{-1})\, d\beta_1(y) = \\ &= \delta^N(a_s^{-1}) \int_N f(xs^{-1}y)\, d\beta_1(y) = \delta^N(a_s^{-1})\, h_2[\Delta(\mu, x)\Delta(\mu, s^{-1})], \end{aligned} \tag{7}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{R_+^*} (hs)_2(z)\, d\beta_2(z) &= \delta^N(a_s^{-1}) \int_{R_+^*} h_2[z\Delta(\mu, s^{-1})]\, d\beta_2(z) = \\ &= \delta^N(a_s^{-1}) \int_{R_+^*} h_2(z)\, d\beta_2(z). \end{aligned} \tag{8}$$

Ainsi, on arrive aux relations

$$\int_{A^*} (fs)(x)\, d\psi(x) = \delta^N(a_s^{-1}) \int_{A^*} f(x)\, d\psi(x), \quad s \in A^*, \tag{9}$$

et

$$\Delta_r^{A^*}(s) = \delta^N(a_s^{-1}). \tag{10}$$

Mais, nous avons supposé que quel que soit $s \in N$, $\delta(a_s^{-1}) = 1$, (c'est la condition (*b*)) ; d'ici et de la formule (10), il résulte $\Delta_r^{A^*} = 1$, ce qui achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Eléments de mathématique, Intégration*, livre VI, Paris, 1963.
2. Nachbin L. — *The Haar integral*, Princeton, 1965.
3. Smith J. — *Haar integrals on topological rings*. The American Mathematical Monthly, 79, 1972.

Reçu le 22 VII 1977