Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXIII, S. I a, f. 2, 1977

PROJECTEURS SUR DES ESPACES LINÉAIRES NON-COMMUTATIFS ET SANS LA PROPRIÉTÉ $1x = x$

PAR

N. GHEORGHIU

Hommage au Prof. ILIE POPA à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire

On connait bien l'importance des projecteurs dans l'algèbre linéaire et l'analyse fonctionnelle, ainsi que leur liaison avec les décompositions des espaces linéaires en somme directe de sous-espaces linéaires.

Il découle avec exactitude, des travaux [1], [2] de R. Miron, respectivement R. Miron et F. Radó, la signification des propriétés de commutativité de l'addition et de $1x = x$ dans la définition de la notion d'espace linéaire. Dans cette idée, nous nous proposons de voir dans cette note, qu'est ce que devient la théorie des décompositions en somme directe de sous-espaces linéaires dans les espaces linéaires non-commutatifs et sans la propriété $1x = x$.

Quelques définitions et propriétés générales. On appelle presque-espaces linéaire, (p.e.l.) sur Γ, où Γ est le corps réel ou complexe, un ensemble non-vide X, dans lequel les deux opérations d'addition et de multiplication par les scalaires, satisfont à l'axiomatique des espaces linéaires, avec éventuellement en moins les axiomes de la commutativité de l'addition et $1x = x$.

Un sous-ensemble X_0 non-vide d'un p.e.l. est presque sous espace linéaire, (p.s.e.l.) ssi $X_0 - X_0 \subset X_0$ et $\Gamma X_0 \subset X_0$. On dit que les p.s.e.l. X_1 et X_2 de X réalisent une décomposition en somme semi-directe

$$X = X_1 \oplus X_2 \tag{1}$$

si tout élément $x \in X$ s'écrit de manière unique

$$x = x_1 + x_2, \tag{2}$$

avec $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Il n'est pas difficile de montrer que l'intersection de X_1 et X_2 se réduit à $\{0\}$. On garde les définitions usuelles pour les opérations linéaires et pour les projecteurs. Un projecteur P sur le p.e.l. X possède la propriété de linéarité et la propriété $P^2 = P$. D'après [1], dans un p.e.l. ont lieu les règles de calcul :

$$\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y\,;\ \alpha 0 = 0\,:\ \alpha(-x) = -(\alpha x),\ (\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x\,;\ 0x = 0\,;\ (-\alpha)x = -(\alpha x)\,:\ -(x + y) = -y - x.$$

Théorème 1. *Si P est un projecteur sur le p.e.l. X, alors* Ker P *et* Im P *sont des p.s.e.l. et l'on a la décomposition en somme semi-directe*

$$X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P. \tag{3}$$

Im P *est formé des éléments x pour lesquels $Px = x$.* Ker P *est diviseur normal. La décomposition (3) est commutative ssi* Im P *est diviseur normal.*

Démonstration. En général, si $T : X \to X$ est une application linéaire, Ker T et Im T sont des p.s.e.l. tel qu'il résulte des relations : $T(x - y) = Tx - Ty$ et $T(\lambda x) = \lambda Tx$. Im $P = \{x : Px = x\}$ en suivant la démonstration classique. La décomposition (3) se déduit de $x = (x - Px) + Px$ et de ce que, si $x = x_1 + x_2$ alors nécessairement $x_2 = Px$ et $x_1 = x - Px$. Ker T est diviseur normal pour toute application linéaire $T : X \to X$. Soit maintenant Im P diviseur normal. Pour tout $x \in X$, il existe donc $v \in \operatorname{Im} P$, tel que $x + Px - x = v$: en appliquant P, on obtient $Px = Pv$, ce qui montre que $x - v = u \in \operatorname{Ker} P$. Donc $x = u + v$, et l'unicité de la décomposition implique $v = Px$; l'égalité $x + Px - x = Px$ équivaut à : $(x - Px) + Px = Px + (x - Px)$, et la décomposition (3) en somme semi-directe est commutative. Réciproquement, si la décomposition (3) est commutative, alors pour $x \in X$ et $v \in \operatorname{Im} P$ on obtient successivement :

$$x + v - x = x_1 + x_2 + v - x_2 - x_1 = x_1 + u - x_1,$$

où

$$x_2 + v - x_2 = u \in \operatorname{Im} P,$$

$$x_1 + u - x_1 = u + x_1 - x_1 = u \in \operatorname{Im} P,$$

donc Im P est diviseur normal.

Théorème 2. *Si les p.s.e.l. X_1, X_2 réalisent une décomposition en somme semi-directe de X, où X_1 est un diviseur normal, alors il existe un projecteur unique P, tel que :*

$$X_1 = \operatorname{Ker} P,\ X_2 = \operatorname{Im} P. \tag{4}$$

Démonstration. Soit $x = x_1 + x_2$ la décomposition d'un élément quelconque $x \in X$ et définissons la projection P par $Px = x_2$. Le seul fait qui diffère dans la démonstration de la démonstration classique est celui de la linéarité de P. Mais de $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, nous avons $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1') + (x_2 + y_2)$ où $y_1' \in X_1$, à cause du fait que X_1 est un diviseur normal.

Théorème 3. *Si $T : X \to X$ est une application linéaire (homomorphisme), alors $X|_{\operatorname{Ker} T}$ est p.e.l. et il existe une seule application linéaire injective U, telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "p"'] & X \\ X|_{\operatorname{Ker} T} \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd} \tag{5}$$

soit commutatif, où p indique l'application canonique.

Démonstration. En définissant $x \sim y$ ssi $x - y \in \operatorname{Ker} T$, ceci équivant à $Tx = Ty$. Pour le reste, on suit la démonstration classique.

Théorème 4. *Si P est un projecteur, alors $X|_{\operatorname{Ker} P}$ est isomorphe à* Im P.

Démonstration. On utilise les théorèmes 1 et 3.

Théorème 5. *Si $T : X \to Y$ est une application linéaire, X, Y étant des p.e.l., et P, Q sont des projecteurs sur X respectivement Y, alors il existe une seule application linéaire U qui rend commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X|_{\operatorname{Ker} P} \arrow[r, "U"] & Y|_{\operatorname{Ker} Q} \end{tikzcd}$$

où p, q désignent les applications cononiques.

Enfin, nous tenons à souligner que ce travail nous a été suggéré par la note [1] de R. Miron. Par ailleurs, en prenant en particulier le projecteur $Px = 1x$, on obtient les résultats essentiels de la deuxième partie du travail [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. Miron R. — *On the almost linear spaces.* Mathematica, Univ. Cluj-Napoca, (to appear 1977).
2. Miron R. and Radó F. — *On the definitions of a module and a vector space by independent axioms.* Mathematica. Univ. Cluj-Napoca. (to appear 1977).
3. Ion I. D. și Radu N. — *Algebră.* Ed. didactică și pedagogică. București, 1975.

Universitatea „Al. I. Cuza" Iași
România

Reçu le 25 VII. 1977