$$u\frac{\partial p}{\partial u} = C_{00}p + D(u,v)p, \tag{1.26.1}$$

with C_{00} a constant, n by n matrix and $D(u, v)$ a n^2 by n^2 matrix with $D(0,0) = 0$ (see Hartman [12], chapter IV, §10). Furthermore, if no two eigenvalues of A_{00} differ by a positive integer, then no eigenvalue of C_{00} is a positive integer. Thus, by the above Corollary 2, there are as many linearly independent solutions of (1.26.1) — (1.27.1) (where (1.27.1) is the corresponding „rearranged" system of (1.27)) as the dimension of $\ker C_{00}$. Moreover, any $p_{00} \in \ker C_{00}$ yields a solution p of (1.26.1) — (1.27.1) holomorphic at $p(0,0) = p_{00}$. From the definition of C_{00} and p, the p corresponding to $P = I$ is in $\ker C_{00}$. Thus (1.26) — (1.27) has a solution $P(u, v)$ analytic at (0,0), and such that $P(0,0) = I$. Q.E.D.

BIBLIOGRAPHY

1. Bass R. W. — *On regular solutions at a point of singularity of a system of nonlinear differential equations.* Amer. J. Math. 77 (1955), pp. 734—742.
2. Bancroft S., Hale J. K. and Sweet D. — *Alternative problems for nonlinear functional equations.* Journal of Differential Equations 4 (1963), pp. 40—56.
3. Cesari Lamberto — *Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations.* Springer Verlag, 2 nd. ed. 1963, VIII + 271.
4. „ „ — *Functional analysis and Galerkin's method.* Mich Math. J. 11 (1964), pp. 385—418.
5. „ „ — *Functional analysis and differential equations.* Studies in Applied Mathematics, 5 SIAM 1969, pp. 143—155.
6. „ „ — *A functional analysis proof of Cauchy-Kowalewski's theorem*, a Seminar Communication, (to appear).
7. Hale J. K. — *Oscillations in nonlinear systems.* Mc Graw-Hill, N. Y., 1963.
8. „ „ — *Ordinary differential equations.* Interscience series on Pure and Applied Mathematics, vol. 21, J. Willey, 1970, XVI + 332.
9. „ „ — *Aplications of alternative problems.* Lecture Notes 71—1. Center for dynamic systems, Division of Applied Mathematics, Brown University, May 1971.
10. Harris W. A. Jr. — *Holomorphic solutions of nonlinear differential ecuations at singular points.* Studies in Applied Mathematics, No 5, SIAM 1969, pp. 184—187.
11. Harris W. A. Jr., Sibuya Y. and Weinberg L. — *Holomorphic solutions of linear differential systems at singular points.* Arch. Rat. Mech. Analysis 3 (1969), pp. 245—248.
12. Hartman P. — *Ordinary Differential Equations*, Wiley, N. Y. 1964.
13. Hukuhara M., Kimura T. and Matuda T. — *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe.* Publications of the Math. Soc. of Japan, 1961, pp. 1—155.
14. Lettenmeyer F. — *Über die an einer Unbestimtheitsstelle regulären Lösungen eines Systemes homogener linearen Differentialgleichungen.* Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. Math. — Nat Wiss. Abt. (1926), pp. 287—307.
15. Pini Bruno — *Sui punti singolari per i sistemi ai differenziali totali.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, 34 (1953), pp. 95—104.
16. Sato Tohui — *Sur les points singuliers d'une équation aux differentielles totales*, I. Memoire of the Faculty of Science, Kyusyu Imperial University, Series A, Mathematic , vol. 2, No. 2, (1941), pp. 139—151.
17. „ „ — *Sur les points singuliers d'une équation aux differentielles totales*, II. Ibidem, vol. 3, No. 1, (1942), pp. 45—55.

Received 15 January 1975

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
Iaşi, R. S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, f. 2, s. I a, 1978

SUR LES SOLUTIONS PERIODIQUES ET PRESQUE-PERIODIQUES DES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON-LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

PAR

CONSTANTIN SIMIRAD

Nous allons considérer le système non-linéaire :

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

où les fonctions $f_i(t, x)$ sont définies sur $R \times \Omega$, Ω étant un ensemble convexe dans l'espace R^n. Dans la suite nous allons supposer que les fonctions $f_i(t, x)$ sont à valeurs réelles.

Théorème 1. *Si :*

1° *les fonctions $f_i(t, x)$ sont définies et continues sur $R \times \Omega$,*

2° $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$ *sont définies et continues sur $R \times \Omega$ et de plus, supposons qu'il existe une matrice de fonctions intégrables $\Psi(t) = (\psi_{ij}(t))$, telle que*

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)\right| \leqslant \psi_{ij}(t), \ \forall\, i \neq j \ \text{et} \ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, x) \leqslant \psi_{ii}(t), \ i, j = 1, 2, \dots, n,$$

3°. $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \inf\{\exp \int_0^t [A(s) + a(s)]\, ds\} = 0$, où

$$A(s) = \max_j \sum_{i \neq j} \psi_{ij}(s), \ a(s) = \max_i \psi_{ii}(s),$$

alors le système (1) ne peut avoir qu'une seule solution bornée.

Démonstration. Supposons le contraire, c.a.d. que le système (1) a deux solutions bornées, disons $x(t)$ et $z(t)$. Posons $u_i(t) = x_i(t) - z_i(t)$, alors

$$\dot{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)\, u_j(t), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

où $h_{ij}(t) = \int_0^1 \dfrac{\partial f_i}{\partial \omega_j}(t, \omega(s))\, ds$, $\omega(s) = z(t) + s\, u(t)$, ce qui résulte du lemme d'Hadamard. Evidemment, $h_{ij}(t)$ sont des fonctions continues et on a $|h_{ij}(t)| \leqslant \psi_{ij}(t)$, $\forall\, i \neq j$ et $h_{ii}(t) \leqslant \psi_{ii}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$.

En considérant i fixé dans le système (2) nous obtenons une équation linéaire et sa solution sera :

$$(3)\qquad u_i(t) = u_i(t_0)\ \exp\int_{t_0}^{t} h_{ii}(s)\,ds + \int_{t_0}^{t}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} h_{ij}(\theta)\,u_j(\theta)\ \exp\int_{\theta}^{t} h_{ii}(s)\,ds\right]d\theta$$

et les majorations usuelles, nous conduisent à l'inégalité:

$$(4)\qquad |u_i(t)| \leqslant |u_i(t_0)|\exp\int_{t_0}^{t} h_{ii}(s)\,ds + \int_{t_0}^{t}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |h_{ij}(\theta)|\,|u_j(\theta)|\,.\right.$$

$$\left.\exp\int_{\theta}^{t} h_{ii}(s)\,ds\right]d\theta.$$

Posons $h(t) = \max\limits_{i} h_{ii}(t)$, $H(t) = \max\limits_{j} \sum\limits_{i\neq j} |h_{ij}(t)|$ et en sommant les inégalités (4), lorsque $i = 1,\dots,n$ et compte tenu du fait que :

$\|u\| = |u_1| + \dots + |u_n|$, il résulte :

$$(5)\qquad \|u(t)\| \leqslant \|u(t_0)\|\ \exp\int_{t_0}^{t} h(s)\,ds + \int_{t_0}^{t}\left[\|u(\theta)\|\,H(\theta)\ \exp\right.$$

$$\left.\int_{\theta}^{t} h(s)\,ds\right]d\theta.$$

Multiplions (5) par $\exp\int_{t}^{t_0} h(s)\,ds$; on obitent

$$\|u(t)\|\exp\int_{t}^{t_0} h(s)\,ds \leqslant \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t}\left[\|u(\theta)\|\ H(\theta)\ \exp\int_{\theta}^{t_0} h(s)\,ds\right]d\theta$$

et du lemme de Gronwall il résulte :

$$(6)\qquad \|u(t)\| \leqslant \|u(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}\left[H(s) + h(s)\right]ds.$$

Soit $t \in R$, puisque $H(s) \leqslant A(s)$, $h(s) \leqslant a(s)$ et $\|u(t_0)\|$ étant bornée, de (6) et de l'hypothèse 3°, il résulte que $\|u(t)\| = 0$, c'est à dire $x(t) = z(t)$, $\forall\, t \in R$.

Théorème 2. *Si :*

1°. *les fonctions $f_i(t, x)$ définies et continues sur $R \times \Omega$ sont presque-périodiques de t, uniformément par rapport à la variable $x \in \Omega$,*

2°. $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$ *sont continues sur $R \times \Omega$ et de plus il existe une matrice de fonctions intégrables $\Psi(t) = (\psi_{ij}(t))$, $\psi_{ij} : R \to R$, telle que* $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)\right| \leqslant \psi_{ij}(t)$,

$\forall\, i \neq j$ et $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, x) \leqslant \psi_{ii}(t)$, $i, j, = 1,\dots, n$,

3°. *le système* (1) *a une solution bornée et l'équation :*

$$(7)\qquad \dot{y} = [A(t) + a(t)]\,y + 1$$

où $A(t)$, $a(t)$ sont les fonctions précisées dans le théorème 1, a une solution positive et bornée,

alors la solution bornée du système (1) sera la seule solution presque-périodique du système (1).

Démonstration. Nous allons voir que les hypothèses du théorème 2 impliquent les hypothèses du théorème 1. Soit $y(t)$ la solution positive et bornée de l'équation (7), c'est à dire $0 < y(t) \leqslant M < +\infty$, $\forall\, t \in R$. Compte tenu de la forme de la solution positive et bornée de l'équation (7), nous aurons l'inégalité :

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{t}\left\{\exp\int_{\theta}^{t}\left[A(s) + a(s)\right]ds\right\}d\,\theta \leqslant M.$$

De (8) il résulte :

$$(9)\qquad \liminf_{\theta\to-\infty}\left\{\exp\int_{\theta}^{t}\left[A(s)+a(s)\right]ds\right\} = 0$$

et d'après le théorème 1, le système (1) ne peut avoir qu'une seule solution bornée.

Supposons que $x(t)$ est la solution bornée du système (1), c'est à dire $|x(t)| \leqslant N < +\infty$, $\forall\, t \in R$; nous allons montrer qu'elle est presque-périodique. Posons $\Delta_i(t) = x_i(t + \tau) - x_i(t)$, où τ est une $\varepsilon/2nM$ presque-période commune aux fonctions $f_i(t, x)$. Du lemme d'Hadamard il résulte le système :

$$(10)\qquad \dot{\Delta}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t)\,\Delta_j(t) + f_i(t + \tau, x(t + \tau)) - f_i(t, x(t + \tau)),$$

$$\text{où } \varphi_{ij}(t) = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \omega_j}(t, \omega(s))\,ds,\ \omega(s) = x(t) + s\,\Delta(t).$$

En considérant i fixé, l'équation i-ème est linéaire et sa solution est :

$$(11)\qquad \Delta_i(t) = \Delta_i(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\varphi_{ii}(s)\,ds +$$

$$\int_{t_0}^{t}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\varphi_{ij}(\theta)\ \Delta_j(\theta)\ \exp\int_{\theta}^{t}\varphi_{ii}(s)\,ds\right]d\,\theta + \int_{t_0}^{t}\left\{\left[f_i(\theta + \tau, x(\theta + \tau)) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - f_i(\theta, x(\theta + \tau))\right]\exp\int_{\theta}^{t}\varphi_{ii}(s)\,ds\right\}d\theta.$$

De (11), par les majorations habituelles, on obtient l'inégalité :

$$
\begin{aligned}
&|\Delta_i(t)| \leqslant |\Delta_i(t_0)| \exp\int_{t_0}^{t} \varphi_{ii}(s)\,ds + \\
(12)\qquad &+\int_{t_0}^{t}\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\varphi_{ij}(\theta)|\,|\Delta_j(\theta)| \exp\int_{\theta}^{t}\varphi_{ii}(s)\,ds\Big]d\theta + \\
&+\frac{\varepsilon}{2nM}\int_{t_0}^{t}\exp\int_{t_0}^{t}\varphi_{ii}(s)\,ds\Big]\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Posons $\varphi(t) = \max_i \varphi_{ii}(t)$, $\Phi(t) = \max_j \sum_{i\neq j} |\varphi_{ij}(t)|$; en sommant les inégalités (12), lorsque $i = 1,\dots, n$, il résulte :

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta(t)\| \leqslant \|\Delta(t_0)\| \exp\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds + \\
(13)\qquad &+\int_{t_0}^{t}\Big[\|\Delta(\theta)\|\,\Phi(\theta)\exp\int_{\theta}^{t}\varphi(s)\,ds\Big]\,d\theta + \\
&+\frac{\varepsilon}{2M}\int_{t_0}^{t}\Big[\exp\int_{\theta}^{t}\varphi(s)\,ds\Big]\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Multiplions (13) par $\exp\int_{t}^{t_0}\varphi(s)\,ds$; compte tenu du fait que l'expression $\int_{t_0}^{t}\Big[\exp\int_{\theta}^{t_0}\varphi(s)\,ds\Big]\,d\theta$ est dérivable, du lemme de Gronwall on obtient :

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad &\|\Delta(t)\|\exp\int_{t}^{t_0}\varphi(s)\,ds \leqslant \|\Delta(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}\Phi(s)\,ds + \\
&+\frac{\varepsilon}{2M}\int_{t_0}^{t}\Big\{\Big[\exp\int_{\theta}^{t}\Phi(s)\,ds\Big]\exp\int_{\theta}^{t_0}\varphi(s)\,ds\Big\}d\theta.
\end{aligned}
$$

et comme suite on deduit l'inégalité :

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta(t)\| \leqslant \|\Delta(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}[\Phi(s)+\varphi(s)]ds + \\
(15)\qquad &+\frac{\varepsilon}{2M}\int_{t_0}^{t}\{\exp\int_{\theta}^{t}[\Phi(s)+\varphi(s)]\,ds\}\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Evidemment, nous avons $\Phi(s) \leqslant A(s)$, $\varphi(s) \leqslant a(s)$ et par conséquent on déduit :

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta(t)\| \leqslant \|\Delta(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}[A(s)+a(s)]\,ds + \\
(16)\qquad &+\frac{\varepsilon}{2M}\int_{t_0}^{t}\{\exp\int_{\theta}^{t}[A(s)+a(s)]\,ds\}\,d\theta.
\end{aligned}
$$

En choisissant t_0 de manière que $\exp\int_{t_0}^{t}[A(s)+a(s)]\,ds < \frac{\varepsilon}{4N}$ et compte

tenu de (8) nous aurons $|\Delta(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in R$, c'est à dire la solution $x(t)$ este presque-périodique.

Remarque 1. Supposons qu'il existe les constantes $C_{ij} \geqslant 0$ et $C < 0$, telles que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)| \leqslant C_{ij}$, lorsque $i \neq j$ et $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t,x) < C$, ayant la propriété que $\max_j \sum_{i\neq j} C_{ij} + C = p < 0$. Alors, d'après le théorème 2, il existe, tout au plus une solution bornée du système (1) et si cette solution existe, elle est presque-périodique. Evidemment, nous avons supposé que les autres hypothèses du théorème 2 sont vraies.

En effet, dans ce cas l'équation (7) aura la solution positive et bornée $y(t) = -1/p$.

J. Massera [1] a montré le théorème suivant : supposons que le système (1) satisfait aux conditions d'existence et d'unicité et $f_i(t,x)$ sont ω-périodiques de t, alors l'existence d'une solution bornée à l'avenir, à $(n-1)$ composantes ω-périodiques, implique l'existence d'une vibration harmonique pour le système (1).

Nous allons montrer un théorème analogue dans le cas presque-périodique.

Théorème 3. *Si :*

1° *les fonctions $f_i(t,x)$ définies et continues dans l'espace (t,x) sont presque-périodiques de t, uniformément par rapport à la variable x.*

2° *le système (1) admet une solution bornée à l'avenir à $(n-1)$ composantes presque-périodiques, disons $x_2(t),\dots,x_n(t)$,*

3° $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *(t,x) sont définies et continues dans le même plan (t,x) et de plus il existe une fonction intégrable $\psi : R \to R$, telle que $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) \geqslant \psi(t)$,*

4° *l'équation*

$$(17)\qquad \dot{y} = \psi(t)\,y - 1$$

a une solution positive et bornée sur R,
alors la solution $x_1(t),\dots,x_n(t)$, dont il s'agit ci-dessus, est presque-périodique.

Démonstration. Dans la démonstration de ce théorème nous allons utiliser un résultat concernant les équations différentielles du premier ordre (voir [2]).

Soit $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ la solution du système (1), bornée à l'avenir, ayant les composantes $x_2(t),\dots,x_n(t)$, presque-périodiques. En employant les mêmes notations et la même technique utilisées dans la démonstration du théorème 2, on obtient l'équation linéaire suivante :

$$(18)\qquad \dot{\Delta}_1(t) = \varphi_{11}(t)\Delta_1(t) + \sum_{j=2}^{n}\varphi_{1j}(t)\Delta_j(t) + f_1(t+\tau, x(t+\tau)) - f_1(t, x(t+\tau)).$$

Posons $F(t,\tau) = \sum_{j=2}^{n}\varphi_{1j}(t)\,\Delta_j(t) + f_1(t+\tau, x(t+\tau)) - f_1(t, x(t+\tau)$ et

alors l'équation (18) déviendra :

$$\dot{\Delta}_1(t) = \varphi_{11}(t)\,\Delta_1(t) + F(t,\tau)\,; \tag{19}$$

avec un raisonnement similaire au cas des équations différentielles du premier ordre [2], on aura $|\Delta_1(t)| < \varepsilon$, $\forall\, t \in R$, c'est à dire la solution $x(t)$ est presque-périodique.

Si on suppose dans le théorème 3 que la solution du système (1) est bornée dans le passé, c'est à dire sur $(-\infty, t^*]$, alors nous allons chercher une fonction $\psi : R \to R$, telle que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) \leqslant \psi(t)$ et alors l'existence d'une solution positive et bornée de l'équation $\dot{y} = \psi(t)y + 1$ impliquera la presque-périodicité de la solution du système (1).

Supposons que le système (1) est ω-périodique ; alors nous pouvons démontrer un théorème analogue au théorème 2.

Théorème 4. *Si*

1° *les fonctions $f_i(t,x)$ définies et continues sur $R \times \Omega$ sont ω-periodiques de t,*

2° $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)$ *sont définies et continues sur $R \times \Omega$ et de plus, il existe une matrice de fonctions intégrables $\Psi(t) = (\psi_{ij}(t))$, $\psi_{ij} : R \to R$, telle que* $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)\right| \leqslant \psi_{ij}(t)$, $\quad \forall\, i \neq j$ et $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(t,x) \leqslant \psi_{ii}(t)$,

3° $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \inf \left\{ \exp \int_\theta^t [A(s) + a(s)]ds \right\} = 0$, *$A(s)$, $a(s)$ étant les fonctions antérieurement précisées, alors le système (1) a tout au plus une solution bornée et si cette solution existe, elle est ω-périodique.*

Démonstration. D'après le théorème 1, le système (1) ne peut pas avoir qu'une solution bornée ; supposons qu'elle existe. Posons $\Delta(t) = x(t+\omega) - x(t)$.

La même technique et les mêmes notations qu'auparavant, nous nous conduisent à l'inégalité suivante :

$$\|\Delta(t)\| \leqslant \|\Delta(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t [A(s) + a(s)]ds \tag{20}$$

et de l'hypothèse, il résulte $\|\Delta(t)\| = 0$, donc la solution $x(t)$ est ω-périodique.

Dans la suite, nous allons préciser des conditions dans lesquelles toute solution du système (1), bornée à $(n-1)$ composantes ω périodiques est ω-périodique.

Théorème 5. *Si*

1°. *les fonctions $f_i(t,x)$ définies et continues dans l'espace (t,x), sont ω-périodiques de t,*

2°. *le système (1) admet une solution bornée à l'avenir, à $(n-1)$ composantes ω-périodiques : disons $x_2(t), \ldots, x_n(t)$,*

3°. $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x)$ *est continue dans l'espace (t,x) et de plus il existe une fonction intégrable $\psi : R \to R$, telle que* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) \geqslant \varphi(t)$,

4° $\lim\limits_{\theta \to \infty} \inf \left[\exp \int_\theta^t \psi(s)ds \right] = 0$ *alors la solution est ω-périodique.*

Démonstration. Nous allons garder les mêmes notations utilisées dans la démonstration du théorème 4 ; la même technique nous conduit à l'équation :

$$\dot{\Delta}_1(t) = \varphi_{11}(t)\,\Delta_1(t), \tag{21}$$

ayant la solution $\Delta_1(t) = \Delta_1(t_0) \exp \int_{t_0}^t \varphi_{11}(s)ds$. Fixons $t \in R$, et choisissons $t_0 > t$. Puisque $\varphi_{11}(t) \geqslant \psi(t)$, nous aurons l'inégalité :

$$|\Delta_1(t)| \leqslant |\Delta_1(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \psi_{11}(s)\,ds. \tag{22}$$

De l'hypothèse 4° il résulte $\Delta_1(t) = 0$, c'est à dire la solution $x(t)$ est ω-périodique.

Remarque 2. On voit aisément qu'en supposant $f_i(t,x)$ définies et continues dans l'espace (t,x) pour montrer les théorèmes 2 et 4, il suffit de supposer que la solution du système (1) est bornée dans le passé, c'est à dire sur $[-\infty, t^*]$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Massera J. — *The existence of periodic solutions of systems of differential equations.* Duke Mat. J. 17.1, 1950, p. 457—475.
2. Simirad C. — *Sur les solutions périodiques et presque-périodiques des équations différentielles du premier ordre.* An. şt. Univ., Iaşi. Tom 24, S. I a, f. 1, 1978, p. 51 — 56.

Reçu le 2.XII.1977

Centre d'Astronomie et de Science Spatiales
Iaşi, R. S. Roumaine