11. Haimovici Adolf — *Grupuri de transformări geometrice*. Ed. didactică şi pedagogică Bucureşti, 1963.
12. Liebeck H. — *The vector space axiom* $1v = v$. The Math. Gazette, LVI, Nr. 395, 1972 pp. 30—33.
13. Mayer Octav — *Geometrie proiectivă*. Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1970.
14. Miron Radu — *Geometrie elementară*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
15. Miron Radu — *On the almost linear space*. Mathematica, Univ. Cluj-Napoca, T. 18 (41), 2. 1976, pp. 187—190.
16. Miron Radu — *The minimality of Weyl's system of axioms for the affine geometry over an unitary ring*. An. şt. Univ. Iaşi, Sect. I., Matematică, 24 (1978), pp. 15—19.
17. Miron R. et Opaiţ G. — *Sur l'axiomatique de l'espace affine à n dimensions*. An. şt. Univ. Iaşi, 10, 1964, pp. 115—119.
18. Miron R. et Opaiţ G. — *Sur les espaces affines généralisés*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 14, 1969, pp. 653—660.
19. Miron R. and Radò F. — *On the definitions of a module and a vector space by independent axioms*. Mathematica, Univ. Cluj-Napoca 18 (4), 21, 1976, pp. 179—186.
20. Radò F. — *On R-linear spaces* (to appear).
21. Raschewsky P. K. — *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*. Berlin 1959.
22. Segre B. — *Lectures on modern geometry*, Roma, 1961.
23. Vaisman Izu — *Fundamentele matematicii*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti 1968.
24. Vrănceanu G., Hangan T., Teleman C. — *Geometrie elementară din punct de vedere modern*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1967.
25. Weyl H. — *Raum, Zeit, Materie*. Springer, Berlin 1921.

Received 16.XI.1977

Seminarul Matematic „Al. Myller"
Universitatea Iaşi, R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, f. 2, s. I a, 1978

SUR LES SURFACES DONT DEUX NORMALES OU DROITES CANONIQUES PASSENT PAR UN POINT FIXE

PAR

FROIM MARCUS

1. E. Cech s'est proposé l'étude des surfaces dont une normale ou une droite canonique passe par un point fixe, comme une généralisation à la géométrie projective différentielle d'une propriété de la sphère métrique. Il a déterminé les éléments linéaires projectives des surfaces dont l'axe de Cech passe par un point fixe [1]. Cech a attiré l'attention sur ce problème à I. Kaucky qui a obtenu, dans un mémoire très important [2], beaucoup de résultats importants. D'après Kaucky, *les surfaces dont une normale qui n'est pas la directrice de Wilczynski ou une droite canonique, passe par un point fixe, se partagent en deux espèces. Les surfaces de première espèce sont données par les solutions* $\beta = \beta(\tau)$, $\tau = u + v$, *de l'équation*

$$2(k+1)\beta\beta'' + (k^2-1)(\beta')^2 + 2k\beta^2\beta' - 3\beta^4 - a\beta^2 = 0 \tag{1.1}$$

où $k = -3(1+2\lambda)$, $\lambda \neq -1/2$, *a est une constante qu'on peut prendre égale à zero ou à un et* λ *est le paramètre qui fixe la normale d'une surface.* (Voir [1]) On montre en [2] que si $a = 0$, on peut, par une méthode de Cech, obtenir les équations finies de ces surfaces par des quadratures. Ces surfaces ont la propriété qu'une famille de courbes de Darboux se compose de coniques touchant une droite fixe dans un point fixe. Dans le cas $a \neq 0$, les surfaces en question ont la propriété qu'une famille de courbes de Darboux se compose de coniques qui passent par deux points fixes.

Les surfaces de deuxième espèce sont-comme l'a démontré J. Kaucky [2] - *les solutions du système*

$$\beta_{uu} = c\beta\beta_v\,;\ \beta_{vv} = c\beta\beta_u\,, \tag{A_1}$$

$$(k^2-1)(\beta\beta_{uv} - \beta_u\beta_v) + [(k+1)c^2 + kc - 3]\beta^4 = 0, \tag{A_2}$$

où c est une racine de l'équation quadratique

$$(k+1)(k+3)c^2 + 4kc - 12 = 0. \tag{B}$$

Les systèmes $(A_1) + (A_2)$ *ont été intégrés par Kaucky dans le cas* $k = 1$ *et* $k^2 - 1 \neq 0$. *Le cas* $k + 1 = 0$, auquel correspond l'axe ou la normale de Cech a été résolu par Cech [3].

Nous avons démontré récemment en [4] que *contrairement à la supposition de Kaucky* [2], *les solutions des systèmes* $(A_1) + (A_2)$ *dans le cas* $k^2 - 1 \neq 0$, *qui sont données par les formules (128), page 28 de son mémoire* [2], *sont virtuelles, car sur les surfaces correspondantes, les normales ne passent pas par des points fixes et que les seules solutions autres que* $\beta = const.$, *sont celles données par la formule (125) page 27 de* [2], *qui peuvent être réduites à*

$$\beta = -\frac{2}{c\tau}, \quad (\tau = u + v), \quad L = M = -\frac{6}{c^2\tau^2}. \tag{1.2}$$

Les surfaces correspondantes sont donc de la première espèce et on vérifie que les solutions (1.2) satisfont (1.1) avec $a = 0$.

En excluant la valeur $k = -2/3$, c'est-à-dire $\lambda = -1/4$, à laquelle correspond la normale de Green, *deux des normales de ces surfaces passent par des points fixes.*

2. Dans notre mémoire [5] nous avons complété les résultats de Cech et Kaucky, en démontrant entre autres les résultats suivants :

1. *Chaque surface qui correspond à une solution* β *de l'équation (1.1) est une surface de rotation projective.*

2. *Une telle surface peut admettre tout-au-plus deux normales passant par des points fixes.*

Pour résoudre complètement l'étude des surfaces dont une normale ou une droite canonique passe par un point fixe (problème qui comme nous l'avons vue a été posée par E. Cech), il reste encore à voir si outre les surfaces (1.2) obtenues par Kaucky, il existe d'autres dont deux normales passent par des points fixes.

Le but de cette note est de montrer qu' à une seule exception, les surfaces (1.2) sont les seules dont deux normales passent par des points fixes.

3. La solution (1.2) a été obtenue par Kaucky en intégrant les systèmes $(A_1) + (A_2)$ dans le cas $k^2 - 1 \neq 0$. *Nous montrerons qu'on obtient la même solution si l'on suppose que l'équation différentielle (1.1) est satisfaite pour deux valeurs* k_1 *et* k_2 *de* k, $k_1 \neq k_2$, *avec* $k_1 + k_2 + 4 \neq 0$.

En effet, soient k_1 et k_2, $k_1 \neq k_2$, deux valeurs de k pour lesquelles l'équation (1.1) est satisfaite. Moyennant la substitution

$$\beta' = p\,; \quad \beta'' = p\dot{p}, \quad \dot{p} = \frac{dp}{d\beta}, \tag{3.1}$$

on tire de (1.1)

$$\begin{aligned} &2(k_1 + 1)\,p\dot{p} + (k_1^2 - 1)\frac{p^2}{\beta} + 2k_1\beta p - 3\beta^3 - a\beta = 0, \\ &2(k_2 + 1)\,p\dot{p} + (k_2^2 - 1)\frac{p^2}{\beta} + 2k_2\beta p - 3\beta^3 - a\beta = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Par soustraction et en posant $A = (k_1 + k_2)/2$ il résulte $\dot{p} + Ap/\beta + \beta = 0$ qui donne par intégration

$$p = c\beta^{-A} - \frac{\beta^2}{A + 2}, \tag{3.3}$$

avec $A + 2 \neq 0$.

En introduisant (3.3) dans une des équations (3.2), par exemple dans la première, on doit obtenir une identité. Par conséquent

$$\begin{aligned} &\beta^{-(1+2A)}\left[C^2(1 + k_1)(k_1 - 1 - 2A)\right] + \\ &+ \beta^{1-A}\left[\frac{2C(A + 2Ak_1 - 1 - k_1^2)}{A + 2}\right] + \\ &+ \beta^3\left[\frac{k_1^2 - 2Ak_1 + 3(1 - (A + 2)^2)}{(A + 2)^2}\right] - a\beta \equiv 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On doit considérer tout d'abord les cas particuliers suivants :

1-er cas. $A = 0$.

On tire dans ce cas de (3.4)

$$k_1^2 - 9 = 0\,; \quad C(1 + K_1^2) + a = 0\,; \quad C^2(k_1^2 - 1) = 0. \tag{3.5}$$

Par conséquent

$$C = a = 0\,; \quad k_1 = \pm 3, \tag{3.6}$$

et de $k_2 = \mp 3$ et $k_i = -3(1 + 2\lambda_i)$ il résultera $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ ou réciproquement. De (3.3) et (3.1) et sans diminuer la généralité, on aura

$$\beta = \frac{2}{\tau}(\tau = u + v), \tag{3.7}$$

et sur la surface correspondante la normale projective de Fubini et la droite canonique ou la normale $\lambda = 1$, passent par des points fixes.

2 ème cas $A = 1$.

Dans ce cas on a

$$a = C^2(1 + k_1)^2\,; \quad C(k_1^2 + 2k_1 + 2) = 0\,; \quad k_1(k_1 + 2) = 0. \tag{3.8}$$

De la deuxième et troisième condition il s'ensuit

$$C = a = 0\,; \quad k_1(k_1 + 2) = 0. \tag{3.9}$$

Le cas $k_1 = 0$ auquel correspond la normale de Wilczynski étant exclu, les deux normales de la surface correspondant à la solution $\beta = 1/\tau$ qui passent par des points fixes sont : la première droite principale de Fubini et la première directrice de Wilczynski.

3 ème cas. $1 + 2A = 0$.

Dans ce cas nous avons :

$$k_1(k_1+1)C^2=0\,;\ a=0\,;\ C\left(k_1^2+k_1-\frac{3}{2}\right)=0\,;$$

(3.10)

$$k_1^2+k_1-\frac{15}{4}=0$$

et par conséquent $k_1(k_1+1)$ ne peut pas s'annuler.

Donc

(3.11) $$C=a=0\,;\quad k_1=\frac{3}{2}\text{ ou }-\frac{5}{2}\,,$$

et de (3.3) et (3.1) il résultera

(3.12) $$\beta=\frac{3}{2\tau}\,;\quad L=M=-\frac{27}{8\tau^2}\,.$$

Sur la surface correspondante qui jouit d'une propriété très intéressante, voir [6], la deuxième droite principale de Fubini et la normale de Lane $\lambda=-3/4$, passent par un point fixe.

Enfin, soit le

4 ème cas $1-A=0.$

Dans ce cas on a :

$$C^2(1+k_1)(k_1-3)=0\,;\ 2Ck_1(2-k_1)=0\,;\ a=0\,,\ k_1^2-2k_1-24=0,$$

c'est-a-dire $k_1=-4$ ou 6 et de la dernière condition il y résultera $C=0$. Donc $\beta=3/\tau$. Sur cette surface la droite canonique $\lambda=-3/2$ et celle fixée par $\lambda=1/6$ passent par un point fixe. La normale $\lambda=1/6$ et la première droite principale de Fubini $\lambda=-1/6$ forment que division harmonique avec la normale projective de Fubini et la tangente canonique. La droite canonique $\lambda=-3/2$ n'a pas encore été considerée dans la géométrie projective différentielle.

4. Soit maintenant le cas général. De (3.4) on tire :

$$C^2(1+k_1)(k_1-1-2A)=0\,;\ C(2Ak_1-k_1^2+A-1)=0\,;\ a=0\,;$$

(4.1) $$k_1^2-2Ak_1+3(1-(A+2)^2)=0.$$

Si $1+k_1=0$, on a $A+2=0$, ce que l'on exclut. Si $k_1=1+2A$, la quatrième condition donne $A=-4/3$ et $A=-2$, et les valeurs correspondantes de k_1 sont : $k_1=-4/3$ ou $k_1=-3$.

Mais on vérifie tout de suite que dans ce cas $A+2Ak_1-k_1^2-1\neq0$. Par conséquent $C=0$, et il y reste encore la relation quadratique entre k_1 et A ou entre k_2 et A,

(α) $$3A^2+2A(6+k_1)+9-k_1^2=0.$$

Pour chaque valeur de k_1 on a en général deux valeurs pour A et réciproquement. La seule exception correspond à $k_1=-3/2$. En effet, pour $k_1=-3/2$ il correspond la seule valeur $A=-3/2$, et de l'expression [voir 3] de A, il y résultera $k_2=2A-k_1=-3/2=k_1$ ce que l'on doit exclure car nous avons supposé $k_1\neq k_2$.

A $k_1=-3/2$ il correspond $\lambda=-1/4$ qui fixe comme l'on sait la normale de Green [1].

Par conséquent on doit exclure dans (α) *la valeur* $k_1=-3/2$. Pour $k_1=-3/2$ on a $A+2=1/2$ et par conséquent $\beta=1/2\tau$; $L=M=-3/8\tau^2$. Cette surface est en correspondance asymptotique avec la surface (3.12). Elle est liée a cette dernière surface par la propriété signalée plus haut. De (3.3) et (3.1) par intégration nous pouvons prendre $\beta=(A+2)/\tau$ et en posant $A+2=-2/c_1$ nous aurons finalement $\beta=-2/c_1\tau$, $L=M=-6/c_1^2\tau^2$, $(\tau=u+v)$.

La condition (α) *deviendra*

(B_1) $$(k_1+1)(k_1+3)c^2+4k_1c_1-12=0,$$

qui a la même forme que l'équation quadratique (B). Nous avons donc le

Théorème. *Les seules surfaces dont deux normales ou droites canoniques passent par un point fixe sont les surfaces données par* $\beta=-2/c\tau$; $L=M=-6/c^2\tau^2$. $\tau=u+v$, *où* c *est une solution de l'équation* $(k+1)(k+3)c^2+4kc-12=0$ *avec* $k\neq-3/2$. Avec ce théorème et d'après les résultats de Cech, I. Kaucky et F. Marcus, il semble que l'étude des surfaces dont une normale ou droite canonique passe par un point fixe est terminée.

Les surfaces (4.9) dont deux de ses normales ou droites canoniques passent par un point fixe, admettent selon Fubini [7] un groupe à deux paramètres de colinéations en elles mêmes et sont obtenues sous forme finie, commes nous montrons en [8] par O. Boruvka.

BIBLIOGRAPHIE

1. Fubini G., Čech E. — *Geometria proiettiva differenziale T.1*, N. Zanichelli Bologna.
2. Kaucky J. — *Etude de surface dont une droite canonique passe par un point fixe.* Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, 1929, No. 109 Brno.
2'. Kaucky J. — *Ibidem*, Rendiconti dell 'Accademia dei Lincei (6) (IX) 1929.
3. Čech E. — *Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes.* Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, No. 11, 1922, Brno.
4. Marcus F. — *On the results of J. Kaucky concerning the problem of the determination of surfaces for which a canonical line passes through a fixed point.* Bulletin de la classe des Sciences de l'Academie royale de Belgique, en cours de publication.
5. Marcus F. — *Completion of Cech's and Kaucky's results on the analysis of surfaces on which a canonical line passes through a fixed point.* Annali di Matematica pura ed applicata, en cours de publication.
6. Evyatar A., Marcus F. — *Correspondances asymptotiques et familles de courbes planes invariantes.* Faculté de Mathématique de l'Université d'Istanbul, en cours de publication.
7. Fubini G. — *Fondamenti di geometria proiettivo differenziale*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. 43, pp. 1—46, 1919.
8. Marcus F. — *Again on the surfaces which allow ∞ projective transformation into themselves.* An. şt. Univ. Iaşi, 1976.

Reçu le 20.X.1977

Technion, I.T.I.
Dept. of Mathematics
Haifa, Israel.