Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, f. 2, s. I a, 1978

DEUX OBSERVATIONS SUR LES MÉTRIQUES CONFORMES

PAR

LIVIU NICOLESCU

Nous présentons d'abord, dans cette Note un théorème sur l'associativité de l'algèbre de déformation et puis nous mettons en évidence un résultat similaire à un théorème de André Avez [2].

Les variétés différentiables, les applications différentiables, les champs tensoriels et les connexions linéaires qui interviennent dans la suite sont supposées de classe C^∞.

Soit M_n une variété différentiable réelle, à n dimension. Désignons par $\mathcal{F}(M_n)$ - l'anneau des fonctions réelles, différentiables définies sur M_n et par $\mathcal{X}(M_n)$ - le $\mathcal{F}(M_n)$ - module des champs de vecteurs.

Supposons que la variété M_n est munie de deux connexions lineaires ∇ et $\bar{\nabla}$. Si on définit le produit de deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{X}(M_n)$ par la formule $X \circ Y = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, alors le $\mathcal{F}(M_n)$ - module $\mathcal{X}(M_n)$ devient une $\mathcal{F}(M_n)$-algèbre. Cette algèbre s'appelle algèbre de déformation de la paire de connexions $(\nabla, \bar{\nabla})$; elle sera notée par $\mathcal{U}(M_n, \nabla, \bar{\nabla})$ [7].

Dans cette Note nous utilisons les résultats de [1], [2], [4], [5], [6], [8], [9] et nous présentons les théorèmes suivants :

Théorème 1. *Soit g et $\bar{g} = e^{2u} g$ $(u \in \mathcal{F}(M_n))$ deux métriques conformes sur la variété M_n $(n > 2)$. Notons par ∇, resp. $\bar{\nabla}$, les connexions de Levi-Civita associées à g, resp. $\bar{g}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *g et $\bar{g}$ sont homothétiques,*

(ii) *∇ et $\bar{\nabla}$ possèdent les mêmes géodésiques,*

(iii) *l'algèbre de déformation $\mathcal{U}(M_n, \bar{\nabla}, \nabla)$ est associative.*

Théorème 2. *Soit g et $\bar{g} = e^{2u} g$ $(u \in \mathcal{F}(M_n))$ deux métriques conformes sur la variété M_n $(n \geqslant 3)$. Supposons que le tenseur de Ricci de g est nondégénéré. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *g et $\bar{g}$ sont homothétiques,*

(ii) *g et $\bar{g}$ conduisent au même tenseur de Ricci.*

Pour démontrer le théorème 1 et le théorème 2 on utilisera les lemmes suivantes :

Lemme 3. *Soit g et $\bar{g} = e^{2u} g$ $(u \in \mathcal{F}(M_n))$ deux métriques conformes sur la variété M_n. Notons par ∇, resp. $\bar{\nabla}$, les connexions de Levi-Civita associée à g, resp. $\bar{g}$. Soit A, resp. K, le champ tensoriel de déformation [7]*

resp. le champ tensoriel de la courbure de déformation [7], *donné par la formule :*

$$A(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \tag{1}$$

resp.

$$4K(X, Y)Z = A(X, A(Y, Z)) - A(Y, A(X, Z)), \ (\forall)\, X, Y, Z \in \mathscr{X}(M_n) \tag{2}$$

Pour tout champ $X, Y, Z, V \in \mathscr{X}(M)$ nous avons :

$$g(A(X, Y), Z) = X(u)\, g(Y, Z) + Y(u)\, g(X, Z) - Z(u)\, g(X, Y), \tag{1'}$$

$$\begin{aligned} 4g(K(X, Y)Z, V) &= X(u)\, Z(u)\, g(Y, V) - Y(u)\, V(u)\, g(X, Z) - \\ &- Y(u)\, Z(u)\, g(X, V) + X(u)\, V(u)\, g(Y, Z) + A(Y, Z)(u)\, g(X, V) - \\ &- A(X, Z)(u)\, g(Y, V) \end{aligned} \tag{2'}$$

Lemme 4. *Soit g et $\bar{g} = e^{2u} g$ ($u \in \mathscr{F}(M_n)$) deux métriques conformes sur la variété M_n ($n \neq 2$). Supposons que le tenseur de Ricci de g est non-dégénéré. Soit ∇ et R (resp. $\bar{\nabla}$ et $\bar{R}$) la connexion de Levi-Civita et le tenseur de courbure de g* (resp. $\bar{g}$). *Considérons deux fonctions $f, h \in \mathscr{F}(M_n)$ avec la propriétés $f(p)\, h(p) \neq 0$, $(\forall)\, p \in M_n$.*

Alors la relation

$$f \bar{\nabla}_X R + h \bar{\nabla}_X \bar{R} = 0, \ (\forall)\, X \in \mathscr{X}(M_n) \tag{3}$$

implique u = constante.

Démonstration du lemme 3. Pour tout $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M_n)$ nous avons :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, \tag{4}$$

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_X \bar{g})(Y, Z) = 0. \tag{5}$$

De (5) résulte :

$$2X(u)\, g(Y, Z) = g(A(X, Y), Z) + g(Y, A(X, Z)). \tag{6}$$

En tenant compte de (6), nous obtenons (1').

De (1') on déduit alors pour tout $X, Y, Z, V \in \mathscr{X}(M_n)$ la relation :

$$\begin{aligned} g(A(X, A(Y, Z)), V) &= X(u)\, Y(u)\, g(Z, V) + X(u)\, Z(u)\, g(Y, V) - \\ &- Y(u)\, V(u)\, g(X, Z) - Z(u)\, V(u)\, g(X, Y) + A(Y, Z)(u)\, g(X, V) \end{aligned} \tag{7}$$

En tenant compte de (7) et de (2) nous obtenons (2').

Démonstration du lemme 4. Il est clair que :

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X R)(Y, Z, V) &= \bar{\nabla}_X R(Y, Z)\, V - R(\bar{\nabla}_X Y, Z)\, V - R(Y, \bar{\nabla}_X Z)\, V - \\ &- R(Y, Z)\, \bar{\nabla}_X V, \ (\forall)\, X, Y, Z, V \in \mathscr{X}(M_n). \end{aligned}$$

De (3) on déduit alors :

$$\begin{aligned} f(\nabla_X R)(Y, Z, V) &+ h(\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, V) + f\{A(X, R(Y, Z)\, V) - \\ &- R(A(X, Y), Z)\, V - R(Y, A(X, Z))\, V - R(Y, Z)\, A(X, V)\} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

En employant les identités de Bianchi

$$(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0, \tag{9}$$

$$(\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, V) + (\bar{\nabla}_Y \bar{R})(Z, X, V) + (\bar{\nabla}_Z \bar{R})(X, Y, V) = 0, \tag{9'}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} &A(X, R(Y, Z)\, V) - R(Y, Z)\, A(X, V) + A(Y, R(Z, X)\, V) - \\ &- R(Z, X)\, A(Y, V) + A(Z, R(X, Y)\, V) - R(X, Y)\, A(Z, V) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Soit g_{ij}, resp. R^i_{jkh}, les composantes de g, resp. R, dans une carte locale $(U, \varphi) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. De (1') et de (10) résulte :

$$(g_{jr} R^i_{skh} + g_{jk} R^i_{shr} + g_{jh} R^i_{srk} + \delta^i_r R_{sjkh} + \delta^i_k R_{sjhr} + \delta^i_h R_{sjrk})\, u^s = 0 \tag{11}$$

où $u_k = \dfrac{\partial u}{\partial x^k}$, $u^s = g^{sk} u_k$, $R_{ijkh} = g_{is} R^s_{jkh}$, $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ et où δ^i_k sont les symboles de Kronecker.

En multipliant les formules (11) par g^{jr} et en sommant, il résulte :

$$\{(n-3)\, R^i_{skh} + \delta^i_k g^{jr} R_{sjhr} + \delta^i_h g^{jr} R_{sjrk}\}\, u^s = 0. \tag{12}$$

En faisant $i = h$ dans (12) et en sommant, il résulte :

$$(n-2)\, R_{ks} u^s = 0, \tag{13}$$

où $R_{ks} = R^i_{kis}$ sont les composantes du tenseur de Ricci de g. Puisque $\det(R_{ks}) \neq 0$ et $n \neq 2$ de (13) résulte $u^s = 0$, d'où immédiatement, u = constante.

Démonstration du théorème 1.

(i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii). Evidemment.

(ii) $\Rightarrow$ (i). On sait que [8] ∇ et $\bar{\nabla}$ ont les mêmes geodésiques si et seulement s'il existe une *1*-forme ω sur M_n telle que :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X)\, Y + \omega(Y)\, X, \ (\forall)\, X, Y \in \mathscr{X}(M_n) \tag{14}$$

En particulier, pour $Y = X$, nous avons

$$A(X, X) = 2\omega(X)\, X, \ (\forall)\, X \in \mathscr{X}(M_n) \tag{15}$$

où $A = \bar{\nabla} - \nabla$. Si dans (1') on fait $Y = X$, résulte

$$g(A(X, X), Z) = 2X(u)\, g(X, Z) - Z(u)\, g(X, X), \ (\forall)\, X, Z \in \mathscr{X}(M_n \tag{16}$$

En tenant compte de (15) et de (16) nous obtenons :

$$2\omega(X)\, g(X, Z) = 2X(u)\, g(X, Z) - Z(u)\, g(X, X), \ (\forall)\, X, Z \in \mathscr{X}(M_n) \tag{17}$$

En particulier, pour $Z = X$, on obtient

$$2\omega(X)\, g(X, X) = X(u)\, g(X, X), \ (\forall)\, X \in \mathscr{X}(M_n) \tag{18}$$

De (18) on déduit alors :

$$2\omega_p(X_p) = X_p(u), \ (\forall)\, p \in M_n, \ (\forall)\, X_p \in T_p(M_n) - \{0\} \tag{19}$$

où $T_p(M_n)$ est l'espace tangent en chaque point $p \in M_n$. En tenant compte de (17) et de (19) nous avons :

$$\omega_p(X_p)\, g_p(X_p, Z_p) = \omega_p(Z_p)\, g_p(X_p, X_p), \quad (\forall)\, p \in M_n, \quad (\forall)\, X_p,\ Z_p \in T_p(M_n) - \{0\} \tag{20}$$

Puisque $n > 2$, pour tout $p \in M_n$ et pour tout $Z_p \in T_p(M_n) - \{0\}$ il existe un vecteur $X_p \in T_p(M_n) - \{0\}$ tel que $g_p(X_p, Z_p) = 0$. Alors de (20) nous avons $\omega_p(Z_p) = 0$, $(\forall)\, p \in M_n$, $(\forall)\, Z_p \in T_p(M_n) - \{0\}$. Il résulte $\omega_p = 0$, $(\forall)\, p \in M$ et en tenant compte de (19) nous obtenons $u =$ constante.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Puisque l'algèbre $\mathcal{U}(M, \nabla, \overline{\nabla})$ est commutative, il est clair que $\mathcal{U}(M, \nabla, \overline{\nabla})$ est associative si et seulement si $K(X, Y)\, Z = 0$, $(\forall)\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M_n)$, où K est donné par la formule (2). En employant (2') nous obtenons pour tout $X, Y, Z, V \in \mathcal{X}(M_n)$ la relation

$$\begin{aligned} &X(u)\, Z(u)\, g(Y, V) - Y(u)\, V(u)\, g(X, Z) - Y(u)\, Z(u)\, g(X, V) + \\ &+ X(u)\, V(u)\, g(Y, Z) + A(Y, Z)(u)\, g(X, V) - A(X, Z)(u)\, g(Y, V) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Puisque $n \geqslant 3$, pour tout $p \in M_n$ et pour tout $V_p \in T_p(M_n) - \{0\}$ il existe deux vecteurs $X_p, Y_p \in T_p(M_n) - \{0\}$ tels que $g_p(X_p, V_p) = 0$ et $g_p(Y_p, V_p) = 0$. Alors de (21) on a :

$$Y(u)\, g(X, Z) - X(u)\, g(Y, Z) = 0. \tag{22}$$

Puisque la métrique g est nondégénérée, de (22) on a : $Y(u)\, X - X(u)\, Y = 0$ d'où immédiatement, $u =$ constant.

Démonstration du théorème 2. (i) $\Rightarrow$ (ii) Evidemment.

(ii) $\Rightarrow$ (i). De la relation $\overline{g} = e^{2u}\, g$, où $u \in \mathcal{F}(M_n)$ nous obtenons

$$W(X, Y)\, Z = \overline{W}(X, Y)\, Z, \quad (\forall)\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M_n) \tag{26}$$

où W, resp. $\overline{W}$, est le tenseur conforme de Weyl [3], [9] associée à g, resp. $\overline{g}$. De (26) et de (ii) on déduit que les métriques g et $\overline{g}$ conduisent au même tenseur de courbure, donc $R = \overline{R}$, d'où nous avons $\overline{\nabla}_X R - \overline{\nabla}_X \overline{R} = 0$, $(\forall)\, X \in \mathcal{X}(M_n)$, c'est-à-dire justement la relation (3) où $f = 1$ et $h = -1$. En tenant compte du Lemme 4 on obtient $u =$ constante.

BIBLIOGRAPHIE

1. Anastasici M. — *Conformal structures on Banach vector bundles.* An. şt. Univ., Iaşi Tomul XX s. I a, fasc. 2 (1974), p. 351—358.
2. Avez A. — *Essais de géométrie riemannienne hiperbolique globale — Applications à la relativité générale.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 13, 2 (1963), p. 105—190.
3. Kulkarni R. S. — *Curvature and metric.* Ann. of Math., 91, 2 (1970), p. 311—331.
4. Nicolescu L. — *Une extension des variétés de Weyl et de Lyra.* Ann. Fac. Sci. de Kinshasa, Zaire, Section Math.-Phys., 3 (1976), p. 143—152.
5. Nicolescu I. et Teodorescu I. — *Des champs caractéristiques non isotropes sur une variété conforme.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R., Tome 20 (68), nr. 3—4, 1976.

6. Teodorescu I. — *Sur les espaces $A_2(x,y)$ à connexion affine.* Math. Nachrichten, 52, 1—6 (1972), p. 343—353.
7. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global.* Comm. Math. Helvetici, 41, 2 (1966—1967), p. 73—89.
8. Vrănceanu Gh. — *Lecţii de geometrie diferenţială.* Vol. I, II, Bucureşti, 1964.
9. Yano K. — *On semi-symmetric metric connections.* Rev. Math. pures et appl., 15 (1970), p. 1579—1586.

Reçu le 6.II.1978

Université de Bucarest
Faculté de Mathématiques 14,
rue de l'Académie R. S. Roumaine