Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, f. 2, s. I a, 1978

SUR L'EQUATION : $Dy = F(x, y) * Dx$ DANS UNE ALGEBRE REELLE

PAR

ION CREANGĂ

A la mémoire de Grigore Moisil

Dans l'étude de certaines équations différentielles, Grigore Moisil a introduit [1] les algèbres avec un système de $n+1$ unités complexes $\{e_i\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, telles que :

$$e_0 e_i = e_i ; \quad e_i e_j = -e_j e_i \; (i \neq j, i, \; j \neq 0), \; e_i^2 = -e_0,$$

$$e_i (e_j e_k) = (e_i e_j) e_k .$$

En partant de ces idées nous allons faire quelques considérations concernant une classe d'équations dans les algèbres réelles.

1. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre distributive, finie sur le corps réel $\mathbf{R}$; l'associativité de la multiplication n'est pas imposée. On désigne par „·" la loi de composition entre les scalaires de $\mathbf{R}$ et les vecteurs de $\mathcal{A}$ et par „$*$" la multiplication dans $\mathcal{A}_k$; la multiplication dans $\mathbf{R}$ sera écrite sans aucun signe entre facteurs. On utilise la notation des indices muets pour la sommation.

Considérons $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ une base de $\mathcal{A}$ et $x = \xi^i \cdot e_i, y = \eta^j \cdot e_i$ $(\xi^j, \eta^j \in \mathbf{R} ; \; i, \; j = 1, 2, \ldots, n)$ deux vecteurs ; une fonction vectorielle $z = F(x, y)$ est définie par $z = \varphi^k \cdot e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, où : $\varphi^k = \varphi^k(x, y) = \varphi^k(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n ; \; \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ sont des fonctions scalaires des coordonnées ξ^i, η^j. On désigne par D, l'opérateur différentiel dans $\mathcal{A}$, de sorte que si $v = v^h . e_h$, alors $Dv = dv^h \cdot e_h$.

L'équation vectorielle :

$$Dy = F(x, y) * Dx \tag{1}$$

est équivalente au système :

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^h} = \alpha^k_{ih} \varphi^i, \tag{2}$$

α^k_{ih} $(i, h, k = 1, 2, \ldots n)$ étant les constantes de structure de $\mathcal{A}$.

Les conditions d'intégrabilité pour (2), s'expriment par :

$$\alpha^k_{ih} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^j} - \alpha^k_{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^h} + (\alpha^k_{th} \alpha^r_{uj} - \alpha^k_{tj} \alpha^r_{uh}) \frac{\partial \varphi^t}{\partial \eta^r} \varphi^u = 0. \tag{3}$$

$$(k, h, j = 1, 2, \ldots n).$$

Ces conditions restent invariantes aux changements de base.

2. Nous avons cherché les cas particuliers suivants d'algèbres dont la résolution de (2) se réduit à des systèmes connus.

1°. L'algèbre $\mathfrak{A}$ est somme directe de n algèbres du premier ordre; on peut trouver une base de sorte que:

$$c_i * c_j = 0 \ (i \neq j); \quad c_i^2 = c_i, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Dans ce cas, on a, pour $\varphi^j \neq 0$: $\partial\varphi^k/\partial\eta^j = 0$ $(k \neq j)$, c'est à dire φ^k ne dépend pas de η^j; de même $\partial\eta^k/\partial\xi^j = 0$ $(k \neq j)$ et, par suite $\partial\varphi^k/\partial\xi^j = 0$; il s'ensuit que φ^k est fonction seulement de ξ^k et η^k et le système (2) se réduit à n équations différentielles, indépendantes entre elles.

2°. Les algèbres pour lesquelles:

$$\alpha_{th}^k \alpha_{uj}^r - \alpha_{tj}^k \alpha_{uh}^r = 0, \tag{5}$$

quels que soient les indices h, k, j, r, t, u, conduisent aux conditions

$$\alpha_{th}^k \frac{\partial\varphi^t}{\partial\xi^j} - \alpha_{tj}^k \frac{\partial\varphi^t}{\partial\xi^h} = 0. \tag{6}$$

On constate que pour ces algèbres, la matrice tridimensionelle des constantes de structure a, pour quatre indices du même rang, fixés, deux rangées d'éléments proportionels. L'existence de telles algèbres est bien connue; Comme exemples immediats: a) les algèbres qui ont les constantes de structure toutes égales; b) les cas:

$$\alpha_{th}^k \alpha_{lj}^r = \alpha_{uv}^s, \tag{7}$$

où $s \equiv kr \pmod{n+1}$, $u \equiv il$, $\pmod{n+1}$, $v \equiv hj \pmod{n+1}$.

En général, les algèbres qui remplissent les conditions (5) ne sont pas associatives ou commutatives et ont des diviseurs de zéro.

3°. Pour une algèbre quelconque, on prend la fonction F de (1), dépendente seulement du vecteur x; les conditions (3) s'expriment aussi par (6). Dans les cas particuliers quand $F(x)$ est un opérateur linéaire

$$F(x) = (\lambda_i^k \xi^i) \cdot e_k, \qquad \lambda_i^k \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

alors de (2) on obtient:

$$d\eta^k = \xi^j d(\alpha_{ih}^k \lambda_j^i \xi^h), \tag{9}$$

c'est à dire:

$$\eta^k = \frac{1}{2}\beta_{hj}^k \xi^h \xi^j + \beta^k, \tag{10}$$

où:

$$\beta_{hj}^k = \alpha_{ih}^k \lambda_j^i + \alpha_{ij}^k \lambda_h^j. \tag{11}$$

A l'abstraction de constantes additives, le vecteur y s'obtient de x par des opérations quadratiques.

4°. On considère aussi le cas où F, dans (1), dépend seulement du vecteur y. Des conditions (3), il en reste:

$$(\alpha_{sh}^k \alpha_{lj}^r - \alpha_{sj}^k \alpha_{lh}^r) \frac{\partial\varphi^s}{\partial\eta^r} \varphi^l = 0. \tag{12}$$

Il se présente les sous-cas suivants:

a)
$$\alpha_{sh}^k \alpha_{lj}^r - \alpha_{sj}^k \alpha_{lh}^r = 0, \quad (h, k, j, l, r, s = 1, 2 \ldots n),$$

qui a été considéré précédemment.

b)
$$(\alpha_{sh}^k \alpha_{lj}^r - \alpha_{sj}^k \alpha_{lh}^r) \varphi^l = 0. \tag{13}$$

Ici, nous avons un système linéaire, homogène en φ^l; il y a n^5 équations, avec n inconnues; s'il est compatible, il résulte

$$\varphi^l = \Phi(\varphi^1, \varphi^2, \ldots \eta^n) c^l, \tag{14}$$

$\Phi(\eta^1, \eta^2 \ldots, \eta^n)$ est une fonction arbitraire, c^l des constantes $(l = 1, 2, \ldots, n)$, solutions de (13)) et le système (2) deviendra:

$$\frac{\partial\eta^k}{\partial\zeta^k} = \Phi(\eta^1, \eta^2, - \eta^n), \tag{15}$$

où:

$$\zeta^k = \alpha_{lh}^k c^l \xi^h.$$

c)
$$(\alpha_{sh}^k \alpha_{lj}^r - \alpha_{sj}^k \alpha_{lh}^r) \frac{\partial\varphi^s}{\partial\eta^r} = 0. \tag{16}$$

Dans ce cas, il y a un système linéaire et homogène en $\partial\varphi^s/\partial\eta^r$ de n^4 équations; si ce système est compatible, on trouve:

$$\frac{\partial\varphi^s}{\partial\eta^r} = \psi(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) c_r^s, \tag{17}$$

$\Psi(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ étant arbitraire, c_r^s des constantes, solutions de (16); le système (17) s'écrit:

$$\frac{d\varphi^s}{d\zeta^s} = \Psi(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n), \tag{18}$$

avec: $\zeta^s = c_h^s \eta^h$; en notant, de même, par $\omega_i^k = \alpha_{ih}^k \xi^h$, nous avons:

$$\frac{d\eta^k}{d\omega_i^k} = \varphi^i. \tag{19}$$

On peut réduire ce cas au cas précédent, en prenant:

$$Dx = F(y) * Dy \quad \text{et} \quad Dy = F(y) * Dx$$

ce qui conduit a un système d'équation aux différentielles totales:

$$d\eta^l = \alpha_{it}^l \alpha_{jk}^t \varphi^i \varphi^j d\eta^k.$$

d) On peut considérer encore la classe des algèbres pour lesquelles les constantes de structure remplissent les conditions:

$$\alpha_{sh}^k \alpha_{lj}^r - \alpha_{sj}^k \alpha_{lh}^r = \alpha_{lh}^k \alpha_{sj}^r - \alpha_{lj}^k \alpha_{sh}^r, \tag{20}$$

pour tous les indices. Quand les φ^i dépendent seulement des arguments η^h, alors on trouve :

$$(\alpha^k_{sh}\,\alpha^r_{ij} - \alpha^k_{ij}\,\alpha^r_{ih})\,\varphi^s\varphi^i = c^{k,r}_{h,j}, \tag{21}$$

$c^{k,r}_{h,j}$ étant des constantes ; c'est un système du deuxième degré pour les inconnues φ^i ; s'il est compatible, nous obtenons pour φ^i des constantes α^i et (1) admet la solution :

$$y = a * x + b, \tag{22}$$

où a, b sont des vecteurs constants arbitraires. Si l'on prend tous les $c^{k,r}_{h,j}$ nuls, alors (21) est homogène et $\varphi^i = \Phi(\eta^1, \eta^2, \dots \eta^n)\,\alpha^i$. Nous avons pour la détermination de y, le système :

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^h} = \alpha^k_{ih}\,\alpha^i\,\Phi(\eta^1, \eta^2, \dots \eta^n).$$

3. On peut chercher les conditions dans lesquelles l'ensemble des solutions de (1) forment une structure algébrique.

1°. Soit y_1 et y_2 deux solutions de (1), c'est à dire :

$$Dy_1 = F(x, y_1) * Dx,$$
$$Dy_2 = F(x, y_2) * Dx;$$

alors $y_1 + y_2$ sera aussi une solution si l'on a :

$$[F(x, y_1 + y_2) - F(x, y_1) - F(x, y_2)] * Dx = 0. \tag{23}$$

Quand $F(x, y)$ est linéaire en y, (23) sera identiquement verifié. En général, on doit avoir les conditions :

$$\alpha^k_{ih}[\varphi^i(x, y_1 + y_2) - \varphi^i(x, y_1) - \varphi^i(x, y_2)] = 0. \tag{24}$$

On observe que si l'algèbre n'a pas de diviseurs de zéro, alors $F(x, y)$ doit être linéaire en y et que (24) a des solutions différentes de zéro dans le cas où le rang généralisé de la matrice tridimensionelle (α^k_{ih}) est $r < n$.

2°. Si y est solution de (1), alors λy ($\lambda \in \mathbf{R}$) est solution, quand :

$$\alpha^k_{ih}[\varphi^i(x, \lambda y) - \lambda\varphi^i(x, y)] = 0. \tag{25}$$

Dans les cas où (24) et (25) sont satisfaites, l'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel inclus dans $\mathcal{A}$.

3°. Etant donné deux solutions de (1) y et z, afin que leurs produit $y*z$ soit aussi une solution, on doit avoir :

$$\begin{aligned} &\alpha^t_{lm}\varphi^l(\xi^1, \xi^2 \dots \xi^n;\ \alpha^1_{ij}\xi^i\eta^j, \alpha^2_{ij}\xi^i\eta^j, \dots, \alpha^n_{ij}\xi^i\eta^j) = \\ &= \alpha^t_{ul}\alpha^u_{im}\zeta^l\varphi^i(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n;\ \eta^1, \eta^2 \dots \eta^n) + \\ &+ \alpha^t_{lv}\,\alpha^v_{hm}\,\eta^l\,\varphi^h(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n;\ \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \end{aligned} \tag{26}$$

où $y = \eta^r\,e_r$ et $z = \zeta^s{}_{l_s}$.

Lorsque les relations (24) (25) (26) sont satisfaites, l'ensemble des solutions de (1) forme une sous -algèbre de $\mathcal{A}$. On remarque que dans ce cas $y = 0$ est une solution et que si y est solution, alors $-y$ est aussi solution; $y = b$ (b vecteur constant) vérifie (1), quand :

$$\alpha^k_{ij}\,\varphi^i(x, b) = 0, \quad (k, j = 1, 2, \dots n \quad \forall x \in \mathcal{A}), \tag{27}$$

et si y est solution de (1), $y + b$ (b const.) sera une solution, quand :

$$\alpha^k_{ij}\,[\varphi^i(x, y + b) - \varphi^i(x, y)] = 0. \tag{28}$$

4. Nous allons considérer quelques exemples.

a) *Les algèbres de dimension deux* :

Soit e_1, e_2 une base d'algèbre $\mathcal{A}$ et α^k_{ij} $(i, j, k = 1, 2)$ les huit constantes de structure ; nous avons :

$$x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2, \quad y = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2; \quad F(x, y) = \varphi^1(\xi^1, \xi^2;\ \eta^1\ \eta^2)\,e_1 +$$
$$+ \varphi^2(\xi^1, \xi^2; \eta^1\ \eta^2)\,e_2,$$
$$Dy = F(x, y) * dx$$

Le système (2) est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^1}{\partial \xi^1} &= \alpha^1_{11}\varphi^1 + \alpha^1_{21}\varphi^2, & \frac{\partial \eta^1}{\partial \xi^2} &= \alpha^1_{12}\varphi^1 + \alpha^1_{22}\varphi^2, \\ \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi^1} &= \alpha^2_{11}\varphi^1 + \alpha^2_{21}\varphi^2, & \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi^2} &= \alpha^2_{12}\varphi^1 + \alpha^2_{22}\varphi^2. \end{aligned} \tag{29}$$

En désignant par :

$$\begin{aligned} d\omega^1_1 &= \alpha^1_{11}d\xi^1 + \alpha^1_{12}\,d\xi^2, \\ d\omega^1_2 &= \alpha^1_{21}d\xi^1 + \alpha^1_{22}\,d\xi^2, \\ d\omega^2_1 &= \alpha^2_{11}d\xi^1 + \alpha^2_{12}\,d\xi^2, \\ d\omega^2_2 &= \alpha^2_{21}d\xi^1 + \alpha^2_{22}\,d\xi^2, \end{aligned} \tag{30}$$

on a :

$$\begin{aligned} d\eta^1 &= \varphi^1\,d\omega^1_1 + \varphi^2\,d\omega^1_2, \\ d\eta^2 &= \varphi^1\,d\omega^2_1 + \varphi^2\,d\omega^2_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Quand (29) n'a pas des solutions, alors (31) est un système nonholonôme. Si le sistème est compatible , soient y et z deux solutions ; pour que $y + z$ soit aussi une solution, on doit avoir :

$$\alpha^k_{ij}u^i = 0, \quad (k, j = 1, 2), \tag{32}$$

avec :

$$u^i = \varphi^i(x, y + z) - \varphi^i(x, y) - \varphi^i(x, z), \quad (i = 1, 2). \tag{33}$$

Si le rang de la matrice :

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} \alpha^1_{11} & \alpha^1_{21} \\ \alpha^1_{12} & \alpha^1_{22} \\ \alpha^2_{11} & \alpha^2_{21} \\ \alpha^2_{12} & \alpha^2_{22} \end{vmatrix}$$

est deux, il en résulte : $u^i = 0$ $(i = 1, 2)$ et, par suite, φ^i sont des fonctions additives par rapport au second argument.

De plus, si : $\varphi^i(x, \lambda y) = \lambda \varphi^i(x, y)$ $(\forall\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R})$, les solutions de (29) constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

Dans ces conditions, $F(x, y)$ est linéaire en y ; par suite :

$$(35)\qquad \begin{aligned} \varphi^1 &= f^1_1(\xi^1\xi^2)\,\eta^1 + f^1_2(\xi^1, \xi^2)\,\eta^2, \\ \varphi^2 &= f^2_1(\xi^1\xi^2)\,\eta^1 + f^2_2(\xi^1, \xi^2)\,\eta^2. \end{aligned}$$

Les conditions d'integrabilité (3) fournissent quatre équations pour déterminer les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 :

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\alpha^1_{11}\frac{\partial f^1_1}{\partial \xi^2} - \alpha^1_{12}\frac{\partial f^1_1}{\partial \xi^1} + \alpha^1_{21}\frac{\partial f^2_1}{\partial \xi^2} - \alpha^1_{22}\frac{\partial f^2_1}{\partial \xi^1} + \Phi^1 = 0, \\ &\alpha^1_{11}\frac{\partial f^1_2}{\partial \xi^2} - \alpha^1_{12}\frac{\partial f^1_2}{\partial \xi^1} + \alpha^1_{21}\frac{\partial f^2_2}{\partial \xi^2} - \alpha^1_{22}\frac{\partial f^2_2}{\partial \xi^1} + \Phi^2 = 0, \\ &\alpha^2_{11}\frac{\partial f^1_1}{\partial \xi^2} - \alpha^2_{12}\frac{\partial f^1_1}{\partial \xi^1} + \alpha^2_{21}\frac{\partial f^2_1}{\partial \xi^2} - \alpha^2_{22}\frac{\partial f^2_1}{\partial \xi^1} + \Phi^3 = 0, \\ &\alpha^2_{11}\frac{\partial f^1_2}{\partial \xi^2} - \alpha^2_{12}\frac{\partial f^1_2}{\partial \xi^1} + \alpha^2_{21}\frac{\partial f^2_2}{\partial \xi^2} - \alpha^2_{22}\frac{\partial f^2_2}{\partial \xi^1} + \Phi^4 = 0. \end{aligned}$$

Les $\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4$ sont des formes quadratiques en $f^1_1, f^1_2, f^2_1, f^2_2$. Considérons l'algèbre des nombres complexes qui possède les constantes de structure:

$$\alpha^1_{11} = 1,\ \alpha^2_{11} = \alpha^1_{12} = \alpha^1_{21} = \alpha^2_{22} = 0,\ \alpha^2_{12} = \alpha^2_{21} = 1,\ \alpha^1_{22} = -1.$$

Nous avons :

$$(37)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \eta^1}{\partial \xi^1} = \varphi^1, \quad \frac{\partial \eta^1}{\partial \xi^2} = -\varphi^2, \\ &\frac{\partial \eta^2}{\partial \xi_1} = \varphi^2, \quad \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi^2} = \varphi^1. \end{aligned}$$

Les solutions de (37) doivent être des fonctions analytiques.

Dans le cas où :

$$(38)\qquad \begin{aligned} \varphi^1 &= f^1_1(\xi^1, \xi^2)\,\eta^1 + f^1_2(\xi^1, \xi^2)\,\eta^2, \\ \varphi^2 &= f^2_1(\xi, {}^1\xi^2)\,\eta^1 + f^2_2(\xi^1, \xi^2)\,\eta^2, \end{aligned}$$

il faut que les fonctions f^j_i accomplissent les conditions :

$$(39)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f^1_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f^2_1}{\partial \xi^1} + f^1_2 f^1_1 + f^2_2 f^2_1 = 0, \\ &\frac{\partial f^1_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f^2_2}{\partial \xi^1} + f^2_1 f^1_2 - f^1_1 f^2_2 + (f^1_2)^2 + f^2_2)^2 = 0, \\ &\frac{\partial f^2_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f^1_1}{\partial \xi_1} + f^1_1 f^2_2 - f^1_2 f^2_1 - (f^2_1)^2 - (f^1_1)^2 = 0, \\ &\frac{\partial f^2_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f^1_2}{\partial \xi^1} - f^2_1 f^2_2 - f^1_2 f^1_1 = 0. \end{aligned}$$

Dans les cas où φ^1, φ^2 dépendent seulement de ξ^1, ξ^2 (ou F est un opérateur), $F(x) = \varphi^1 e_1 + \varphi^2 e_2$, $F(x)$ doit, de même, être fonction analytique.

b) Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des quaternions réels.

Nous avons, ici, 64 constantes de structure. Si $F(x, y)$ est linéaire en y, c'est à dire :

$$F(x, y) = f^k_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\,\eta^i e_k.$$

les relations (3) fournissent 64 équations différentielles aux derivées partielles du premier ordre en $f^r_s (r, s, = 1, 2, 3, 4)$.

Pour le système (2), nous obtenons :

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \eta^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \eta^3}{\partial \xi^3} = \frac{\partial \eta^4}{\partial \xi^4} = f^1_1\,\eta^1 + f^1_2\,\eta^2 + f^1_3\,\eta^3 + f^4_1\,\eta^4,$$

et

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^h} = -\frac{\partial \eta^h}{\partial \xi^k}.\ (k \neq h).$$

Les solutions $\eta^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ sont des fonctions réelles en 4 variables ; pour un couple de deux variables elles sont analytiques.

c) Il existe des exemples d'algèbres $\mathcal{A}$ pour lesquelles les conditions (24), (25) sont vérifiées, sans que $\varphi^k(x, y)$ soient linéaires en y. Prenons une algèbre de dimension deux, avec les constantes de structure de sorte que ;

$$\alpha^1_{11} = -\alpha^1_{21},\quad \alpha^1_{12} = -\alpha^1_{22},\quad \alpha^2_{11} = -\alpha^2_{21},\quad \alpha^2_{12} = -\alpha^2_{22}$$

et pour les coordonnées de $F(x, y)$, les fonction :

$$\varphi^1(x, y) = f^1(x) + g^1\,{}^h y), \qquad \varphi^2(x, y) = f^1(x) + g^2(y),$$

$$g^1(y) - g^2(y) = h(y) \text{ où } h(y) \text{ est linéaire en } y.$$

On constate que les équations (24), (25) sont vérifiées et que les solutions de (1) constituent un espace vectoriel.

d) Soit :

$$(40)\qquad F(x, y) = A(x) \cdot B(y),$$

où $A(x)$ est un opérateur quelconque dans $\mathcal{A}$:

$$A(x) = \alpha^i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r) \cdot e_i$$

et $B(y)$ est un opérateur linéaire :

$$B(y) = \beta_i^h \eta^i e_h.$$

Les équations (2) deviennent :

$$\frac{\partial \eta^k}{\delta \xi^h} = \alpha_{th}^k \alpha_{il}^t \alpha^i \beta_s^l \eta^s. \tag{41}$$

Evidemment, l'ensemble de solutions de (1) a une structure d'espace linéaire.

Si l'on suppose de plus que $A(x)$ est lui aussi, linéaire, le système (2) prend la forme :

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^h} = \alpha_{th}^k \alpha_{il}^t \alpha_r^i \beta_s^l \xi^r \eta^s. \tag{42}$$

Les conditions d'intégrabilité s'écrivent :

$$\alpha_{il}^t \beta_s^l (\alpha_{th}^k \alpha_u^i - \alpha_{tu}^k \alpha_h^i) = 0. \tag{43}$$

lPour les opérateurs :

$$A(x) = (\alpha_{tu}^k \xi^u) e_k$$

es relations précédentes sont identiquement satisfaites.

D'une manière analogue on peut traiter le cas :

$$F(x, y) = \sum_{s=1}^{m} A_s(x) \cdot B_s(y),$$

avec $A_s(x)$ des opérateurs quelconques et $B_s(x)$ des opérateurs linéaires et aussi les cas où touts les $A_s(x)$, $B_s(y)$ sont linéaires.

Reçu le 24.XII.1977

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
R. S. Roumanie

BIBLIOGRAPHIE

Moisil Grigore C. — *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la Physique Mathématique.* Imprimerie F. Göbl Fils, S.A. Bucureşti, 1931.

Moisil Grigore C. — *Sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale şi numere hipercomplexe.* Analele Acad. R.S.R., secţ. şt. mat. fiz. chim. Seria A, T. II, memorial 14.

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, f. 2, s. I a, 1978

AN ATTEMPT TO A GENERAL THEORY OF ALGORITHMS

BY

C. CAZACU and M. CAZACU

1. Introduction. The algorithms present both structural and functional sides. Structurally, an algorithm is a system of related components. The relations between components determine the running of the algorithm. Functionally, leaving aside its structure, the algorithm may be considered as a function allowing, given a state, to compute a new state and take a decision. The components of an algorithm are in fact algorithms looked functionally. The functional and structural points of view are relative : sometimes we look the algorithms as functional things, other times they are structural things (flow-charts etc.). In Computer Science we meet frequently the above situation (see the concept of subroutine or structured programming).

Starting from these general ideas we introduce the functional and structural algorithms as mathematical notions. Some closure properties and simulation relations between sets of algorithms are emphasized. Finally, the universal algorithms and some of their properties are presented.

2. Preliminaries. Let M and N be sets. A *function* $f: M \to N$ is a subset $f \subset M \times N$ so that

$$\forall m_1 m_2 n_1 n_2 ((m_1, n_1) \in f \wedge (m_2, n_2) \in f \wedge m_1 = m_2 \Rightarrow n_1 = n_2).$$

The sets $\mathrm{Def}(f) = \{m / m \in M \wedge \exists n (m, n) \in f\}$ and $\mathrm{Val}(f) = \{n / n \in N \wedge \exists m (m, n) \in f\}$ are the *domain* and the *range* of f respectively. The function f is *total* if $\mathrm{Def}(f) = M$, *finite* if $\mathrm{Def}(f)$ is finite and *onto* if $\mathrm{Val}(f) = N$. If there is $n \in N$ so that $f(m) = n$ (that is, $(m, n) \in f$) then f is *defined* in m ($f(m) \downarrow$), otherwise f is *undefined* in m ($f(m) \uparrow$).

An equality $o_1 = o_2$ between two objects which may be undefined, for exemple $f(m) = g(m)$ where f and g are functions, means that both o_1 and o_2 are defined and equal or both o_1 and o_2 are undefined. An object built by total defined means, using, for this, partial defined things, will be considered defined iff all components of the construction are defined. For example, the pair $(a, f(b, g(c, d)))$ where f and g are functions, will be defined iff $a, b, c, d, g(c, d)$ and $f(b, g(c, d))$ are defined.

3. Functional and structural algorithms. Let S be a set of *states* and D a set of *decisions*. *A functional algorithm* on S is a function $A: S \to S \times D$ for which the set $\{d / d \in D \wedge \exists s_1 s_2 A(s_1) = (s_2, d)\}$ is finite. The algorithm A defines a *transformation function* $A^\tau: S \to S$ and a *decision function* $A^\delta: S \to D$ as follows. If $A(s) \downarrow$ then $A^\tau(s) \downarrow$, $A^\delta(s) \downarrow$ and