Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, f. 2, s. I a, 1978

EQUATIONS NON LINEAIRES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE STURM-LIOUVILLE

PAR

LAURENT VERON

Introduction. Dans cet article nous nous proposons de généraliser des résultats de V. Barbu [2], H. Brézis [3], N. Pavel [5] et [6] et L. Véron [7] concernant les équations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs maximaux monotones d'un espace de Hilbert réel H.

Le type d'équations que nous étudions est le suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} p(t)\,u''(t) + q(t)\,u'(t) \in Au(t) + f(t) \text{ p.p. sur } [0, T] \\ u'(0) \in \beta_1(u(0) - a)\,; \; -u'(T) \in \beta_2(u(T) - b) \end{cases}$$

où p et q sont des fonctions réelles, f une fonction à valeur dans H, A, β_1 et β_2 des opérateurs maximaux monotones de H.

De nombreux résultats ont été obtenus par les auteurs pré-cités, les plus récents étant ceux de N. Pavel [5] qui traite l'équation (1) avec $p = 1$ et $q = 0$; nous utiliserons d'ailleurs certaines de ses méthodes.

1. Preliminaires et notations. Soit H un espace de Hilbert réel dont le produit scalaire et la norme sont notés $(.\,,.)$ et $\|\,.\,\|$ respectivement. Si A est un sous-ensemble de $H \times H$, nous définissons

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax = \{y : [x, y] \in A\}\,, \\ D(A) = \{x : Ax \neq \varnothing\}\,, \\ R(A) = \cup\,\{Ax : x \in D(A)\}\,. \end{cases}$$

Pour simplifier, nous parlerons de l'opérateur A de domaine $D(A) \subset H$ à valeurs dans l'ensemble des parties de H.

L'opérateur A est dit monotone si

$$(3)\qquad \forall\, [x, y], [x', y'] \in A,\ (x - x',\ y - y') \geqslant 0$$

Il est maximal monotone si, en outre, $\forall \lambda > 0$, $R(I + \lambda A) = H$ où I désigne l'identité dans H.

On appelle résolvante de l'opérateur maximal monotone $A : J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ et régularisée Yosida de $A : A_\lambda = \lambda^{-1}(I - J_\lambda)$.

Nous rappelons ici quelques propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones (Cf. H. Brézis [4]).

Théorème 1.1. *Soient A un opérateur maximal monotone de H et $\lambda > 0$ alors :*

i) $\| J_\lambda x - J_\lambda y \| \leqslant \| x - y \|$, $\forall x, y \in H$.

i) *A_λ est maximal monotone, partout défini et lipschitzien de rapport $1/\lambda$,*

iii) $A_\lambda x \in A J_\lambda x \quad \forall x \in H$.

iv) *Ax est un sous-ensemble convexe fermé de H dont l'élément de norme minimale est noté $A^0 x$, $\forall x \in D(A)$.*

v) *A est fermé dans $H \times H$-faible, c'est-à-dire que si $\{x_n, y_n\}$ est une suite de $H \times H$ telle que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x et $\{y_n\}$ converge faiblement vers y lorsque n tend vers l'infini, alors :*

$$[x_n, y_n] \in A, \ \forall n \Rightarrow [x, y] \in A.$$

Un opérateur A est dit fortement monotone si il existe $\omega > 0$ tel que $A - \omega I$ soit monotone.

Nous aurons en outre besoin du résultat suivant (Cf. H. Brézis [4]).

Proposition 1.2. i) *Soient A un opérateur maximal monotone et B un opérateur monotone lipschitzien de H, alors $A + B$ est maximal monotone.*

ii) *Soit A un opérateur maximal monotone de H, fortement monotone, alors A est surjectif.*

Nous utiliserons aussi les espaces de Lebesgue et de Sobolev usuels ou à valeurs dans H : $L^2(0, T; H)$ est l'espace des classes de fonctions $u : (0, T) \to H$, mesurables, vérifiant :

$$\| u \|^2_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \| u(t) \|^2 \, dt < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(t), v(t)) \, dt.$$

Pour k entier, on définit $H^k(0, T; H)$, le sous-espace des distributions vectorielles $\mathcal{D}'(0, T; H)$, telles que pour $j \leqslant k$, $u^{(j)} \in L^2(0, T; H)$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0, T; H)} = \sum_{j=0}^{k} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0, T; H)}.$$

Les fonctions de $H^k(0, T; H)$ sont, après modification sur un ensemble de mesure nulle, continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $k - 1$.

Nous utiliserons enfin les espaces $W^{m,p}(0, T)$, $m \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ formés des fonctions u de classe C^{m-1}, telles que $u^{(m)} \in L^p(0, T)$.

Si A est un opérateur maximal monotone de H, son prolongement canonique $\mathcal{A}$ à $L^2(0, T; H)$ est un opérateur maximal monotone de $L^2(0, T; H)$ (Cf. H. Brézis [4]).

2. Un résultat préliminaire. Soit σ une fonction de $H^1(0, T)$ vérifiant

$$\sigma(t) \geqslant \alpha > 0, \quad \forall t \in [0, T], \tag{4}$$

pour a et b dans H, nous définissons l'opérateur $\mathcal{B}$ dans $L^2(0, T; H)$ par

$$\begin{cases} D(\mathcal{B}) = \{u \in H^2(0, T; H) : u'(0) \in \beta_1(u(0) - a); -u'(T) \in \beta_2(u(T) - b)\}, \\ \forall u \in D(\mathcal{B}), \ \mathcal{B}u = -(\sigma u')' \end{cases} \tag{5}$$

Proposition 2.1. *L'opérateur $\mathcal{B}$ est maximal monotone dans $L^2(0, T; H)$.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est monotone ; en effet, si u et v sont dans $D(\mathcal{B})$, on a, en effectuant le produit dans $L^2(0, T; H)$

$$(\mathcal{B}u - \mathcal{B}v, u - v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \sigma \| u' - v' \|^2 \, dt - \Big[\sigma(u - v, u' - v')\Big]_0^T \geqslant 0.$$

La preuve de la maximalité est plus longue et suit une idée de M. Crandall ; nous aurons besoin de plusieurs lemmes intermédiaires.

Lemme 2.2. *Pour tout f dans $L^2(0, T; H)$, il existe une unique fonction w dans $H^2(0, T; H)$ vérifiant*

$$w - (\sigma w')' = f \quad \text{p.p. sur } [0, T]. \quad w(0) = w(T) = 0. \tag{6}$$

Démonstration. Il s'agit d'une application immédiate du théorème de Lax et Milgram, compte tenu des hypothèses faites sur σ. La régularité de w s'obtient en développant $(\sigma w')'$.

Considérons maintenant les équations suivantes

$$\varphi - (\sigma\varphi')' = 0, \quad \text{p.p. sur } [0, T], \quad \varphi(0) = 0, \ \varphi(T) = 1, \tag{7}$$

$$\psi - (\sigma\psi')' = 0, \quad \text{p.p. sur } [0, T], \quad \psi(0) = -1, \ \psi(T) = 0. \tag{8}$$

Lemme 2.3. *Les équations (7) et (8) admettent chacune une unique solution, soient φ et ψ respectivement, élément de $H^2(0, T)$ et fonction monotone croissante.*

Démonstration. Nous ferons la démonstration pour l'équation (7), celle de (8) étant identique.

Posons $h = -\dfrac{t}{T} + \dfrac{1}{T}\sigma'$ et soit $\varkappa$ la solution (cf. Lemme 2.2) de

$$\varkappa - (\sigma\varkappa')' = h \quad \text{p.p. sur } [0, T], \quad \varkappa(0) = \varkappa(T) = 0 \tag{9}$$

Considérons $\varphi = \varkappa + t/T$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(T) = 1$ et $\varphi - (\sigma\varphi')' = \varkappa - (\sigma\varkappa')' + t/T - 1/T\,\sigma' = 0$, d'où l'existence de φ élément de $H^2(0, T)$; l'unicité est immédiate. En multipliant par φ l'équation (7) et en intégrant, nous avons

$$\int_0^t \varphi^2 \, ds + \int_0^t \sigma\varphi'^2 \, ds = \sigma(t)\,\varphi(t)\,\varphi'(t), \tag{10}$$

donc $\varphi(t)\,\varphi'(t) > 0$ et φ^2 est strictement croissante ; comme $\varphi(T) = 1$, on en déduit que φ est strictement croissante.

On pose

$$(11)\qquad m = \int_0^T \varphi(t)\,dt,\ m > 0,\ m' = \int_0^T \psi(t)\,dt, \qquad m' < 0.$$

En reprenant l'égalité (10), on voit que $\varphi'(T) > 0$, de même $\psi'(0) > 0$ et par suite il existe $\delta > 0$ tel que

$$(12)\qquad \delta\sigma(0)\,\psi'(0) = \sigma(T)\,\varphi'(T)$$

Conventions d'harmonisation. 1) La fonction $\tilde{\psi} = \delta\psi$ vérifie l'équation

$$(13)\qquad \begin{cases} \tilde{\psi} - (\sigma\tilde{\psi}')' = 0, & \text{p.p. sur } [0, T], \\ \tilde{\psi}(0) = -\delta, & \tilde{\psi}(T) = 0 \end{cases}$$

2) En multipliant les graphes β_1 et β_2 par $\sigma(0)$ et $\sigma(T)$ respectivement, on voit qu'on ne change pas la nature du problème en imposant dans la définition de $\mathcal{B}$

$$(14)\qquad \sigma(0)\,u'(0) \in \beta_1(u(0) - a)\,;\ -\sigma(T)\,u'(T) \in \beta_2(u(T) - b).$$

On va maintenant chercher une solution de l'équation

$$(15)\qquad u + \mathcal{B}u = f,$$

sous la forme

$$(16)\qquad u(t) = w(t) + \varphi(t)\,x + \tilde{\psi}(t)\,y$$

où x et y sont à déterminer dans H. Par (16) on a

$$(17)\qquad u(0) = -\delta y,\ u(T) = x$$

et

$$(18)\qquad \begin{cases} \sigma(0)\,u'(0) = \sigma(0)\,w'(0) = \sigma(0)\,\varphi'(0)\,x + \sigma(0)\,\tilde{\psi}'(0)\,y \\ \sigma(T)\,u'(T) = \sigma(T)\,w'(T) = \sigma(T)\,\varphi'(T)\,x + \sigma(T)\,\tilde{\psi}'(T)\,y \end{cases}$$

En outre

$$u - (\sigma u')' = w - (\sigma w')' + (\varphi - (\sigma\varphi')')\,x + (\tilde{\psi} - (\sigma\tilde{\psi}')')\,y,$$

donc $u - (\sigma u')' = f$. Pour assurer les conditions aux limites, il faut

$$(19)\qquad \begin{cases} \sigma(0)\,w'(0) + \sigma(0)\,\varphi'(0)\,x + \sigma(0)\,\tilde{\psi}'(0)\,y \in \beta_1(-\delta y - a), \\ -\sigma(T)\,w'(T) - \sigma(T)\,\varphi'(T)\,x - \sigma(T)\tilde{\psi}'(T)\,y \in \beta_2(x - b). \end{cases}$$

Si on définit dans $H \times H$, F_1 et F_2 par

$$F_1(y) = -\beta_1(-\delta y - a)\,;\ F_2(x) = \beta_2(x - b) \text{ et } F(x, y) = (F_2(x), F_1(y)),$$

il est immédiat de vérifier que F est maximal monotone.
Définissons maintenant dans $H \times H$ l'opérateur T par

$$(20)\qquad T((x, y)) = (\sigma(T)\,\tilde{\psi}'(T)\,y + \sigma(T)\,\varphi'(T)\,x,\ \sigma(0)\,\tilde{\psi}'(0)\,y + \sigma(0)\,\varphi'(0)\,x).$$

Lemme 2.4. *L'opérateur linéaire T est continu fortement monotone dans $H \times H$.*

Démonstration. On a immédiatement la linéarité et la continuité.

$$(T((x, y)), (x, y)) = \sigma(T)\,\varphi'(T)\,\|x\|^2 + \sigma(0)\,\tilde{\psi}'(0)\,\|y\|^2 + \dots + (\sigma(T)\,\tilde{\psi}'(T) + \sigma(0)\,\varphi'(0))\,(x, y).$$

Posons

$$(21)\qquad \begin{cases} \alpha = \sigma(T)\,\varphi'(T) = \sigma(0)\,\tilde{\psi}'(0), \\ \beta = \sigma(T)\,\tilde{\psi}'(T), \quad \gamma = \sigma(0)\,\varphi'(0). \end{cases}$$

$$(T((x, y)), (x, y)) \geqslant \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right)(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

et on a

$$\alpha - \beta = \sigma(T)\,\varphi'(T) - \sigma(0)\,\varphi'(0) = \int_0^T \varphi(s)\,ds = m > 0,$$

$$\alpha - \gamma = \sigma(0)\,\tilde{\psi}'(0) - \sigma(T)\,\tilde{\psi}'(T) = -\delta\int_0^T \tilde{\psi}(s)\,ds = -\delta\,m' > 0,$$

d'où

$$(T((x, y)), (x, y)) \geqslant \frac{1}{2}(m - \delta m')(\|x\|^2 + \|x\|^2).$$

m et m' définis en (11), d'où le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 2.1.
L'équation (19) équivaut donc à

$$(T + F)((x, y)) \ni (-\sigma(T)\,w'(T),\ -\sigma(0)\,w'(0)).$$

Or l'opérateur T est monotone lipschitzien, fortement monotone et l'opérateur F est maximal monotone, donc leur somme est maximale monotone surjective dans $H \times H$, d'où le résultat.

3. Les résultats principaux. Soient p et q des fonctions appartenant à $W^{2,\infty}(0, T)$ et $W^{1,\infty}(0, T)$ respectivement, la fonction p vérifiant en outre

$$(22)\qquad p(t) \geqslant \alpha > 0 \qquad \forall\, t \in [0, T],$$

et A un opérateur maximal monotone de H lié aux β_i par

$$(23)\qquad \begin{cases} \forall\,\lambda > 0, \quad \forall\, x, y, \quad \forall\, z \in \beta_i(x - y),\ i = 1, 2 \\ (A_\lambda x - A_\lambda y, z) \geqslant 0 \end{cases}$$

et on suppose, pour simplifier, que $0 \in \beta_i(0)$, $i = 1, 2$.

Théorème 3.1. *Si on suppose que l'opérateur $A - \omega I$ ($\omega > 0$) est monotone, alors pour tout f dans $L^2(0, T\,;\,H)$ et tout (a, b) dans $D(A)$, il existe une unique fonction u dans $H^2(0, T\,;\,H)$ vérifiant*

$$(24)\qquad \begin{cases} p(t)\,u''(t) + q(t)\,u'(t) \in Au(t) + f(t) & \text{p.p. sur } (0, T) \\ u'(0) \in \beta_1(u(0) - a)\,;\ -u'(T) \in \beta_2(u(T) - b)\,; \\ u(t) \in D(A) & \text{p.p. sur } (0, T). \end{cases}$$

Démonstration. Unicité — Posons pour $t \geq 0$, $\sigma(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{q(s) - p'(s)}{p(s)}\, ds\right)$; pour toute fonction dérivable φ, nous avons :

$$\frac{1}{\sigma}(p\,\sigma\,\varphi)' = p\varphi' + q\varphi.$$

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (24) et $w = u_1 - u_2$; par monotonie, nous obtenons

$$\int_0^T ((\sigma\, p\, w')',\ w)\, dt \geq \omega \int_0^T \sigma \| w \|^2\, dt$$

et l'intégrale de droite vaut

$$-\int_0^T \sigma\, p \| w' \|^2 + [\sigma\, p\, (w',\ w)]_0^T \geq 0,$$

d'où l'unicité.

Existence — Nous aurons besoin pour cela de quelques résultats intermédiaires. Pour $\lambda > 0$, on considère l'équation différentielle

$$(25) \qquad \begin{cases} -(p\,\sigma\,u_\lambda')' + \sigma A_\lambda u_\lambda + \sigma f = 0 & \text{p.p. sur } [0, T], \\ u_\lambda'(0) \in \beta_1(u_\lambda(0) - a)\,; \quad -u_\lambda'(T) \in \beta_2(u_\lambda(T) - b), \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous forme fonctionnelle dans $L^2(0, T\,; H)$

$$(26) \qquad \mathcal{B}u_\lambda + \sigma\mathcal{A}_\lambda u_\lambda + \sigma f = 0,$$

où a_λ est le prolongement canonique de A_λ à $L^2(0, T\,; H)$. Comme $A - \omega I$ est monotone, $A_\lambda - [\omega/(1 + \lambda\omega)]\, I$ est monotone (cf. [5]) et par suite l'opérateur $\sigma\mathcal{A}_\lambda$ est lipschitzien et fortement monotone dans $L^2(0, T\,; H)$ et l'équation (24) admet une unique solution (cf. [3]).

Lemme 3.2. *Les fonctions u_λ demeurent bornées dans $H^2(0, T\,; H)$ indépendamment de $\lambda > 0$.*

Démonstration. Soit v la solution dans $H^2(0, T\,; H)$ du problème de V. Barbu [2]

$$(27) \qquad v''(t) \in Av(t) \qquad \text{p.p. sur } [0, T] \quad v(0) = a,\ v(T) = b$$

Multiplions (25) par $u_\lambda - v$, nous obtenons en intégrant

$$[-p\sigma(u_\lambda', u_\lambda - v)]_0^T + \int_0^T p\sigma(u_\lambda', u_\lambda' - v')\, dt + \int_0^T \sigma(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda - v)\, dt + \int_0^T \sigma(f, u_\lambda - v)\, dt = 0$$

or $[-p\sigma(u_\lambda', u - v)]_0^T = -p\sigma(u_\lambda'(T), u_\lambda(T) - b) + p\sigma(u_\lambda'(0), u_\lambda(0) - a)$.

Comme $-u_\lambda'(T) \in \beta_2(u_\lambda(T) - b)$, $u_\lambda'(0) \in \beta_1(u_\lambda(0) - a)$ et $0 \in \beta_i(0)$, l'expression entre crochets est positive, d'où

$$\int_0^T p\sigma \| u_\lambda' - v' \|^2\, dt + \frac{\omega}{1 + \lambda\omega} \int_0^T \sigma \| u_\lambda - v \|^2\, dt \leq$$

$$-\int_0^T p\sigma(v', u_\lambda' - v')\, dt \ldots - \int_0^T \sigma(A_\lambda v, u_\lambda - v)\, dt - \int_0^T \sigma(f, u_\lambda - v)\, dt$$

or v' est dans $H^1(0, T\,; H)$ et $\| A_\lambda v \| \leq \| A^0 v \| \leq \| v'' \|$ p.p. et par suite, en appliquant Cauchy-Schwartz, il existe c indépendant de λ tel que

$$\| u_\lambda - v \|_{H^1(0,T\,;H)} \leq c\,(\| f \|_{L^2(0,T\,;H)} + \| v' \|_{H^1(0,T\,;H)})$$

Multiplions (25) par $A_\lambda u_\lambda - \psi$ où ψ est une fonction de classe C^1 de $[0, T]$ dans H valant $A_\lambda a$ en 0 et $A_\lambda b$ en T, et intégrons

$$[-p\sigma(u_\lambda', A_\lambda u_\lambda - \psi)]_0^T + \int_0^T p\sigma(u_\lambda', (A_\lambda u_\lambda - \psi)')\, dt +$$

$$+ \int_0^T \sigma(A_\lambda u_\lambda, A_\lambda u_\lambda - \psi)\, dt + \ldots + \int_0^T \sigma(f, A_\lambda u_\lambda - \psi)\, dt = 0.$$

Le terme entre crochets vaut $-p\sigma(u_\lambda'(T), A_\lambda u_\lambda(T) - A_\lambda b) + \ldots$ $p\sigma(u_\lambda'(0), A_\lambda u_\lambda(0) - A_\lambda a)$.

Or $-u_\lambda'(T) \in \beta_2(u_\lambda'(T) - a)$ et $u_\lambda'(0) \in \beta_1(u_\lambda(0) - a)$. Compte tenu de (23), la contribution du crochet est positive.

En outre $\int_0^T p\sigma(u_\lambda', (A_\lambda u_\lambda)' - \psi')\, dt \geq -\int_0^T p\sigma(u_\lambda', \psi')\, dt$, d'où

$$\int_0^T \sigma \| A_\lambda u_\lambda - \psi) \|^2\, dt \leq \int_0^T p\sigma(u_\lambda', \psi')\, dt - \int_0^T \sigma(f + \psi, A_\lambda u_\lambda - \psi)\, dt$$

et par suite $A_\lambda u_\lambda$ demeure borné dans $L^2(0, T\,; H)$ indépendamment de λ et il en est de même de u_λ'', d'où le lemme.

Démonstration du théorème 3.1. Il s'agit d'un raisonnement bien connu (cf. [7] par ex.) que nous allons rappeler. Pour λ et $\mu > 0$, soient u_λ et u_μ les solutions de $(26)_\lambda$ et $(26)_\mu$. Nous avons

$$\int_0^T (\mathcal{B}u_\lambda - \mathcal{B}u_\mu,\ u_\lambda - u_\mu)\, dt + \int_0^T \sigma(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu,\ \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)\, dt = 0$$

d'où

$$\int_0^T \sigma p \| u_\lambda' - u_\mu' \|^2\, dt + \omega \int_0^T \sigma \| J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu \|^2\, dt \leq C(\lambda + \mu)$$

où C est une constante indépendante de λ et μ. Comme $u_\lambda = \lambda A_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda$, on en déduit que la suite u_λ est de Cauchy dans $H^1(0, T\,; H)$, bornée dans $H^2(0, T\,; H)$; soit u la limite de cette suite. En utilisant la fermeture faible de $\sigma\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $L^2(0, T; H)$, on en déduit que $\mathcal{B}u_\lambda$ converge faiblement vers $\mathcal{B}u$, que $\sigma\mathcal{A}_\lambda u_\lambda$ converge faiblement vers un élément w dans $\sigma\mathcal{A}u$ et que l'on a à la limite

$$\mathcal{B}u + w + \sigma f = 0$$

d'où le théorème.

Dans le cas d'un opérateur A maximal monotone non fortement monotone, nous sommes obligés de faire une hypothèse supplémentaire

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \| \beta_1^0(x) \| = +\infty \text{ ou } \lim_{\|x\| \to +\infty} \| \beta_2^0(x) \| = +\infty \tag{28}$$

Sous cette hypothèse et les β_i vérifiant toujours la relation de compatibilité (23) on a le

Théorème 3.2. *Pour tout f dans $L^2(0, T; H)$ et tout (a, b) dans $D(A)$, il existe au moins une fonction u dans $H^2(0, T; H)$ solution de l'équation* (24).

Démonstration. Pour $\omega > 0$, soit u_ω la solution de

$$\mathcal{B}u + \sigma\mathcal{A}u + \omega\sigma u + f \ni 0. \tag{29}$$

En reprenant la démonstration du lemme 3.2 on voit que u'_ω demeure borné dans $H^1(0, T; H)$ indépendamment de ω puisque la solution v_ω du problème de V. Barbu

$$\begin{cases} v''_\omega \in Av_\omega + \omega v_\omega & \text{p.p. sur } [0, T] \\ v_\omega(0) = a, \quad v'_\omega(T) = b, \end{cases} \tag{30}$$

demeure bornée dans $H^2(0, T; H)$ indépendamment de ω (Cf. V. Barbu [2]).

Comme u'_ω demeure borné dans $H^1(0, T; H)$, il en est de même dans $C([0, T]; H)$. Supposons que $\lim_{\|x\| \to +\infty} \| \beta_1^0(x) \| = +\infty$. Comme $u'_\omega(0) \in \beta_1(u'_\omega(0) - a)$ et que $u'_\omega(0)$ est borné, il en est de même de $u_\omega(0)$ et par suite u_ω demeure borné dans $H^2(0, T; H)$.

Pour ω et $\eta > 0$, on a à partir des équations (29)

$$\int_0^T (\mathcal{B}u_\omega - \mathcal{B}u_\eta, u'_\omega - u'_\eta)dt + \int_0^T \sigma(\mathcal{A}u'_\omega - \mathcal{A}u'_\eta, u_\omega - u_\eta) + \\ + \int_0^T \sigma(\omega u_\omega - \eta u_\eta, u_\omega - u_\eta)\, dt = 0,$$

et par suite $\int_0^T \sigma p \| u'_\omega - u'_\eta \|^2 dt \leqslant M(\omega + \eta)$ et le filtre $\{u'_\omega\}$ est de Cauchy dans $L^2(0, T; H)$, soit ω sa limite. On peut alors extraire une suite $\{u'_{\omega_n}\}$ telle que $u'_{\omega_n}(t_0)$ converge vers $\omega(t_0)$ $(t_0 \in [0, T])$ et comme

$$[\| u'_{\omega_n} - u'_{\omega_m} \|^2]_{t_0}^t = 2\int_{t_0}^t (u'_{\omega_n} - u'_{\omega_m}, u''_{\omega_n} - u''_{\omega_m})\, dt,$$

on en déduit que $\{u'_{\omega_n}\}$ converge vers w uniformément sur $[0, T]$ et $w \in H^1(0, T; H)$.

Comme $\{u_{\omega_n}(0)\}$ est borné, on peut extraire de cette suite une sous-suite que l'on notera encore $\{u_{\omega_n}(0)\}$ telle que cette sous-suite converge dans H-faible vers un élément de x. Or on a

$$u_{\omega_n}(t) = u_{\omega_n}(0) + \int_0^t u'_{\omega_n}(s)\, ds,$$

d'où à la limite, il existe une fonction $t \to u(t)$ telle que $u(t) = x + \int_0^t w(s)ds$ et par suite $u' = w$ et $u(0) = x$.

En utilisant la proposition 1.2 et la maximalité de β_1 et β_2, on en déduit que $u \in D(\mathcal{B})$ et que $\{\mathcal{B}u_{\omega_n}\}$ converge vers $\mathcal{B}u$ dans $L^2(0, T; H)$-faible.

Il reste maintenant à passer à la limite dans l'équation (29) ; pour cela, considérons $[\alpha, \beta] \in \sigma\mathcal{A}$, on a par monotonie

$$(\beta + \sigma f + \mathcal{B}u_{\omega_n} - \sigma\omega_n u_{\omega_n}, \alpha - u'_{\omega_n})_{L^2(0,T;H)} \geqslant 0, \text{ c'est-à-dire}$$

$$(\beta + \sigma f - \sigma\omega_n u_{\omega_n}, \alpha - u_{\omega_n})_{L^2(0,T;H)} + (\mathcal{B}u'_{\omega_n}, \mathcal{A})_{L^2(0,T;H)} \geqslant \ldots \geqslant (\mathcal{B}u'_{\omega_n}, u_{\omega_n})_{L^2(0,T;H)}$$

Le terme de gauche de l'inégalité précédente converge vers

$$(\beta + \sigma f, \alpha - u)_{L^2(0,T;H)} + (\mathcal{B}u, \alpha)_{L^2(0,T;H)}.$$

Quant au terme de droite, sa valeur est

$$\int_0^T \sigma p \| u'_{\omega_n} \|^2 dt - [\sigma p(u'_{\omega_n}, u_{\omega_n})]_0^T,$$

qui converge vers $\int_0^T \sigma p \| u' \|^2 dt - [\sigma p(u', u)]_0^T = (\mathcal{B}u, u)_{L^2(0,T;H)}$

On obtient donc : $\forall [\alpha, \beta] \in \sigma a$

$$(\beta + \sigma f + \mathcal{B}u, \alpha - u)_{L^2(0,T;H)} \geqslant 0. \tag{30}$$

Comme $\sigma\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $L^2(0, T; H)$, on a $-\sigma f - \mathcal{B}u \in \sigma\mathcal{A}u$, d'où le théorème.

Remarque 3.4. Le théorème 3.3 nous assure l'existence, mais non l'unicité des solutions de l'équation (24). En reprenant la démonstration d'unicité du théorème 3.1, on voit que sous les hypothèses du théorème 3.3, deux solutions de (24) ne diffèrent que d'une constante C. Cependant, si l'un des opérateurs A, β_1 ou β_2 est univoque et injectif, alors la solution u est unique.

On peut en outre améliorer la convergence de la suite $\{u_{\omega_n}\}$ si l'opérateur β_1 est d'inverse β_1^{-1} continu. Sous cette hypothèse supplémentaire $\{u_{\omega_n}\}$ converge vers u dans $C^1([0, T]; H)$.

Remarque 3.5. La relation (23) de compatibilité peut paraître difficile à vérifier. Si x et y appartiennent à $D(A)$, elle entraîne

$$(A^0x - A^0y, z) \geqslant 0, \quad \forall z \in \beta_i(x - y). \tag{31}$$

Considérons l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} \forall\lambda > 0, \ \forall(x, y) \in D(\beta_i), \ i = 1, 2, \\ x - y \in D(\beta_i) \Rightarrow J_\lambda x - J_\lambda y \in D(\beta_i), \end{cases} \tag{32}$$

alors si on a aussi :

$$(33)\qquad \forall\,[x,X]\in A,\ [y,Y]\in A,\ x-y\in D(\beta_i),\ \forall z\in\beta_i(x-y),\quad (X-Y,z)\geqslant 0,$$

on en déduit (23). En effet : $A_\lambda x\in AJ_\lambda x$, $A_\lambda y\in AJ_\lambda y$; soit $t\in\beta_i(J_\lambda x-J_\lambda y)$, on a $(A_\lambda x-A_\lambda y,z)=(A_\lambda x-A_\lambda y,t)+(A_\lambda x-A_\lambda y,z-t)$, d'après (33) $(A_\lambda x-A_\lambda y,t)\geqslant 0$; en outre

$$A_\lambda x-A_\lambda y=\frac{1}{\lambda}\{x-y-(J_\lambda x-J_\lambda y)\}$$

par monotonie de β_i, on en déduit $(A_\lambda x-A_\lambda y,z-t)\geqslant 0$, d'où (23).

4. Exemple. Soit Ω un ouvert borné régulier de R^N et j une application de $\Omega\times\mathrm{R}^N$ dans R, vérifiant

h1 Pour presque tout $x\in\Omega$, $s\to j(x,s)$ est une application convexe continue de R^N dans R et $j(x,0)=0$.

h2 $\forall s\in\mathrm{R}^N$, $j(.,s)\in L^1(\Omega)$ et il existe deux constantes positives C_1 et C_2 et une fonction C_0 de $L^1(\Omega)$ telles que $\forall(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\forall s\in\mathrm{R}^N$

$$j(x,s)\leqslant C_1\{j(y,s)+C_0(x)+C_0(y)+C_2|s|_N\},$$

où $|\,.\,|_N$ désigne la norme euclidienne dans R^N.

h3 Il existe deux constantes $C_1>0$, $q>1$ et une fonction C_0 de $L^1(\Omega)$ telle que : $\forall x\in\Omega$, $\forall s\in\mathrm{R}^N$

$$j(x,s)+C_0(x)\geqslant C_1|s|_N^q$$

On définit alors J par

$$(34)\qquad J(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega j(x,\operatorname{grad}u)\,dx & \text{si}\begin{cases}u\in W_0^{1,1}(\Omega)\\ j(x,\operatorname{grad}u)\in L^1(\Omega)\end{cases}\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases}$$

J est une fonction convexe s.c.i. dans $L^2(\Omega)$ (Cf. H. Attouch et A. Damlamian [1]) dont le sous-différentiel ∂J est donné par

$$f\in\partial J(u)\Leftrightarrow u\in W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega),\ \exists g\in(L^1(\Omega))^N,\ \operatorname{div}g\in L^2(\Omega),$$

$$\int(u\,.\operatorname{div}g+g\,.\operatorname{grad}u)\,dx=0\ \text{ et}$$

$$(35)\qquad\begin{cases}g(x)\in\partial j(x,\operatorname{grad}u(x)) & \text{p.p. sur }\Omega,\\ f(x)=-\operatorname{div}g(x) & \text{p.p. sur }\Omega.\end{cases}$$

Par suite on notera $f(x)\in-\operatorname{div}\partial j(x,\operatorname{grad}u(x))$.

Soient β_1 et β_2 deux fonctions monotones croissantes telles que $\beta_i(0)=0$ et $\tilde\beta_1$ et $\tilde\beta_2$ leurs prolongements à $L^2(\Omega)$ comme opérateurs maximaux monotones.

Par troncature et régularisation des β_i, on vérifie comme dans [1] que $\forall u_1,u_2\in D(J):u_1-u_2\in D(\tilde\beta_i)$, $\forall f_1\in\partial Ju_1$, $\forall f_2\in\partial Ju_2$

$$(36)\qquad\int_\Omega(f_1(x)-f_2(x)\,\beta_i(u_1(x)-u_2(x))\,dx\geqslant 0\qquad(i=1,2).$$

Par suite en utilisant un résultat de H. Brézis [4] et le fait que $D(\partial J)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (Cf. [1]) on en déduit que $\forall u_1,u_2\in D(J):u_1-u_2\in D(\tilde\beta_i)$, si $(\partial J)_\lambda$ désigne la régularisée Yosida de ∂J, on a :

$$(37)\qquad\int_\Omega((\partial J)_\lambda u_1-(\partial J)_\lambda u_2)\,\beta_i(u_1-u_2)\,dx\geqslant 0.$$

Soient p et q des fonctions de $W^{2,\infty}(0,T)$ et $W^{1,\infty}(0,T)$ respectivement, p vérifiant (22), on a alors le

Théorème 4.1. *Pour toute fonction f dans $L^2((0,T)\times\Omega)$ et tout couple (a,b) de $D(\partial J)$, il existe au moins un couple de fonctions (u,g) tel que*

$$(38)\qquad\begin{cases}u\in H^2(0,T;L^2(\Omega)),\ g(.,t)\in(L^1(\Omega))^N & \text{p.p. sur }(0,T)\\ \operatorname{div}g\in L^2(0,T\times\Omega),\ g(x,t)\in\partial j(x,\operatorname{grad}.u(x,t)) & \text{p.p. sur }\Omega\times(0,T)\\ p(t)\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}(x,t)+q(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\operatorname{div}g(x,t)=f(x,t) & \\ \qquad\text{p.p. sur }\Omega\times(0,T) & \\ u(x,t)=0 & \text{p.p. sur }\partial\Omega\times(0,T)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\beta_1(u(x,0)-a(x))\,;\ -\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T)=\beta_2(u(x,T)-b(x)) & \\ \qquad\text{p.p. sur }\Omega & \end{cases}$$

Si l'une des fonctions β_i est strictement monotone, u est unique.

BIBLIOGRAPHIE

1. Attouch H. et Damlamian A. — *Applications des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi-linéaires*, Orsay 1976.
2. Barbu V. — *A class of boundary value problems for second order abstract differential equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1 A math. 19 (1972).
3. Brézis H. — *Equations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs monotones*, Israel J. Math. 12 (1972).
4. Brézis H. — *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam (1973).
5. Pavel N. — *Mixed boundary value problems for second order differential equations with monotone operators*, Iași (1975).
6. Pavel N. — *Nonlinear boundary value problems for second order differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 50 (1973).
7. Véron L. — *Equations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs maximaux monotones*, Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, 75 A 11 (1975).

Reçu le 27.14.1978

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
37 200 Tours, France