Therefore in this case, the problem (4) is a linear programming problem (if we also take $V = \{v \in R^n, \mid v_i \mid \leqslant 1, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$). The algorithm is especially efficient for nonlinear programming problems of the form

$$\min_{x,y} \{f(x, y) / g(x, y) \leqslant 0, \ h(x, y) = 0\}, \tag{25}$$

which are relatively easy to solve when y is fixed. For example if f, g and h are linear with respect to x, then it is natural to consider the equivalent problem of minimization of

$$J(y) = \min_{x} \{f(x, y) / g(x, y) \leqslant 0, \ h(x, y) = 0\}.$$

REFERENCES

1. Céa J. — *Optimisation. Théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971.
2. Hogan W. — *Directional derivatives for extremal-value functions with applications to the completely convex case*, Operations Research, Vol. 21, Nr. 1, 1973, 188—209.
3. Ilioi C. — *A unified approach of the descent method for minimization of convex functionals. Part I: General theory*, An. şt. Univ., Iaşi, Tom XXIV, 1978, 307—314.
4. Ilioi C. — *A unified approach of the descent methods for minimization of convex functionals. Part II: Steplength algorithms*, to appear in Bull. Math. Soc. Sci. Math. de la R. S. R., Tome 23, Nr. 1, 1979.
5. Levitin E. S. — *A general method of minimization for nonsmooth extremal problems* (in Russian), J. Viscisl. Mat. i Mat. Fiz., 9, 2, 1969, 783—806.
6. Rockafellar R. T. — *Convex analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.

Received 7.V.1979

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
Iaşi, R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

CONNEXIONS SUR LES FIBRES SPINORIELS

PAR

MIHAI ANASTASIEI

Dans [1] on a défini et étudié les structures spinorielles sur les variétés hilbertiennes. Dans le présent article on considère les connexions adaptées aux structures spinorielles (les connexions spinorielles). Après quelques résultats relatifs aux connexions sur les fibrés principaux banachique (§1), on définit les connexions spinorielles (§2). En utilisant la dérivée covariante des spineurs, on met en évidence une famille d'opérateurs différentiels du premier ordre (au sens de [7] p. 91) sur les fibrés spinoriels. Si la variété est à dimension finie l'opérateur de Dirac peut être déduit de cette famille des opérateurs.

1. **Connexions sur les fibrés principaux banachiques.** Soient M une variété différentiable de classe C^∞, modelée sur un espace de Banach $\mathbf{M}$, G un groupe de Lie-Banach réel et $P(M, \pi_P, G)$ un fibré principal (abrégé f.p.) de base M, de groupe structural G et de projection π_P. Nous notons par $R_g : u \to ug$, $u \in P$, $g \in G$ l'action de G sur P et par $\sigma_u : G \to P$, $u \in P$, l'application $g \to ug$, $g \in G$. σ_u est un difféomorphisme de classe C^∞ entre le groupe G et la fibre au-dessus du point $p = \pi_P(u)$. Le foncteur tangent sera noté par T. Considérons la suite exacte de fibrés vectoriels au-dessus de P :

$$0 \to P \times \mathbf{G} \xrightarrow{I} TP \xrightarrow{T\pi_P!} \pi_P^* TM \to 0 \quad \text{où :} \tag{1.1}$$

– $\mathbf{G}$ est l'algèbre de Lie-Banach de G,
– $\pi_P^* TM$ est le fibré image réciproque de TM par π_P,
– $T\pi_P! = (\tau_P, T\pi_P)$, $\tau_P : TP \to P$,
– $I(u, A) = T\sigma_u(A)$, $u \in P$, $A \in \mathbf{G}$.

Un G-fibré vectoriel est un fibré vectoriel sur lequel G opère par des automorphismes de fibré vectoriel. Si nous considérons les actions naturelles de G sur TP et $\pi_P^* TM$ ainsi que l'action de G sur $P \times \mathbf{G}$, $(u, A)g = (ug, \mathrm{ad}(g^{-1})A)$, $u \in P$, $g \in G$, $A \in \mathbf{G}$, alors la suite (1.1) devient une suite exacte de G-fibrés vectoriels.

Définition 1.1. [8] *Une connexion (infinitésimale) sur le f.p. $P(M, \pi_P, G)$ est une scission de la suite exacte* (1.1) *de G-fibrés vectoriels.*

Soit $\Gamma : \pi_P^* TM \to TP$ une telle scission. Alors, il existe un morphisme unique $\omega : TP \to P \times \mathbf{G}$, tel que $\omega \circ I = \mathrm{id}\,|_{P\times\mathbf{G}}$. Pour chaque point $u \in P$, il existe une décomposition unique en somme directe de T_uP

$$T_uP = I\,(P \times \mathbf{G})_u \oplus \Gamma\,(\pi_P^* TM)_u. \tag{1.2}$$

La décomposition (1.2) définit de manière evidente deux projecteurs sur T_uP, qui seront notés par h (de noyau $I(P \times \mathbf{G})_u$) et v (de noyau $\Gamma(\pi_P^* TM)_u$). La compatibilité de Γ avec les actions de G sur $\pi_P^* TM$ et TP implique

$$\Gamma\,(ug, Z) = TR_g\Gamma\,(u, Z),\ u \in P,\ g \in G,\ Z \in TM, \text{ et} \tag{1.3}$$

$$\omega(TR_gX_u) = (u,\ \omega_u\,(X_u))\,g,\ u \in P,\ g \in G,\ X_u \in T_uP, \tag{1.4}$$

où nous avons noté par ω_u la restriction de ω à T_uP et nous avons posé $\omega\,(X_u) = (u,\ \omega_u\,(X_u))$. L'application linéaire $\omega_u : T_uP \to \mathbf{G}$, $u \in P$, a les deux propriétés suivantes

$$\omega_u\,(\sigma_u\,(A)) = A,\ A \in \mathbf{G}, \tag{1.5}$$

$$(R_g^*\,\omega)(X_u)^{\mathrm{def}} = \omega_{ug}\,(TR_gX_u) = ad\,(g^{-1})\,\omega_u\,(X_u),\quad u \in P,\ g \in G. \tag{1.6}$$

Soit $F_{\mathbf{G}}(P)$ l'ensemble des fonctions différentiables de classe C^∞ définies sur P à valeurs dans $\mathbf{G}$ et soit $\omega : \mathscr{X}\,(P) \to F_{\mathbf{G}}(P)$ une 1-forme de classe C^∞ sur P à valeurs dans $\mathbf{G}$, définie par :

$$\omega\,(X)_u = \omega_u\,(X_u),\ u \in P,\ X \in \mathscr{X}\,(P), \tag{1.7}$$

où $\mathscr{X}\,(P)$ est le module des champs de vecteurs sur P. Evidemment, (1.5) et (1.6) impliquent :

$$\omega\,(\sigma\,(A)) = A,\ A \in \mathbf{G}, \tag{1.8}$$

$$R_g^*\,\omega = ad\,(g^{-1})\,\omega,\ g \in G, \tag{1.9}$$

où $\sigma\,(A)$ est le champ vectoriel $u \to \sigma_u(A)$.

Réciproquement, une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathbf{G}$, définit une application inverse à gauche pour I, compatible avec les actions de G sur $P \times \mathbf{G}$ et TP, grâce aux formules (1.8) et (1.9). Vu que la suite (1.1) est exacte, cette inverse définit une connexion sur $P\,(M, \pi_P, G)$. Donc, nous avons établi l'équivalence entre la définition 1.1 et la

Définition 1.2. *Une connexion (infinitésimale) sur le f.p. $P(M, \pi_P, G)$ est une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathbf{G}$ avec les propriétés* (1.8) *et* (1.9).

Ainsi, nous avons recupéré, pour nos buts, une définition bien connue en dimension finie, des connexions (infinitésimales) sur un f.p. Une autre caractérisation est donnée par le

Théorème 1.1. *L'existence sur un f.p. $P\,(M, \pi_P, G)$ d'une connexion (infinitésimale) équivaut à l'existence d'un projecteur $h : TP \to TP$ $(h \circ h = h)$ avec les propriétés :*

$$\ker\ h = I\,(P \times \mathbf{G}), \tag{1.10}$$

$$TR_g \circ h = h \circ TR_g,\ g \in G. \tag{1.11}$$

La preuve de ce théorème est immédiate si nous remarquons que (1.3) équivaut à (1.11).

Le morphisme $F = v - h$ de TP définit une structure presque-produit sur P, associée d'une manière naturelle à la scission Γ. L'espace des vecteurs propres correspondant à la valeur propre 1 de l'opérateur $F_u : T_uP \to T_uP$ est $I\,(P \times \mathbf{G})_u$. Vu que le projecteur v a la propriété

$$TR_g \circ v = v \circ TR_g,\ g \in G, \tag{1.12}$$

il résulte que (1.11) équivaut à

$$TR_g \circ F = F \circ TR_g,\ g \in G. \tag{1.13}$$

En utilisant le théorème 1.1 on obtient le

Théorème 1.2. *Il existe une connexion (infinitésimale) sur $P(M, \pi_P, G)$ et seulement si, il existe une structure presque-produit F sur P, avec les propriétés*

a) $$F_u\,(X_u) = X_u \Leftrightarrow X_u \in I\,(P \times \mathbf{G})_u,\ X_u \in T_uP,$$

b) $$TR_g \circ F = F \circ TR_g,\ g \in G.$$

Remarque. Les théorèmes 1.1 et 1.2 ont été etablis en dimension finie, par V. Cruceanu dans [2] et [3].

Soit $(f, \varphi_0, h_0) : P\,(M, \pi_P, G) \to P'\,(M', \pi'_{P'}, G')$ où $f : P \to P'$, $\varphi_0 : G \to G'$, $h_0 : M \to M'$ un homomorphisme de f.p., c'est-à-dire :

$$\pi_{P'} \circ f = h_0 \circ \pi_P,\ f\,(ug) = f\,(u)\,\varphi_0\,(g),\ u \in P,\ g \in G. \tag{1.14}$$

Définition 1.3. *Soient les f.p. $P\,(M, \pi_P, G)$ et $P'\,(M', \pi'_{P'}, G')$ munis des connexions (infinitésimales) Γ resp. Γ'. Nous dirons que l'homomorphisme (f, φ_0, h_0) est compatible avec les connexions Γ et Γ'* si avons

$$Tf \circ \Gamma = \Gamma' \circ (f \times Th_0). \tag{1.15}$$

Remarque. La relation (1.15) équivaut à

$$\omega' \circ Tf = (f \times T\varphi_0) \circ \omega. \tag{1.16}$$

La démonstration du théorème suivant se conduit comme en dimension finie (voir [6] p. 79—82).

Théorème 1.3. *Soit $(f, \varphi_0, h_0) : P\,(M, \pi_P, G) \to P'\,(M', \pi_{P'}, G')$ un homomorphisme de fibrés principaux, avec h_0 un difféomorphisme.*

a) *Soit Γ une connexion (infinitésimale) sur $P\,(M, \pi'_P, G)$. Alors, il existe une connexion (infinitésimale) unique Γ' sur $P'\,(M', \pi'_P\,G')$ de manière que l'homomorphisme (f, φ_0, h_0) soit compatible avec les connexions (infinitésimales) Γ et Γ'.*

b) *En supposant que φ_0 est un difféomorphisme local, soit Γ' une connexion (infinitésimale) sur $P'\,(M', \pi'_{P'}\,G')$. Alors, il existe une connexion (infinitésimale) unique Γ sur $P\,(M, \pi_P, G)$ telle que l'homomorphisme (f, φ_0, h_0) soit compatible avec les connexions (infinitésimales) Γ et Γ'.*

Soit $\mathbf{F}$ un espace de Banach. En supposant que G opère sur $\mathbf{F}$ par un homomorphisme $\psi : G \to GL\,(\mathbf{F})$, soit $\pi : E \to M$ le fibré vectoriel associé à $P\,(M, \pi_P, G)$ de fibre type $\mathbf{F}$. Par une modification légère d'une preuve

de J-P. Penot (voir [8]) on peut montrer que toute connexion (infinitésimale) sur $P(M, \pi_P, G)$ induit une connexion vectorielle unique sur $\pi : E \to M$, c'est-à-dire il existe un morphisme de fibrés vectoriels $K : TE \to E$, tel que pour chaque carte vectorielle (U, φ, Φ) de π, nous avons

$$(1.17) \qquad (\Phi \circ K \circ T\Phi^{-1})(x, \xi, y, \eta) = (x, \eta + \Gamma_\varphi(x)(y, \xi)), \quad x, y \in \mathbf{M}$$

$\xi, \eta \in \mathbf{F}$, où $\Gamma_\varphi(x) \in L^2(M, \mathbf{F}; \mathbf{F})$ correspond aux symboles de Christoffel usuels. Notons par $\mathscr{X}_E(M)$ le module des sections sur M dans le fibré vectoriel $\pi : E \to M$ et possons $\mathscr{X}_{TM}(M) = \mathscr{X}(M)$. Il existe (voir [4], p. 17) une dérivation covariante unique ∇_X, $X \in \mathscr{X}(M)$, associée naturellement à l'application K, donnée dans une carte vectorielle quelconque (U, φ, Φ) par

$$(1.18) \quad \nabla_X S|_{\varphi(p)} = \partial S_\varphi|_{\varphi(p)}(X_\varphi) + \Gamma_\varphi^{(x)}(X_\varphi, S_\varphi), \quad p \in U, \quad X \in \mathscr{X}(M),$$
$$x = \varphi(p), \quad S \in \mathscr{X}_E(M),$$

où $X_\varphi = T\varphi \circ X$, $S_\varphi = \Phi \circ S$ et ∂ est le symbole de différentiation de Fréchet. Supposons que M admet une partition de l'unité. D'après le lemme 3.1 de [4] et la formule (1.18) nous pouvons définir l'application $\nabla : T_pM \times \mathscr{X}_E(U) \to \mathscr{X}_E(U)$, avec U un ouvert de M par $(X_p, S) \to \nabla_{X_p} S = \nabla_X S$, où X est un champ arbitraire de vecteurs qui coïncide au point p avec X_p et $S \in \mathscr{X}_E(U)$. Cette application est R-linéaire relativement à X_p et

$$(1.19) \qquad \nabla_{X_p}(fS) = T_p f(X_p) S + f(p) \nabla_{X_p} S, \quad S \in \mathscr{X}_E(M),$$

où f est une fonction réelle quelconque sur M. Nous considérons l'opérateur de différentiation covariante $\nabla : \mathscr{X}_E(M) \to \mathscr{X}_{L(TM,E)}(M) (S \to \nabla S)$ donne par

$$(1.20) \qquad (\nabla S)(p) = (\nabla_{X_p} S)(p), \quad p \in M, \quad X_p \in T_pM, \quad S \in \mathscr{X}_E(M).$$

En utilisant (1.19) on obtient le (voir aussi [4], p. 6)

Théorème 1.1. *L'opérateur de différentiation covariante ∇ est un opérateur différentiel du premier ordre.*

2. Structures spinorielles et connexions spinorielles. Soit H un espace de Hilbert réel, séparable et de dimension infinie. Nous notons par $Cl(H)_\infty$ l'algèbre de Clifford sur H rélative à la forme quadratique $Q(x) = \|x\|^2 = (x, x)$, $x \in H$, structuré comme une C^*-algèbre (voir [5]). Soit J une structure complexe sur H, c'est-à-dire un opérateur orthogonal sur H avec $J^2 = -\mathrm{id}$. Si nous posons $i\,x = Jx$ et $< x, y > = (x, y) + (Jx, y)$, $x, y \in H$, l'espace H devient un espace de Hilbert complexe, qui sera noté par H_C. Soient $\Lambda^n H_C$ la puissance extérieure des n exemplaires de H_C et $\Lambda(H_C) = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n H_C$ avec la structure naturelle de l'espace de Hilbert complexe. L'algèbre extérieure $\Lambda(H_C)$ a une Z_2-graduation naturelle, $\Lambda(H_C) = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1$ où $\Lambda^0 = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k} H_C$ et $\Lambda^1 = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k+1} H_C$. Il existe une représentation fidèle et irréductibile F de $Cl(H)_\infty$ sur l'espace de Hilbert $\Lambda(H_C)$ (voir par exemple [9]). Soient $Cl(H)^*_\infty$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $Cl(H)_\infty$ et
$\mathrm{Spin}(H)_\infty = \{u \in Cl(H)^*_\infty \mid uHu^{-1} = H, \ u\beta(u) = \beta(u)u = 1, \ \alpha(u) = u\}$
où α est l'involution et β est l'antiinvolution principale de $Cl(H)_\infty$. P. de la Harpe a montré dans [5] que le groupe $\mathrm{Spin}(H)_\infty$ est groupe de Lie-Banach.

Soit $O(H)_1$ le groupe des opérateurs orthogonaux sur H de la forme $I + A$, où A est un opérateur nucléaire. Le groupe de Lie-Banach $O(H)_1$ a deux composantes connexes. Le revêtement universel de la composante connexe de l'identité $SO(H)_1$, est exactement $\mathrm{Spin}(H)_\infty$ (voir [5]). Soit $\Delta = F \mid \mathrm{Spin}(H)_\infty$. Les espaces Λ^0 et Λ^1 sont invariants par Δ (voir [9]) et ils définissent deux sous-représentations de Δ qui seront notées par Δ^0 et Δ^1, respectivement. Ces deux représentations Δ^0 et Δ^1 sont continues, injectives et irréductibles (voir [9]). L'espace $\Lambda(H_C)$ (en abrégé Λ) s'appelle l'espace de spineurs relatif à $SO(H)_1$ et les espaces Λ^0 et Λ^1 s'appellent les espaces de semi-spineurs relatifs à $SO(H)_1$.

Soit $P(M, SO(H)_1)$ un f.p. de base M et de groupe structural $SO(H)_1$. Un f.p. $\Sigma(M, \mathrm{Spin}(H)_\infty)$ qui est l'extension de $P(M, SO(H)_1)$ associée à l'homomorphisme de revêtement $\rho : \mathrm{Spin}(H)_\infty \to SO(H)_1$, s'appelle structure spinorielle sur $P(M, SO(H)_1)$ ou structure spinorielle sur M relative à $P(M, SO(H)_1)$ (voir [1]). Nous notons par $(\tilde{\rho}, \rho) : \Sigma(M, \mathrm{Spin}(H)_\infty) \to P(M, SO(H)_1)$ l'homomorphisme d'extension.

Définition 2.1. *On appele connexion spinorielle une connexion (infinitésimale) sur $\Sigma(M, \mathrm{Spin}(H)_\infty)$.*

Soient $C(P)$ et $C(\Sigma)$ les ensembles de connexions sur $P(M, SO(H)_1)$ et $\Sigma(M, \mathrm{Spin}(H)_\infty)$, respectivement. Comme ρ est un difféomorphisme local il résulte en vertu du théorème 1.3, qu'il existe une bijection $\tilde{\rho}^* : C(\Sigma) \to C(P)$. Si nous notons par $\tilde{\omega}$ et ω les l-formes des deux connexions correspondantes par $\tilde{\rho}^*$, nous avons :

$$(2.1) \qquad \omega_{\tilde{\rho}(\tilde{u})}(T\tilde{\rho} X_{\tilde{u}}) = T\rho\, \tilde{\omega}_{\tilde{u}}(X_{\tilde{u}}), \quad \tilde{u} \in \Sigma, \quad X_{\tilde{u}} \in T_{\tilde{u}}\Sigma.$$

$\tilde{\omega}_{\tilde{u}}(X_{\tilde{u}})$ et $\omega_{\tilde{\rho}(\tilde{u})}(T\tilde{\rho} X_{\tilde{u}})$ sont dans les algèbres de Lie-Banach des groupes $\mathrm{Spin}(H)_\infty$ et $SO(H)_1$, respectivement.

En vertu de la proposition 12 [5] nous obtenons

$$(2.2) \qquad \|\omega_{\tilde{\rho}(\tilde{u})}(T\tilde{\rho} X_{\tilde{u}})\|_1 = 4\,\|\tilde{\omega}_{\tilde{u}}(X_{\tilde{u}})\|_\infty, \quad \tilde{u} \in \Sigma, \quad X_{\tilde{u}} \in T_{\tilde{u}}\Sigma$$

où $\|\ \|_1$ est la norme nucléaire et $\|\ \|_\infty$ est la norme de C^*-algèbre sur $Cl(H)_\infty$. En dimension finie la relation (2.2) coïncide avec la relation (5.4) de [10].

Vu que $\mathrm{Spin}(H)_\infty$ opère sur Λ nous pouvons considérer le fibré associé à $P(M, \mathrm{Spin}(H)_\infty)$ avec la fibre type Λ qui sera nommé fibré spinoriel. Les fibrés associés à $P(M, \mathrm{Spin}(H)_\infty)$ avec les fibres type Λ^0 et Λ^1, respectivement, seront nommés fibrés semi-spinoriels. Une section du fibré spinoriel sera nommée champ spinoriel.

Une connexion spinorielle induit une dérivation covariante dans le fibré spinoriel qui sera nomée dérivation spinorielle. L'existence de la bijection $\tilde{\rho}^*$ implique que toute connexion sur $P(M, SO(H)_1)$ induit une dérivation spinorielle.

Une réduction de groupe structural de TM (M modélée sur H) au groupe $SO(H)_1$ s'appelle structure riemannienne nucléaire orientée sur M. Si M est munie d'une structure riemannienne nucléaire orientée, le fibré

de repères de TM est un f.p. de base M et de groupe structural $SO(H)$, qui sera noté par $R(M)$. Nous supposons que M a une structure spinorielle, c'est-à-dire il existe un f.p. $\Sigma(M)$ de base M et de groupe structural Spin $(H)_\infty$, l'extension de $R(M)$ par ρ.

Dans la suite nous allons mettre en évidence une classe d'opérateurs différentiels du premier ordre sur une variété munie d'une structure spinorielle. Soit $\Lambda(M)$ le fibré spinoriel. Vu que $H \subset Cl(H)_\infty$, pour tout $x \in H$, on a une application linéaire $F(x) : \Lambda \to \Lambda$. Pour $b \in$ Spin $(H)_\infty$ et $s \in \Lambda$ nous avons

$$(2.1) \qquad \Delta(b)(F(x)s) = F(b)(F(x)s) = F(bx)s = F(bxb^{-1}b)s = F(bxb^{-1})F(b)s = F(\rho(b)x)F(b)s.$$

Soit (U_i, φ_i) un atlas de la variété M et $\{\tau_i : \pi_\Lambda^{-1}(U_i) \to U_i \times \Lambda\}$ les cartes du fibré spinoriel $\pi_\Lambda : \Lambda(M) \to M$. Les applications $\tau_j \circ \tau_i^{-1} : U_i \cap U_j \to L(\Lambda)$ ont leur images dans Δ (Spin $(H)_\infty$). Vu que Δ est injective, $\tau_j \circ \tau_i^{-1}(p)$, $p \in U_i \cap U_j$, s'identifie à son image dans Spin $(H)_\infty$. Soient $\{\Phi_i : \tau^{-1}(U_i) \to U_i \times H\}$ les cartes du fibré tangent $\tau : TM \to M$. Les applications $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : U_i \cap U_j \to L(H)$ ont leur images dans $SO(H)_1$; comme ρ est surjectif il existe $b \in$ Spin $(H)_\infty$ tel que $\rho(b) = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(p) = \partial(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(p)$, $p \in U_i \cap U_j$. Nous définissons maintenant une application $\Psi : TM \times \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ par

$$(2.2) \qquad \Psi(X_p, s_p)(p) = \tau_{i,p}^{-1}(F(X_{\varphi_i}^{\cdot}))(s_{\tau_i}), \; p \in M, X_p \in T_pM, s_p \in \Lambda_pM$$

$$\text{où } X_{\varphi_i} = \Phi_{i,p}(X_p), \quad s_{\tau_i} = \tau_{i,p}(s_p).$$

D'après la relation (2.1) il résulte que la définition de Ψ ne dépend pas des cartes locales choisies. Une connexion linéaire sur M induit une connexion sur $\Lambda(M)$ et donc une dérivation covariante ∇. Pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$ nous définissons un opérateur $D_X : \mathscr{X}_{\Lambda(M)}(M) \to \mathscr{X}_{\Lambda(M)}(M)$ par

$$(2.3) \qquad (D_XS)(p) = \Psi(X_p, \nabla_{X_p}S), \; p \in M, S \in \mathscr{X}_{\Lambda(M)}(M)$$

Théorème 2.1. a) *L'opérateur D_X est pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$ un opérateur différentiel du premier ordre.*

b) *Le symbole de l'opérateur D_X est donné par*

$$(2.4) \qquad \sigma_1(D_X)(v_p) = v_p(X_p)\Psi(X_p, .)$$

où v_p est une 1-forme non nulle sur T_pM pour chaque $p \in M$.

Démonstration. a) Soit $S \in \mathscr{X}_{\Lambda(M)}(M)$ tel que le jet d'ordre 1, $(j^1S)(p) = 0$. Vu que ∇ est un opérateur differentiel du premier ordre, il résulte que $\nabla_{X_p}S = 0$, donc $(D_XS)(p) = 0$.

b) Soient f une fonction réelle sur M telle que $f(p) = 0$ et $T_pf = v_p$. Soit $S \in \mathscr{X}_{\Lambda(M)}(M)$ tel que $S(p) = s$. Nous avons

$$\sigma_1(D_X)(v_p)(s) = D_X(fS)(p) = \Psi(X_p, \nabla_{X_p}(fS)) = \Psi(X_p, T_pf(X_p)S(p) + f(p)\nabla_{X_p}S) = \Psi(X_p, v_p(X_p)s) \text{ donc } \sigma_1(D_X)(v_p) = v_p(X_p)\Psi(X_p, .).$$

Un calcul direct montre que

$$\sigma_1(D_X)(v_p) \circ \tau_1(D_X)(v_p) = \alpha[v_p(X_p)]^2 \mathrm{id}.$$

où α est un nombre réel non nul et X_p est non nul. Il résulte que le symbole $\sigma_1(D_X)(v_p)$ est injectif seulement si v_p gest injective, donc l'opérateur D_X n'est pas elliptique au sens de [7].

Supposons que M est de dimension finie égale à n et introduisons l'opérateur de Dirac D à l'aide des opérateurs D_X (voir aussi [7]). Soit U un voisinage ouvert de $p \in M$ muni d'un champ de repères orthonormés $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Définissons d'abord un opérateur différentiel du premier ordre D_U sur $\Lambda(M)$ par

$$(2.5) \qquad (D_US)(p) = \sum_{k=1}^{n}(D_{X_k}S)(p), \; S \in \mathscr{X}_{\Lambda(M)}(M).$$

La définition de D_U ne dépend pas du champ $\{X_1, ..., X_n\}$. Si l'on considère une famille d'opérateurs D_{U_i} de la forme (2.5) avec $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de M, deux opérateurs arbitraires D_{U_i} et D_{U_j} coïncident sur $U_i \cap U_j$. Il résulte que la famille d'opérateurs D_{U_i} définit un opérateur différentiel du premier ordre unique D sur M tel que la restriction de D à chaque U_i coïncide avec D_{U_i}. Le symbole de l'opérateur D est donné par

$$(2.6) \qquad \sigma_1(D)(v_p) = \sum_{k=1}^{n} v_p(X_{k,p})\Psi(X_{k,p}, .).$$

Parce que le champ $\{X_1, ..., X_n\}$ est un champ de repères orthonormés nous obtenons

$$(2.7) \qquad \sigma_1(D)(v_p) \circ \sigma_1(D)(v_p) = \sum_{k=1}^{n}[v_p(X_{k,p})]^2 \mathrm{id}.$$

Par suite l'opérateur D est elliptique.

BIBLIOGRAPHIE

1. Anastasiei M. — *Structures spinorielles sur les variétés hilbertiennes.* C. R. Acad. Sci. Paris, T. 284, S. A. p. 943—946.
2. Cruceanu V. — *Sur la structure presque-produit associée á une connexion sur un espace fibré.* An ști. Univ. Iași, Matematică, T. XV, fasc. 1 (1969), p. 159—167.
3. Cruceanu V. — *Sur l'ensemble des connexions sur un exspace fibré.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. de Roumanie, T. XII (1969), p. 27—34.
4. Flaschel P., Klingenberg W. — *Riemannsche Hilbertmanningfaltigkeiten. Periodische Geodätische.* Lecture Notes in Mathematics, T. 282, Springer-Verlag, 1972.
5. P. de la Harpe — *The Clifford algebra and the spinor group of a Hilbert space.* Compositio Math., 25 (1972), p. 245—261.

6. Kobayashi S. — *Foundations of Differential Geometry* I, Interscience Publisher, New-York-London, 1963.

7. Palais R. S. — *Seminar on the Atiah-Singer index theorem.* Princeton Univ. Press 1965.

8. Penot J-P. — *Connexion linéaire déduite d'une famille de connexions linéaires par un foncteur multilinéaire.* C. R. Acad. Sci. Paris, T. 268, S. A., p. 100—103.

9. Plymen R. J. — *Spinors in Hilbert Spaces.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 (1976), p. 337—347.

10. Popovici I. — *Représentation irréductibles des fibrés de Clifford.* Ann. Inst. Henri Poincaré, S. A. T. XXV, 1976, p. 35—58.

Reçu le 8.II.1978

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

ON THE HOLOMORPHICALLY SUBPLANAR CURVES

BY

LIVIU NICOLESCU

We define the subcharacteristic vector fields of the deformation algebra of two affine connections. The geometrical interpretation of the subcharacteristic directions fields is given with the help of the holomorphically subplanar curves.

Introduction. The manifolds, mappings, tensor fields and connections about which we discuss are always assumed to be C^∞.

Let M be a n-dimensional manifold ($n > 4$). We denote by $\mathcal{T}^r_s(M)$ the set of all tensor fields of type (r, s) in M and by $\mathcal{F}(M)$ the ring of all real functions on M. The set $\mathcal{T}^r_s(M)$ is a module over $\mathcal{F}(M)$. Particularly for $\mathcal{T}^1_0(M)$ and $\mathcal{T}^0_1(M)$ we shall use the notation $\mathcal{X}(M)$ and $\Lambda(M)$, respectively.

Holomorphically subplanar curves. We consider a tensor field $F \in \mathcal{T}^1_1(M)$ on a differentiable manifold M (dim $M = n > 4$) such that $F^2 = -\delta$, where $\delta \in \mathcal{T}^1_1(M)$ is the Kronecker tensor. Let $K \in \mathcal{X}(M)$ and ∇ be a symmetric F-connection [1].

We consider a curve $C : J \to M$, where $J \subseteq R$ and let $\dot{C}(t)$ be the tangent vector field along the curve. We consider a regular point $p = C(t_0)$. We suppose that the vectors $\dot{C}(t_0)$, $F_p(\dot{C}(t_0))$, K_p and $F_p(K_p)$ are independent.

Definition 1. *The point $p = C(t_0)$ is called a (F, K, ∇)-holomorphically subplanar point if the vector $(\nabla_{\dot{C}} \dot{C})(t_0)$ belongs to the subspace generated by vectors $\dot{C}(t_0)$, $F_p(\dot{C}(t_0))$, K_p, $F_p(K_p)$, i.e. if there exist four numbers $f_p, g_p, h_p, e_p \in R$ such that*

$$(\nabla_{\dot{C}} \dot{C})(t_0) = f_p \dot{C}(t_0) + g_p F_p(\dot{C}(t_0)) + h_p K_p + e_p F_p(K_p). \tag{1}$$

Definition 2. *Let $C : J \to M$ $(J \subseteq R)$ be a regular curve such that for every $t \in J$, the vectors $\dot{C}(t), F_{C(t)}(\dot{C}(t)), K_{C(t)}$ and $F_{C(t)}(K_{C(t)})$ are independent. The curve C is called a (F, K, ∇)-holomorphically subplanar curve, if all the points of C are (F, K, ∇)-holomorphically subplanar points.*

Let Γ^i_{jk}, F^i_j and K^i be the components of ∇, F and K, respectivelly, considered in a system of local coordinates. A curve $x^i = x^i(t)$ is a $(F,$