BIBLIOGRAPHY

1. Cruceanu, V. et Miron, R. — *Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque complexes.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Sect. I, Tomul XII, Fasc. 1 (1967), p. 78—88.
2. Martin, M. and Nicolescu, L. — *On the* (Δ, F, φ)*-subpaths.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R. (1979), to appear.
3. Nicolescu, L. — *Des courbes subcaractéristiques sur une variété presque complexe.* An. şt. Univ. Iaşi, XXIII, Fasc. 2 (1977), 309—313.
4. Vaisman, I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global.* Comm. Math. Helv. 41 (1966—1967), 73—87.
5. Yamaguchi, S. and Sato, S. — *On holomorphically subplanar curves in almost complex manifolds.* Tensor N.S. Vol. 32 (1978), 231—242.

Received 22.XI.1978

Faculty of Mathematics,
University of Bucharest,
Str. Academiei 14,
7000 Bucureşti
R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES ASSOCIÉES À UNE PAIRE DE CONNEXIONS LINÉAIRES SUR UNE VARIÉTÉ DE BANACH

PAR

MIHAI ANASTASIEI et LIVIU NICOLESCU

Les directions caractéristiques et leurs trajectoires, nommées courbes caractéristiques, ont un rôle important dans l'étude des correspondences entre deux espaces affines ou projectives (voir la bibliographie de [3]). Dans le §1 de cette Note nous associons des directions caractéristiques à une paire de connexions linéaires sur une variété de Banach. L'existence des directions caractéristiques en un point de la variété est liée à l'étude des valeurs et vecteurs propres pour les opérateurs quadratiques.

En employant les résultats de [1] nous obtenons, dans le §2, les conditions suffisantes pour l'existence des directions caractéristiques en un point de la variété.

1. Soit M une variété différentiable de classe C^∞ modelée sur un espace de Banach $\mathbf{M}$ et soit $T: TM \to M$ son fibré tangent.

Suppons que M admet des partitions de l'unité différentiables de classe C^∞. Notons par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur M et par $\mathcal{X}(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de vecteurs sur M. Soit (U, φ) une carte locale de M. Pour un champ $X \in \mathcal{X}(M)$ nous notons par $X_\varphi : \varphi(U) \to \mathbf{M}$ sa partie principale et $X_{\varphi(p)} = X_\varphi(p)$ où $p \in U$.

Si nous considérons une autre carte locale (V, ψ) de M, telle que $U \cap V \neq \varnothing$, les applications de transitions de T sont données par

$$D(\psi \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U \cap V) \to L(\mathbf{M}), \tag{1.1}$$

où $L(\mathbf{M})$ est l'espace des opérateurs linéaires sur $\mathbf{M}$ et D est le symbole de différentiation de Fréchet.

Définition 1.1 [2, p. 2]. *On appelle connexion linéaire sur M une application $\nabla: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, notée $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, $(\forall)$ $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, telle que pour toute carte locale (U, φ) de M il existe une application de classe C^∞, $\Gamma_\varphi : \varphi(U) \to L^2(\mathbf{M}; \mathbf{M})$ tel que $\nabla_X Y$ a l'expression locale :*

$$\nabla_X Y \mid_{\varphi(p)} = DY \mid_{\varphi(p)} (X_{\varphi(p)}) + \Gamma_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, Y_{\varphi(p)}), \tag{1.2}$$

où $\Gamma_{\varphi(p)} = \Gamma_\varphi(p)$,

Γ_φ correspond aux symboles de Christoffel.

De cette définition il résulte que l'application ∇ est $\mathcal{F}(M)$-linéaire dans le premier argument et :

$$\begin{aligned} &\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ &\nabla_X fY = X(f)\, Y + f\, \nabla_X Y, \ (\forall)\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), f \in \mathcal{F}(M). \end{aligned} \tag{1.3}$$

À un changement de carte locale, l'application Γ_φ se transforme selon la loi :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\psi(p)} = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ [D^2(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(p)) + \\ + \Gamma_{\varphi(p)}(D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(p)), D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(p))]. \end{aligned}$$

La connexion ∇ s'appele symétrique si $\Gamma_{\varphi(p)}$ est une application symétrique.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de la droite réelle.

Définition 1.2. *On appelle courbe ∇-autoparallèle, une courbe $c: I \to M$ telle que sa représentation locale $\varphi \circ c$ dans toute carte locale (U, φ) est une solution de l'équation différentielle :*

$$\widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot\cdot}(t) + \Gamma_{\varphi(c(t))}(\widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot}(t), \widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot}(t)) = \lambda(t)\, \widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot}(t) \tag{1.4}$$

où λ est une fonction réelle définie sur I.

Nous pouvons introduire dans (1.4) un autre paramètre s tel que l'équation (1.4) devienne :

$$\widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot\cdot}(s) + \Gamma_{\varphi(c(s))}(\widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot}(s), \widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot}(s)) = 0. \tag{1.5}$$

Le paramètre s s'appelle paramètre affine parce qu' un changement affine de s consèrve la forme de l'équation (1.5).

L'équation (1.4) est équivalente au système des équations différentielles linéaire suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot}(t) = u(t), \\ \dot{u}(t) = \lambda(t)\, u(t) - \Gamma_{\varphi(c(t))}(u(t), u(t)). \end{cases} \tag{1.6}$$

Il en résulte l'existence locale et l'unicité d'une courbe ∇-autoparallèle c qui satisfait aux conditions initiales

$$c(t_0) = p, \ \frac{dc}{dt}(t_0) = X_p, \tag{1.7}$$

où $p \in M$, $X_p \in T_p M - \{0\}$

Définition 1.3. *Deux courbes $c: I \to M$ et $c': I \to M$ s'appellent r-osculatrices au point $p = c(t_0) = c'(t_0)$, $t_0 \in I$, si dans toute carte locale (U, φ) centrée dans p, nous avons*

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi \circ c}^{\cdot}(t_0) = \widetilde{\varphi \circ c'}^{\cdot}(t_0), \ \ldots, \ \overset{(r)}{\widetilde{\varphi \circ c}}(t_0) = \overset{(r)}{\widetilde{\varphi \circ c'}}(t_0), \\ &\overset{(r+1)}{\widetilde{\varphi \circ c}}(t_0) \neq \overset{(r+1)}{\widetilde{\varphi \circ c'}}(t_0) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Soient ∇^1 et ∇^2 deux connexions linéaires symétriques sur M. L'application $B: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ définie par

$$B(X, Y) = \nabla^2_X Y - \nabla^1_X Y, \ (\forall)\, X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{1.9}$$

a l'expression locale :

$$B(X, Y)\,|_{\varphi(p)} = \overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, Y_{\varphi(p)}) - \overset{1}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, Y_{\varphi(p)}). \tag{1.10}$$

En tenant compte de (1.2) il résulte que l'application B est $\mathcal{F}(M)$ - bilinéaire et qu'elle détermine un champ tensoriel du type (1,2) sur M. Ce champ tensoriel s'appelle le champ tensoriel de déformation de la paire de connexions (∇^1, ∇^2). Donc, pour tout $p \in M$, nous avons l'application bilinéaire symétrique

$$B_p: T_p M \times T_p M \to T_p M,$$

donnée dans une carte locale (U, φ) par (1.10).

Soit A_p l'opérateur „quadratique" défini par :

$$A_p(X_p) = B_p(X_p, X_p), \ (\forall)\, X_p \in T_p M. \tag{1.11}$$

Définition 1.4. *Un vecteur $X_p \in T_p M - \{0\}$ s'appelle vecteur propre pour l'opérateur „quadratique" A_p s'il existe un nombre réel non nul λ appelé valeur propre, tel que l'on ait la relation $A_p(X_p) = \lambda X_p$*

Définition 1.5 a) *On appelle directioncaractéristique au point p relative à la paire de connexions (∇^1, ∇^2), la direction engendrée par un vecteur $X_p \in T_p M - \{0\}$ ayant la propriété que ces deux courbes ∇^i -autoparallèles $(i = 1,2)$ qui passent par le point p et sont tangentes au vecteur X_p, sont 2-osculatrices au point p.*

b) *On appelle courbe caractéristique, une courbe tangente dans chacun de ses points à une direction caractéristique en ce point.*

Théorème 1.1. *Un vecteur $X_p \in T_p M - \{0\}$ définit une direction caractéristique au point $p \in M$ si et seulement si X_p est un vecteur propre pour l'opérateur „quadratique" A_p.*

Démonstration. Soit une direction caractéristique donnée par $X_p \in T_p M - \{0\}$ et soient c_1, c_2 les deux courbes ∇^i -autoparallèles $(i = 1, 2)$ qui passent par le point p et sont tangentes au vecteur X_p. Dans une carte locale (U, φ) les équations de c_1 et c_2 sont respectivement :

$$\overset{2}{\widetilde{\varphi \circ c_1}}^{\cdot\cdot}(s) + \overset{1}{\Gamma}_{\varphi(c_1(s))}(\widetilde{\varphi \circ c_1}^{\cdot}(s), \widetilde{\varphi \circ c_1}^{\cdot}(s)) = 0, \tag{1.12}$$

$$\widetilde{\varphi \circ c_2}^{\cdot\cdot}(s) + \overset{2}{\Gamma}_{\varphi(c_2(s))}(\widetilde{\varphi \circ c_2}^{\cdot}(s), \widetilde{\varphi \circ c_2}^{\cdot}(s)) = \rho(s)\, \widetilde{\varphi \circ c_2}^{\cdot}(s), \tag{1.13}$$

où s est paramètre affine de c_1.

Puisque c_1 et c_2 sont 2-osculatrices au point $p = c_1(s_0) = c_2(s_0)$, nous avons : $\varphi \circ c_1(s_0) = \varphi \circ c_2(s_0)$, $\widetilde{\varphi \circ c_1}^{\cdot}(s_0) = \widetilde{\varphi \circ c_2}^{\cdot}(s_0) = X_{\varphi(p)}$,

$$\widetilde{\varphi \circ c_1}^{\cdot\cdot}(s_0) = \widetilde{\varphi \circ c_2}^{\cdot\cdot}(s_0).$$

En tenant compte de (1.12) et (1.13) il résulte :

$$\overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, X_{\varphi(p)}) - \overset{1}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, X_{\varphi(p)}) = \rho(s_0) X_{\varphi(p)}$$

ou

$$B_p(X_p, X_p)|_{\varphi(p)} = \lambda X_{\varphi(p)}, \text{ où } \lambda = \rho(s_0).$$

Il en résulte que X_p est un vecteur propre pour l'opérateur „quadratique" A_p.

Réciproquement, soit $X_p \in T_p M - \{0\}$ un vecteur propre pour l'opérateur A_p, donc il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$, tel que :

$$A_p(X_p) = \lambda X_p. \tag{1.14}$$

Localement, nous avons :

$$B_p(X_p, X_p)|_{\varphi(p)} = \lambda X_{\varphi(p)}, \tag{1.15}$$

ou

$$\overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, X_{\varphi(p)}) - \overset{1}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, X_{\varphi(p)}) = \lambda X_{\varphi(p)}. \tag{1.16}$$

Soit c_1 la courbe ∇^1 - autoparallèle qui passe par le point p et est tangente à X_p. Si s est le paramètre affine de la connexion ∇^1, alors au point $p = c_1(s_0)$ on a :

$$\widehat{\varphi \circ c_1}^{\cdot\cdot}(s_0) + \overset{1}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, X_{\varphi(p)}) = 0. \tag{1.17}$$

en tenant compte de (1.16) et (1.17), il résulte :

$$\widehat{\varphi \circ c_1}^{\cdot\cdot}(s_0) + \overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, X_{\varphi(p)}) = \lambda X_{\varphi(p)}. \tag{1.18}$$

On considère la courbe ∇^2 - autoparallèle c_2 qui passe par le point p tangente au vecteur propre X_p. En choisissant une paramétrisation pour cette courbe telle qu'au point p on ait :

$$\widehat{\varphi \circ c_2}^{\cdot\cdot}(s_0) + \overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(X_{\varphi(p)}, X_{\varphi(p)}) = \lambda X_{\varphi(p)}. \tag{1.19}$$

En tenant compte de (1.18) et (1.19) on obtient :

$$\widehat{\varphi \circ c_2}^{\cdot\cdot}(s_0) = \widehat{\varphi \circ c_1}^{\cdot\cdot}(s_0). \tag{1.20}$$

La relation (1.20) montre que le vecteur X_p définit une direction caractéristique au point p.

2. D'après le théorème 1.1, l'existence des directions caractéristiques dans un point de la variété se réduit à l'existence de vecteurs propres pour l'opérateur nonlinéaire A_p donnée par (1.11). Localement il faut établir l'existence des valeurs et des vecteurs propres pour une application (l'opérateur „quadratique") $A : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ donnée par $A(v) = B(v, v)$, $v \in \mathbf{M}$, où $B : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ est une application bilinéaire symétrique et continue

$$(B(u, v) = \overset{2}{\Gamma}_{\varphi}(u, v) - \overset{1}{\Gamma}_{\varphi}(u, v),\ u, v \in \mathbf{M}).$$

Proposition 2.1. *L'opérateur „quadratique" A a les propriétés suivantes :*

$$A(-v) = A(v),\ (\forall)\, v \in \mathbf{M} \tag{2.1}$$

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = 0, \tag{2.2}$$

$$(D_v A)(h) = 2B(v, h)\ (\forall)\, v, h \in \mathbf{M} \tag{2.3}$$

où $D_v A$ est la différentielle de Fréchet de A.

Démonstration. La propriété (2.1) est immédiate. De la relation

$$\|Av\| = \|B(v, v)\| \leqslant K \|v\|^2 \text{ il résulte (2.2).}$$

En employant (2.2) et la définition de différentiation de Fréchet on obtinet (2.3).

Remarque. De la propriété (2.3) il résulte que A est de classe C^∞ sur $\mathbf{M}$.

Théorème 2.1. *Supposons :*

(2.4) *les images par A des ensembles bornées sont compactes.*

$$|\,\|\overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v)\| - \|\overset{1}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v)\|\,| \geqslant \alpha \|v\|^2,\ \alpha > 0. \tag{2.5}$$

Alors il existe un nombre réel $\lambda_0 > 0$ tel que pour chaque $\lambda > \lambda_0$, les nombres $1/\lambda$ et $-1/\lambda$ sont des valeurs propres pour A et pour chaque valeur propre il existe un vecteur propre de A.

Démonstration. D'après (2.3) et (2.4) l'application A est compacte. En utilisant :

$$\|A(v, v)\| = \|\overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v) - \overset{1}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v)\| \geqslant |\,\|\overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v)\| - \|\overset{1}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v)\|\,| \geqslant \alpha \|v\|^2$$

nous obtenons, pour $\|v\| = 1$,

$$\|A(v, v)\| \geqslant \alpha > 0.$$

Puisque l'application A vérifie (2.2), toutes les hypothèses du théorème 1 de [1] sont satisfaites. Donc, les conclusions de notre théorème résultent.

Remarque. Soit v le vecteur propre correspondant à $1/\lambda$. De $Av = 1/\lambda\, v \Leftrightarrow A(-v) = -1/\lambda(-v)$, il résulte que le vecteur propre qui correspond à $-1/\lambda$ est $-v$. Donc, il existe une unique direction caractéristique en p qui correspond à chaque $\lambda > \lambda_0$.

Si la condition (2.4) est remplacée par :

(2.6) *l'image de A est contenue dans un sous-espace de dimension finie,* en employant le théorème 2 de [1] on obtient.

Théorème 2.2. *Supposons que (2.4) et (2.6) sont satisfaites. Il existe un nombre réel $\lambda_0 > 0$ tel que pour chaque $\lambda > \lambda_0$, l'ensemble $[-1/\lambda, 0) \cup (0, 1/\lambda]$ est contenu dans l'ensemble des valeurs propres de A et pour chaque valeur propre il existe un vecteur propre de A.*

Cas particulier. Soit ∇^1 une connexion localement plate. Donc, il existe une carte autour de p telle que $\overset{1}{\Gamma}_{\varphi} \equiv 0$. Si ∇^2 a les propriétés :

1) l'application $v \to \overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v)$, $v \in \mathbf{M}$, est compacte.

2) $\|\Gamma_{\varphi(p)}(v, v)\| \geqslant \alpha \|v\|^2$, $\alpha > 0$,

alors la paire (∇^1, ∇^2) admet les directions caractéristiques. Si ∇^2 est une connexion constante, c'est-à-dire l'application $v \to \overset{2}{\Gamma}_{\varphi(p)}(v, v)$ est une application constante non nulle, la paire (∇^1, ∇^2) admet un continu de directions caractéristiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cronin, J. — *Eigenvalues of Some Nonlinear Operators*. J. of Math. Analysis and Appl. Vol. 38, Nr. 3 (1972), p. 659—667.
2. Flaschel, P. und Klingenberg, W. — *Riemannsche Hilbertmanningfaltigkeiten. Periodische Geodätische*. Lecture Notes in Math., Vol. 282, Springer-Verlag (1972).
3. Isac, G. et Nicolescu L. — *Directions caractéristiques et analyse spectrale des opérateurs quadratiques*. Ann. Fac. Sci. de Kinshasa, Zaire Section Math.—Phys., Vol. I (1975), p. 227—241.

Reçu le 28.VI.1978

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
R. S. Roumanie

Faculté de Mathématiques
Université de Bucharest
R. S. Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

CR-SUBMANIFOLDS OF GENERALIZED COMPLEX SPACE FORMS

BY

MANUEL BARROS and FRANCISCO URBANO

§ 1. Introduction. Let M be a Riemannian submanifold immersed in $\overline{M}$. At each point $p \in M$, let $\mathfrak{D}_p$ be the maximal holomorphic subspace of the tangent space T_pM, i.e. $J\mathfrak{D}_p = \mathfrak{D}_p$. If the dimension of $\mathfrak{D}_p$ is the same for all $p \in M$, we have a holomorphic distribution $\mathfrak{D}$ on M.

Recently in [2], A. Bejancu introduced the notion of a *CR*-submanifold of $\overline{M}$. M is a *CR*-submanifold of an almost Hermitian manifold $\overline{M}$ if there exists on M a C^∞ holomorphic distribution $\mathfrak{D}$, such that its orthogonal complement $\mathfrak{D}^\perp$ is totally real in $\overline{M}$ (6), i.e. $J\mathfrak{D}_p^\perp \subset T_p^\perp M$, where $T_p^\perp M$ is the normal space at p.

In the present paper, we generalized some results obtained in [2], [3] and [4] for *CR*-submanifolds of a generalized complex space form. In §3 we give a characterization of CR-submanifolds of generalized complex space forms in terms of the restriction of the curvature. In §§ 4 and 5, we study different kinds of sectional curvature, Ricci tensor and scalar curvature of a *CR*-submanifold of a generalized complex space form. Finally in §6, totally umbilical *CR*-submanifolds are studied in detail.

§2. Preliminaries. Let M be a Riemannian submanifold in an almost Hermitian manifold $\overline{M}$. We denote by ∇ (respectively, $\overline{\nabla}$) covariant differentiation with respect to the metric on M (respectively, on $\overline{M}$). The curvature tensor R of ∇ is given by

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

and we denote by $\overline{R}$ the curvature tensor with respect to $\overline{\nabla}$. We write

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Moreover the sectional curvature of M is

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)\, g(Y, Y) - g(X, Y)^2}. \tag{2.1}$$

The second fundamental form σ is given by