Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

SUR LES ESPACES À CONNEXION CONSTANTE ATTACHÉS AUX ALGÈBRES DE JORDAN SIMPLES ET CENTRALES. I

PAR

IULIAN POPOVICI

1. Introduction. G. Vrănceanu a défini et étudié les connexions affines constantes [13], [14], [15] (voir aussi [10]), dans le contexte de l'espace numérique réel n-dimensionnel R^n. L'auteur de ce travail a étudié dans [8] un type plus général de connexion affine constante, qui sera présentée ici dans la définition 1.1. Nous adopterons la terminologie et les notations de [3], ce qui conduit à quelques différences par rapport aux formules de [13], [14], [15], [16], [10] et [12].

Étant donnée une variété différentiable réelle M^n d'une certaine classe et de dimension finie n, chaque carte $x : U \to \mathrm{R}^n$ de M^n, avec U un ouvert connexe de M^n, sera identifiée au système correspondant de fonctions des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$. On supposera que M^n est connexe, séparée ou non et on désignera, pour M^n analytique ou de classe C^∞, par $\mathfrak{X}(M^n)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M^n et par $\mathfrak{X}'(M^n)$ l'espace des champs de vecteurs définis sur les ouverts connexes de M^n. Par convention, les indices latins h, i, j, k, p, q, r prendront les valeurs $1, \ldots, n$ et les indices grecs ρ, λ, μ, ν prendront, pour $n \geqslant 2$, les valeurs $2, \ldots, n$.

Soit (M^n, ∇) un espace à connexion linéaire, avec M^n une variété de classe C^2 et soit A une algèbre réelle de dimension n, ayant les constantes de structure Γ^i_{jk} dans une base quelconque $b = (b_1, \ldots, b_n)$. La multiplication de A est donnée par :

$$b_j b_k = \Gamma^i_{jk} b_i. \tag{1.1}$$

Supposons que M^n admet un atlas β, tel que chaque carte $x \in \beta$ vérifie la propriété suivante :

(1.2) les composantes de la connexion ∇, relatives à la carte x, sont constantes et coïncident avec les Γ^i_{jk}.

On montre que (1.2), ainsi que les autres propriétés données dans la suite, sont indépendantes par rapport à la base b de A. De plus, l'*atlas* β *définit sur* M^n *une structure de variété analytique réelle compatible avec la connexion linéaire* ∇ [8] *et nous supposerons que* (M^n, ∇) *est muni de cette structure.*

Définition 1.1. *Dans les hypothèses ci-dessus, on dit que le triplet* (M^n, ∇, A) *est un espace à connexion constante de b-atlas* β. *L'ensemble* β^*, *de toutes les cartes* x *de* M^n *vérifiant* (1.2), *est appelé le b-atlas maximal de* (M^n, ∇, A). *Si* A' *est une algèbre réelle quelconque, isomorphe à l'algèbre* A, *convenons d'identifier les espaces à connexion constante* (M^n, ∇, A) *et* (M^n, ∇, A'). *On dit que l'espace à connexion constante* (M^n, ∇, A) *est de la première, de la deuxième, ou de la troisième espèce, selon que :*

(1.3) β^* *est un atlas affine de* M^n ;

(1.4) β^* *n'est pas affine, mais il contient un atlas affine* β *de* M^n ;

(1.5) β^* *ne contient aucun atlas affine de* M^n, *en particulier* β^* *n'est pas affine.*

Remarque. Une comparaison avec la proposition 2.3 de [8], montre que la notion ci-dessus d'espace à connexion constante équivaut à celle d'espace réel à connexion constante (ou d'espace réel de Vrănceanu) au sens de [8].

On a la propriété suivante :

(1.6) les transformations de coordonnées de l'atlas β^* de (1.3), ainsi que celles de l'atlas β de (1.4), sont induites par le produit semidirect (Aut A). T_n, où T_n s'identifie, à l'aide de la base b, au groupe des translations de l'espace R^n.

Un problème important est la construction d'espaces à connexion constante pour chacun des cas (1.3), (1.4) et (1.5). Dans [8] on indique des exemples pour les derniers deux cas. *Dans ce travail on construit une classe d'espaces à connexion constante* (M^n, ∇, A) *de la première espèce, à savoir celle où* A *est une algèbre de Jordan réelle quelconque de type* **D** (voir par exemple [1]). Les résultats établis dans ce travail ont été annoncés, sans démonstrations, dans [6] et [7]. Ils sont présentés ici sous une forme plus systématique et précise.

Définition 1.2. *Soit* (M^n, ∇, A) *un espace à connexion constante de la première espèce, avec* A *une algèbre à élément unité* 1, *soit* $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *une base de* A *telle que* $b_1 = 1$ *et soit* β^* *le b-atlas maximal de* (M^n, ∇, A). *D'après* (1.6), *on obtient le champ* $C \in \mathfrak{X}(M^n)$ *de composantes* $(1, 0, \ldots, 0)$ *par rapport aux cartes de* β^*. *On dit que* C *est le champ unité de* (M^n, ∇, A). *Si* C *est régulier au sens de Palais* [5], *on dit que* (M^n, ∇, A) *est régulier*

Remarque. Cette condition de régularité s'exprime par l'existence d'un b-atlas β, tel que l'intersection entre chaque feuille tangente à C et chaque voisinage de coordonnées de β soit un segment, éventuellement vide. Pour un tel espace, on considère le feuilletage M^{n-1} de C qui est une variété analytique réelle, ainsi que la surjection canonique $M^n \to M^{n-1}$ qui est de rang $n - 1$.

Une algèbre A sur un corps commutatif K est dite *algèbre de Jordan*, si A est commutative et si l'on a la „loi d'associativité généralisée" suivante :

$$u^2 (v\, u) = (u^2 v)\, u \text{ quels que soient } u, v \in A. \tag{1.7}$$

A. A. Albert a classifié les algèbres de Jordan simples et centrales [2], de dimension finie sur K de caractéristique zéro (voir [1]). Nous indiquons ici le type **D** de cette classification dans le cas réel.

Associons, à chaque paire d'entiers m et n, $0 \leqslant m \leqslant n - 1$, $n > 2$,

l'algèbre réelle $D(m, n)$ de dimension n, ayant la multiplication suivante dans une base $s = (s_1, \ldots, s_n)$:

$$\begin{cases} s_1 s_i = s_i s_1 = s_i,\ s_\lambda s_\mu = -\varepsilon_\lambda \delta_{\lambda\mu} s_1 ; \\ \varepsilon_\lambda = 1 \text{ pour } 2 \leqslant \lambda \leqslant n - m,\ \varepsilon_\lambda = -1 \text{ pour } n - m + 1 \leqslant \lambda \leqslant n. \end{cases} \tag{1.8}$$

L'algèbre $D(m, n)$ est à élément unité s_1 et son groupe d'automorphismes est pseudoorthogonal. Les $D(m, n)$ constituent le type **D** d'algèbres de Jordan réelles, simples et centrales, de dimension finie.

Remarque. Le choix des signes dans (1.8) correspond à l'interprétation des constantes de structure de l'algèbre $D(m, n)$, comme des symboles de Christoffel associés à certaines métriques pseudoriemanniennes (voir le paragraphe 4) ; ces métriques sont riemanniennes si et seulement si $m = 0$. D'autre part, les seules algèbres de Jordan réelles de type **D**, ayant tous les éléments non nuls inversibles, sont les $D(0, n)$.

Dans le paragraphe 2 on étudie les deux classes suivantes d'objets géométriques :

(1.9) la classe $\mathfrak{D}$ des espaces à connexion constante (M^n, ∇, A), A étant une algèbre de Jordan réelle quelconque de type **D** ;

(1.10) la classe $\mathfrak{L}$ des triplets (M^n, C, g), où (M^n, g) est un espace pseudoriemannien plat avec $n > 2$ et $C \in \mathfrak{X}(M^n)$, tels que g soit une métrique invariante par rapport aux transformations infinitésimales correspondant au champ C et $g(C) = 1$.

On montre que chaque espace $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ est de première espèce et on construit une bijection $\theta : (M^n, \nabla, A) \to (M^n, C, g)$, avec C le champ unité de (M^n, ∇, A), entre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{L}$. La connexion ∇ est symétrique, car l'algèbre A est commutative, mais ∇ n'est pas plate, car A est non associative (voir par exemple [8, proposition 3.4]).

Dans le paragraphe 3 on considère

(1.11) la classe $\mathfrak{D}_r$ des espaces réguliers à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ (voir la définition 1.2).

On montre que θ induit une bijection entre $\mathfrak{D}_r$ et la classe des espaces fibrés à métrique pseudoriemannienne invariante plate, au sens de Yano et Ishihara [18], de dimension plus grande que deux. On indique, pour g de signature $(+, +, +, +, -)$, la signification physique d'un espace $(M^5, \nabla, A) \in \mathfrak{D}_r$ dans le contexte de la théorie unitaire de Kaluza-Klein [11], en utilisant les considérations faites dans [9, sect. 5].

V. V. Wagner a étudié dans [17] les espaces riemanniens ayant les symboles de Christoffel de seconde espèce constants et il a obtenu ainsi une classe importante de métriques. G. Vrănceanu a introduit dans [16] la notion d'espace de Wagner, en considérant ces métriques dans le cas pseudoriemannien. Il y a deux formes canoniques pour les métriques des espaces de Wagner, appelées dans [10] non isotropes, resp. isotropes.

Dans le paragraphe 4 on étudie

(1.12) la classe $\mathfrak{D}_w$ des espaces à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$, avec ∇ la connexion de Levi-Civita d'une métrique pseudoriemannienne sur M^n.

La classe $\mathfrak{D}_w$ s'identifie d'une manière canonique à la classe des espaces de Wagner non isotropes, considérés d'un point de vue global.

On montre que $\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_w \neq \emptyset$, $\mathfrak{D}_w - \mathfrak{D}_r \neq \emptyset$, $\mathfrak{D}_r \cap \mathfrak{D}_w \neq \emptyset$ et $\mathfrak{D}_r$, $\mathfrak{D}_w$ sont des sous-classes propres de $\mathfrak{D}$. On détermine la structure d'un espace quelconque à connexion constante (M^n, ∇, A) contenu dans $\mathfrak{D}_r$ (ou dans $\mathfrak{D}_w$), séparé (resp. non séparé), sous l'hypothèse que les feuilles tangentes à son champ unité soient complètes (resp. séparées). Dans le dernier cas, (M^n, ∇, A) appartient aussi à $\mathfrak{D}_r$.

Les résultats de ce travail, ainsi que ceux de [8] et [9], ont été présentés et discutés au Séminaire de Géométrie différentielle auprès de la Faculté de Mathématiques de Jassy. L'auteur exprime ses chaleureux remerciements aux Professeurs R. Miron et V. Oproiu de cette Faculté, dont les suggestions ont été très utiles.

2. L'étude de la classe $\mathfrak{D}$ des espaces (1.9). Théorème 2.1. *Tout espace à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ est de première espèce.*

Démonstration. En supposant que $A \approx D(m, n)$, ses constantes de structure Γ^i_{jk}, dans une base $s = (s_1, \ldots, s_n)$ vérifiant (1.8), sont données par :

$$\Gamma^i_{j1} = \Gamma^i_{1j} = \delta^i_j,\ \Gamma^1_{\mu\nu} = -\varepsilon_\mu \delta_{\mu\nu},\ \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0,\ \varepsilon_\mu = \pm 1. \tag{2.1}$$

D'après (1.2), les relations (2.1) définissent aussi les composantes de la connexion ∇, relatives aux cartes du s - atlas maximal σ^* de l'espace à connexion constante (M^n, ∇, A). Les composantes R^h_{ijk} du tenseur de courbure R de la connexion ∇, relatives aux cartes de σ^*, sont les suivantes :

$$R^1_{ijk} = R^k_{1jh} = R^h_{i1k} = R^h_{ij1} = 0, \tag{2.2}$$

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} = \varepsilon_\lambda \,.\, (\delta^\rho_\nu \delta_{\lambda\mu} - \delta^\rho_\mu \delta_{\lambda\nu}). \tag{2.3}$$

Soient maintenant deux cartes quelconques $x, x' \in \sigma^*$, ayant les domaines de définition non disjoints. Alors les fonctions $c^i_j = \partial x'^i / \partial x^j$ satisfont aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial c^i_j}{\partial x^k} = \Gamma^h_{jk} c^i_h - \Gamma^i_{pq} c^p_j c^q_k, \tag{2.4}$$

$$R^r_{ijk} c^h_r - R^h_{pqr} c^p_i c^q_j c^r_k = 0. \tag{2.5}$$

En prenant $h = 1$, $i = \lambda$, $j = \mu$, $k = \nu$ dans (2.5) et tenant compte de (2.2), il vient :

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} c^1_\rho = 0. \tag{2.6}$$

D'après (2.3), la relation (2.6) donne, pour $\lambda = \mu \neq \nu$:

(2.7) $c^1_\nu = 0$ *quelles que soient les valeurs de l'indice* $\nu = 2, \ldots, n$.

En prenant $i = 1$, $j = \mu$, $k = 1$ dans (2.4) et tenant compte de (2.1) et de (2.7), il vient :

$$\sum_\nu \varepsilon_\nu c^\nu_\mu c^\nu_1 = 0. \tag{2.8}$$

Les relations (2.7) et (2.8) nous donnent :

(2.9) $c^\nu_1 = 0$ *quelles que soient les valeurs de l'indice* $\nu = 2, \ldots, n$.

Prenant $i = \lambda$, $j = 1$, $k = \nu$ dans (2.4) et tenant compte de (2.1), (2.7) et (2.9), il vient :

$$c^\lambda_\nu - c^1_1 c^\lambda_\nu = 0, \text{ donc } c^1_1 = 1. \tag{2.10}$$

En prenant $i = \lambda$, $j = \mu$, $k = 1$ et puis $i = \lambda$, $j = \mu$, $k = \nu$ dans (2.4) et tenant compte de (2.1), (2.7), (2.9) et (2.10), il vient :

(2.11) $c^\lambda_\mu =$ const. *quelles que soient les valeurs des indices* λ *et* μ.

D'après (2.7), (2.9), (2.10) et (2.11), les fonctions c^i_j sont constantes, donc la transformation de coordonnées $x' \circ x^{-1}$ de σ^* est affine. Les cartes x et x' étant arbitraires, il en résulte que σ^* est un atlas affine. Q.E.D.

Définissons, à l'aide des constantes ε_λ de (1.8), les transformations affines suivantes de R^n :

$$x'^1 = x^1 + c^1,\ x'^\lambda = c^\lambda_\mu x^\mu + c^\lambda,\ \sum_\nu \varepsilon_\nu c^\nu_\lambda c^\nu_\mu = \varepsilon_\lambda \delta_{\lambda\mu},\ \varepsilon_\lambda = \pm 1, \tag{2.12}$$

qui constituent un produit semi-direct $O(m, n) \,.\, T_n$. Le groupe pseudoorthogonal $O(m, n)$ est donné par les transformations (2.12) avec $c^i = 0$, tandis que T_n est le groupe des translations de l'espace R^n. Le groupe des automorphismes de l'algèbre $D(m, n)$ coïncide avec $O(m, n)$. D'après (1.6), le théorème 2.1 conduit au

Corollaire 2.2. *Soit un espace à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ de s-atlas maximal σ^*, où la base s vérifie (1.8) pour $A \approx D(m, n)$. Alors les transformations de coordonnées de σ^* sont induites par le groupe $O(m, n) \,.\, T_n$.*

Remarque. Si l'on remplace les ε_λ de (1.8) et de (2.1) par $-\varepsilon_\lambda$, on obtient une autre algèbre $\bar{A} \approx D(n - 1 - m, n)$, ayant les constantes de structure Γ'^i_{jk} dans la base s, ainsi qu'une autre connexion linéaire $\bar{\nabla}$ de M^n, ayant les composantes Γ'^i_{jk} relatives aux cartes de σ^*. Remarquons que les groupes $O(m, n)$ et $O(n - 1 - m, n)$ sont isomorphes. D'après (1.2), le triplet $(M^n, \bar{\nabla}, \bar{A})$ est un espace à connexion constante contenu dans $\mathfrak{D}$. On obtient ainsi l'involution τ sur $\mathfrak{D}$ suivante :

$$\tau : (M^n, \nabla, D(m, n)) \to (M^n, \bar{\nabla}, D(n - 1 - m, n)). \tag{2.13}$$

Considérons maintenant la classe $\mathfrak{Q}$ des objets (1.10). Étant donné un espace pseudoriemannien plat (M^n, g), $n > 2$, muni d'un champ $C \in \mathfrak{X}(M^n)$, remarquons d'abord que $(M^n, C, g) \in \mathfrak{Q}$ si et seulement si

(2.14) la *dérivée de Lie* $L_C g$ *est nulle et* $g(C) = 1$.

Théorème 2.3. *Un triplet (M^n, C, g), avec (M^n, g), $n > 2$, un espace pseudoriemannien analytique et $C \in \mathfrak{X}(M^n)$, est contenu dans $\mathfrak{Q}$ si et seulement si*

$$g = (d x^1)^2 + \sum_{\lambda=2}^{n} \varepsilon_\lambda (d x^\lambda)^2,\ \varepsilon_\lambda = \pm 1 \text{ et } C = C(1, 0, \ldots, 0) \tag{2.15}$$

par rapport à chaque carte x d'un atlas α de M^n, les ε_λ étant précisées dans (1.8). Si l'on considère l'atlas α^* de M^n, constitué par toutes les cartes x de M^n vérifiant (2.15), alors les transformations de coordonnées de α^* sont induites par $O(m, n) \,.\, T_n$.

Démonstration. Si M^n admet un atlas α dont les cartes satisfont aux conditions (2.15), il est clair que $(M^n, C, g) \in \mathfrak{Q}$ et les transformations de coordonnées de α^* sont induites par $O(m, n) \,.\, T_n$.

Supposons maintenant que $(M^n, C, g) \in \mathfrak{L}$ et choisissons, au voisinage de chaque point de M^n, une carte $y = (y^1, \ldots, y^n)$ telle que les composantes de C relatives à y soient $(1, 0, \ldots, 0)$. En désignant par g_{ij} et Γ^i_{jk} les composantes de g resp. ses symboles de Christoffel de seconde espèce relatifs à y, les conditions (2.14) nous donnent :

$$g_{ij} = g_{ij}(y^2, \ldots, y^n) \text{ et } g_{11} = 1, \text{ donc } \Gamma^i_{11} = 0. \tag{2.16}$$

D'autre part, le système

$$\frac{\partial^2 y'^i}{\partial y^j \partial y^k} = \Gamma^h_{jk} \frac{\partial y'^i}{\partial y^h} \tag{2.17}$$

est complètement intégrable, car la métrique g est plate. En tenant compte de la dernière relation (2.16), il résulte que chaque solution $y' = y'(y^1, \ldots, y^n)$ du système (2.17) est de la forme :

$$y'^i = y^1 \cdot \varphi^i(y^2, \ldots, y^n) + \psi^i(y^2, \ldots, y^n). \tag{2.18}$$

On obtient ainsi, au voisinage de chaque point de M^n, une carte y', où les composantes g'_{ij} de g relatives à y' satisfont aux conditions :

$$g'_{hk} \frac{\partial y'^h}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y'^k}{\partial y^j} = g_{ij}, \; g'_{hk} = \text{const.} \tag{2.19}$$

D'après (2.18), les relations (2.19) s'écrivent :

$$g'_{ij} \varphi^i \varphi^j = g_{11}; \tag{2.20}$$

$$y^1 g'_{ij} \varphi^i \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^\mu} + g'_{ij} \varphi^i \cdot \frac{\partial \psi^j}{\partial y^\mu} = g_{1\mu}; \tag{2.21}$$

$$(y^1)^2 g'_{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^\lambda} \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^\mu} + 2y^1 g'_{ij} \frac{\partial \psi^i}{\partial y^\lambda} \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^\mu} + g'_{ij} \frac{\partial \psi^i}{\partial y^\lambda} \cdot \frac{\partial \psi^j}{\partial y^\mu} = g_{\lambda\mu}. \tag{2.22}$$

D'après (2.16) et (2.18), les g_{ij}, φ^i, ψ^i sont indépendants par rapport à y^1. Les g'_{ij} étant constants, les relations (2.21) et (2.22) conduisent à

$$g'_{ij} \varphi^i \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^\mu} = 0, \; g'_{ij} \left(y^1 \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^\lambda} + \frac{\partial \psi^i}{\partial y^\lambda} \right) \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^\mu} = 0, \tag{2.23}$$

d'où les composantes φ^i de C relatives à y' sont constantes, car la matrice

$$\left(\varphi^i, \; y^1 \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^\lambda} + \frac{\partial \psi^i}{\partial y^\lambda} \right)$$

est non singulière. D'après (2.20), une transformation linéaire convenable $y' \to x$ conduit à (2.15). Q.E.D.

Définition 2.1. *L'atlas α^* de M^n, donné par le théorème 2.3, est dit l'atlas adapté du triplet $(M^n, C, g) \in \mathfrak{L}$.*

Remarque. L'atlas adapté α^* d'un triplet quelconque $(M^n, C, g) \in \mathfrak{L}$ détermine uniquement la métrique g et le champ C.

Théorème 2.4. *Il existe une bijection $\theta : \mathfrak{D} \to \mathfrak{L}$ qui associe à chaque espace à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ de s-atlas maximal σ^*, où la base vérifie (1.8) pour $A \approx D(m, n)$, le triplet $(M^n, C, g) \in \mathfrak{L}$ d'atlas adapté σ^*. Le champ unité de (M^n, ∇, A) coïncide avec C.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.2, le s-atlas maximal σ^* de $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ définit une métrique pseudoriemannienne plate g unique sur M^n et un champ $C \in \mathfrak{X}(M^n)$ unique, qui vérifient (2.15) avec les ε_λ donnés par (1.8). Tenant compte de la définition 1.2, C est le champ unité de (M^n, ∇, A). Le théorème 2.3 montre que $(M^n, C, g) \in \mathfrak{L}$ et son atlas adapté contient σ^*.

Étant donnée une carte quelconque $x \in \alpha^*$, choisissons une carte $y \in \sigma^*$ telle que l'intersection des domaines de x et y soit non vide et connexe. D'après le théorème 2.3, l'application $x \circ y^{-1}$ est induite par une transformation de $O(m, n)$. T_n et alors les composantes de ∇ relatives à y sont données aussi par (1.8). Donc $x \in \sigma^*$, c'est-à-dire $\sigma^* = \alpha^*$.

On obtient ainsi l'application $\theta : \mathfrak{D} \to \mathfrak{L}$, donnée par $(M^n, \nabla, A) \to (M^n, C, g)$. L'injectivité de θ est immédiate.

Soit maintenant un triplet quelconque $(M^n, C, g) \in \mathfrak{L}$ d'atlas adapté α^*. Alors il existe une connexion linéaire unique ∇ de M^n dont les composantes, relatives aux cartes de α^* sont de la forme (2.1). Il en résulte un espace à connexion constante $(M^n, \nabla, D(m, n))$ tel que son image par θ coïncide avec (M^n, C, g). Par suite θ est surjective. Q.E.D.

Remarque. D'après (2.14), les transformations infinitésimales déterminées par le champ unité C de l'espace à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ sont des isométries relatives à la métrique g et la connexion linéaire ∇ est invariante par ces transformations.

Définition 2.2. *La métrique pseudoriemannienne plate g, donnée par le théorème 2.4, est dite la métrique réduite de l'espace à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$.*

Remarque. L'involution τ sur $\mathfrak{D}$ donnée par (2.13) définit l'involution sur $\mathfrak{L}$ suivante :

$$\theta \circ \tau \circ \theta^{-1} : (M^n, C, g) \to (M^n, C, \bar{g}), \tag{2.24}$$

où ces deux triplets de $\mathfrak{L}$ ont le même atlas adapté et les deux métriques g et $\bar{g}$ correspondent aux constantes ε_λ resp. $-\varepsilon_\lambda$ dans (2.15).

3. L'étude de la classe $\mathfrak{D}$, des espace (1.11). K. Yano et S. Ishihara ont étudié dans [18] les espaces fibrés à métrique riemannienne invariante. On peut généraliser sans difficulté ces structures, ainsi que les résultats de [18], pour le cas pseudoriemannien.

Définition 3.1. *Soit une surjection $\Pi : M^n \to M^{n-1}$, de variétés analytiques réelles ou de classe C^∞, de rang maximum (égal à $n-1$). Supposons que chaque espace $\Pi^{-1}(v)$, $v \in M^{n-1}$, dit la fibre au-dessus de v, est connexe et qu'il existe un champ non singulier $C \in \mathfrak{X}(M^n)$, tangent en chaque point $u \in M^n$ à la fibre passant par u, qui est une sous-variété unidimensionnelle de M^n. S'il existe une métrique pseudoriemannienne g sur M^n pour laquelle*

$$L_C g = 0 \quad et \quad g(C) = 1, \tag{3.1}$$

on dit que $(M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g)$ *est un espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante ;* M^n *est l'espace total,* M^{n-1} *est la base,* Π *est la projection,* C *est le champ de structure et* g *est la métrique.*

Remarque. Étant donnés deux espaces fibrés à métrique pseudoriemannienne invariante $(M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g)$ et $(M^n, \bar{M}^{n-1}, \bar{\Pi}, C, g)$, alors il existe un difféomorphisme unique $f : M^{n-1} \to \bar{M}^{n-1}$ pour lequel $f \circ \Pi = \bar{\Pi}$. En utilisant un tel difféomorphisme, *convenons d'identifier deux structures quelconques de ce type.*

On considère la 1-*forme de structure* ω suivante sur M^n :

$$\omega(X) = g(C, X), \quad X \in \mathfrak{X}'(M^n). \tag{3.2}$$

À chaque champ $Y \in \mathfrak{X}'(M^{n-1})$ correspond un champ $Y^L \in \mathfrak{X}'(M^n)$, orthogonal à C et tel que $d\Pi(Y^L) = Y$. Les fibres étant connexes, il existe une métrique pseudoriemannienne unique g' sur M^{n-1}, dite la *projection* de g, pour laquelle

$$g'(Y) = g(Y^L) \quad \textit{quel que soit le champ} \quad Y \in \mathfrak{X}'(M^{n-1}). \tag{3.3}$$

On montre facilement que chaque difféomorphisme $f : M^{n-1} \to \bar{M}^{n-1}$, considéré dans la remarque concernant la définition 3.1, est une isométrie relative aux projections de g sur M^{n-1} et $\bar{M}^{n-1}$.

Théorème 3.1. *Soit* θ_0 *la restriction à* $\mathfrak{D}_r$ *de la bijection* $\theta : \mathfrak{D} \to \mathfrak{Q}$, *donnée par le théorème 2.4. Alors* θ_0 *induit une bijection*

$$\theta_r : (M^n, \nabla, A) \to (M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g) \tag{3.4}$$

entre $\mathfrak{D}_r$ *et la classe des espaces fibrés à métrique pseudoriemannienne invariante plate, de dimension* $n > 2$, *où* C *est le champ unité et* g *est la métrique réduite de l'espace à connexion constante* $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}_r$ (voir les définitions 1.2 et 2.2).

Démonstration. Remarquons d'abord que, pour chaque espace fibreé à métrique pseudoriemannienne invariante $(M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g,)$, le champ de structure C est régulier. D'après la remarque concernant la définition 3.1, la base M^{n-1} s'identifie au feuilletage de C et Π s'identifie à la surjection canonique $M^n \to M^{n-1}$ [5]. Ainsi, $(M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g)$ *est caractérisé par le triplet* (M^n, C, g), *où la variété différentiable* M^n *est munie d'un champ* $C \in \mathfrak{X}(M^n)$ *régulier et d'une métrique pseudoriemannienne* g, *vérifiant les conditions* (3.1).

Tenant compte de cette propriété générale, le théorème 3.1 est une conséquence immédiate du théorème 2.4. En effet, les conditions (3.1) et (2.14) coïncident et alors (M^n, C, g) appartient à $\mathfrak{Q}$ si et seulement si la métrique g est plate. Q.E.D.

Soit $(M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g)$ un espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante plate. D'après le théorème 2.3, g et C sont de la forme (2.15) par rapport aux cartes de l'atlas adapté α^* de $(M^n, C, g) \in \mathfrak{Q}$. Chaque carte $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \alpha^*$ définit une carte $x' = (x^2, \ldots, x^n)$ de M^{n-1}, telle que

$$\Pi : (x^1, x^2, \ldots, x^n) \to (x^2, \ldots, x^n), \tag{3.5}$$

avec la 1-forme (3.2) et la métrique (3.3) données par :

$$\omega = d\,x^1 \text{ et } g' = \sum_{\lambda=2}^{n} \varepsilon_\lambda (dx^\lambda)^2, \quad \varepsilon_\lambda = \pm 1, \tag{3.6}$$

relatives aux cartes x resp. x'. Par suite, ω est fermée et g' est plate. En utilisant les coordonnées adaptées d'un espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante [9], on établit facilement une propriété réciproque. On obtient ainsi le résultat suivant (voir aussi [18]) :

Proposition 3.2. *Etant donné un espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante* $(M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g)$, *désignons par* g' *la projection de* g *et par* ω *la* 1-*forme de structure. Alors la métrique* g *est plate si et seulement si* g' *est plate et* ω *est fermée.*

Présentons maintenant un type spécial d'espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante. Etant donné un fibré principal différentiable quelconque en cercles $M^n(M^{n-1}, K_\lambda)$, $\lambda > 0$, dont le groupe structural K_λ est un cercle de longueur λ, identifions l'algèbre de Lie du groupe K_λ à la droite réelle R et considérons la métrique riemannienne g' sur la distribution verticale de M^n qui associe, à chaque champ vertical fondamental V^* de M^n, $V \in$ R, le réel V^2. Si l'on désigne par π la projection canonique $M^n \to M^{n-1}$, alors chaque métrique pseudoriemannienne g' sur M^{n-1} et chaque connexion Γ sur M^n définissent la métrique pseudoriemannienne g suivante sur M^n :

$$g(X) = g'(d\Pi(hX)) + g''(vX) = g'(d\Pi(X)), + g''(vX) \tag{3.7}$$

où hX et vX sont les composantes horizontale resp. verticale, relatives à la connexion Γ, d'un vecteur tangent quelconque X à M^n. Les fibres de M^n sont des cercles de longueur constante, égale à λ, par rapport à la métrique g.

Désignons par C un champ vertical fondamental de M^n, pour lequel $g''(C) = 1$; remarquons qu'il existe deux tels champs, opposés l'un à l'autre. Il est facile à montrer que $(M^n, M^{n-1}, \Pi, C, g)$ *est un espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante, sa* 1-*forme de structure coïncide, au signe près avec la* 1-*forme de la connexion* Γ *et la projection de* g *coïncide avec* g'.

Dans [9] on considère les espaces fibrés à métrique pseudoriemannienne invariante dans un cadre plus général et on détermine leur structure, sous l'hypothèse que les fibres soient complètes (des cercles et des droites) par rapport aux métriques correspondantes. Cette hypothèse équivaut au fait que les fibres soient séparées et complètes, relatives à la topologie induite par l'espace total. Tenant compte du théorème 3.1 et de la proposition 3.2, alors le corollaire 10 de [9] conduit au

Théorème 3.3. *Soit un espace à connexion constante* $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}_r$, *soit* C *son champ unité, soit* g *sa métrique réduite, soit* M^{n-1} *le feuilletage de* C *et soit* Π *la surjection canonique* $M^n \to M^{n-1}$. *Si les feuilles tangentes à* C *sont complètes et si* M^n *est séparée, alors* M^{n-1} *est aussi séparée et il existe une métrique pseudoriemannienne* g' *plate sur* M^{n-1}, *telle qu'on ait l'un des deux cas suivants :* (3.8) M^n *est un fibré principal en cercles* $M^n(M^{n-1}, K_\lambda)$, Π *est la projection correspondante,* g *est donnée par* (3.7) *avec* Γ *une connexion plate sur* M^n *et* C *est un champ vertical fondamental et normé par rapport a* g'';

(3.9) $M^n = M^{n-1} \times \mathbf{R}$, $g = g' \circ d\Pi + dt^2$, *avec* Π *la première projection* $M^n \to M^{n-1}$ *et* t *la deuxième projection* $M^n \to \mathbf{R}$, *le champ* C *étant défini par* $dt(C) = 1$ *et* $d\Pi(C) = 0$.

Remarque. D'après [4], les variétés différentiables séparées M^n et M^{n-1} sont paracompactes, car elles ont des métriques pseudoriemanniennes. D'après [9], si M^n n'est pas séparée, alors les feuilles tangentes à C peuvent être complètes et mixtes (des cercles, ainsi que des droites). Si les feuilles tangentes à C sont seulement séparées, alors ce sont des cercles, des droites, des semi-droites et des segments. L'exemple suivant montre que le feuilletage M^{n-1} n'est pas nécessairement séparé pour M^n séparé.

Exemple. Considérons les trois sous-ensembles suivants de l'espace euclidien E^3 :

$$(3.10)\qquad \begin{cases} E = \{(x^1, x^2, x^3) \in E^3 : -1 \leqslant x^1 \leqslant 1,\ x^2 < 0\}, \\ E' = \{(x^1, x^2, x^3) \in E^3 : -1 < x^1 < 0,\ 0 \leqslant x^2\}, \\ E'' = \{(x^1, x^2, x^3) \in E^3 : 0 < x^1 < 1,\ 0 \leqslant x^2\}. \end{cases}$$

Soit (M^3, g) l'espace riemannien plat, obtenu de $E \cup E' \cup E''$, en identifiant chaque point $(-1, x^2, x^3) \in E$ au point $(1, x^2, x^3) \in E$. Considérons aussi les deux plans suivants de E^3 :

$$(3.11)\qquad P' = \{(x^1, x^2, x^3) \in E^3 : x^1 = 0\},\ P'' = \{(x^1, x^2, x^3) \in E^3 : x^1 = 1\}.$$

Soit (M^2, g') l'espace riemannien plat, obtenu de $P' \cap P''$, en identifiant chaque point $(0, x^2, x^3) \in P'$, $x^2 < 0$, au point $(1, x^2, x^3) \in P''$ et soit $\Pi : M^3 \to M^2$ la surjection définie par :

$$(3.12)\qquad (x^1, x^2, x^3) \to \begin{cases} (0, x^2, x^3) \text{ si } (x^1, x^2, x^3) \in E \cup E', \\ (1, x^2, x^3) \text{ si } (x^1, x^2, x^3) \in E \cup E''. \end{cases}$$

Il en résulte un espace fibré à métrique riemannienne invariante plate (M^3, M^2, Π, C, g), avec g' la projection de g, qui est l'image par θ_r d'un espace à connexion constante $(M^3, \nabla, D(0,3)) \in \mathfrak{D}_r$. Les feuilles tangentes au champ unité C sont des cercles et des segments, l'espace total M^3 est séparé, tandis que le feuilletage M^2 est non séparé.

On peut représenter l'univers physique de la théorie unitaire de Kaluza-Klein par un espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante (M^5, M^4, Π, C, a), où M^5 et M^4 sont séparées, donc paracompactes, la métrique a est de signature $(+, +, +, +, -)$, la projection a' de a est de signature $(+, +, +, -)$ et (M^4, a') est un espace-temps. Le potentiel électromagnétique est donné par la 1 - forme de structure η et le potentiel gravitationnel est donné par la métrique a'. Alors la métrique a représente le potentiel du champ unifié, électromagnétique et gravitationnel.

En supposant qu'il existe une structure d'espace fibré à métrique pseudoriemannienne invariante plate (M^5, M^4, Π, C, g), alors c'est l'image par θ_r d'un espace à connexion constante $(M, \nabla, D(1, 5)) \in \mathfrak{D}_r$, de champ unité C, de métrique réduite g et de s-atlas maximal σ^*, où la base s vérifie (1.8) pour $m = 1$ et $n = 5$. D'après le corollaire 2.2 et le théorème 2.4, les

transformations de coordonnées de σ^* sont induites par $O(1, 5)$. T_5, tandis que g et C sont de la forme (2.15) par rapport aux cartes de σ^*. À chaque carte $x \in \sigma^*$ correspond une carte x' de M^4, telle que Π et g' soient de la forme (3.5) resp. (3.6) ; de plus $\eta = dx^1 + \eta'$ quelle que soit $x \in \sigma^*$, où η' est une 1 - forme sur M^4. Par suite, *chaque carte* $x \in \sigma^*$ *peut être considérée comme un système inertial, gravitationnel et électromagnétique, dans l'univers de Kaluza — Klein* (M^5, M^4, Π, C, a).

4. L'étude de la classe $\mathfrak{D}_w$ des espaces (1.12). Remarquons d'abord que les transformations (2.12) avec $c^1 = 0$ constituent, pour les ε_λ donnés par (1.8), un produit semi-direct $O(m, n) . T_{n-1} \subset O(m, n) . T_n$, où T_{n-1} est un sous-groupe de T_n. La sous-classe $\mathfrak{D}_w$ de $\mathfrak{D}$ est caractérisée par le

Théorème 4.1. *Soit un espace à connexion constante* $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}$ *de métrique réduite* g *et soit, pour* $A \approx D(m, n)$, *une base* s *de* A *vérifiant* (1.8). *Alors* ∇ *est la connexion de Levi-Civita d'une métrique pseudoriemannienne* a *sur* M^n, *si et seulement s'il existe un* s-*atlas* σ *de* (M^n, ∇, A) *tel que :*
(4.1) *les transformations de coordonnées de* σ *soient induites par le groupe* $O(m, n) . T_{n-1}$.

La connexion ∇ *détermine, à une homothétie près, la métrique* a, *qui est globalement conforme à la métrique réduite* g :
(4.2) $a = \varepsilon e^{2x^1} g$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \neq 0$, *par rapport à chaque carte* $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \sigma$

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe un s-atlas σ vérifiant (4.1). D'après le théorème 2.4, la métrique réduite g est donnée par (2.15) dans les cartes de σ et alors (4.2) définit une métrique pseudoriemannienne a sur la variété M^n entière. D'autre part, si l'on utilise l'expression locale

$$(4.3)\qquad a = \varepsilon e^{2x^1} \left[(dx^1)^2 + \sum_{\lambda=2}^{n} \varepsilon_\lambda (dx^\lambda)^2 \right],\ \varepsilon_\lambda = \pm 1,\ \varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon \neq 0,$$

on montre facilement que les symboles de Christoffel de la seconde espèce, relatifs à chaque carte $x \in \sigma$, de la métrique a sont constants, à savoir ce sont les Γ^i_{jk} de (2.1). Ainsi, ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique a.

Supposons maintenant que ∇ est la connexion de Levi-Civita d'une métrique pseudoriemannienne a sur M^n et considérons l'équation de Ricci

$$(4.4)\qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial y^k} = \Gamma^r_{ik} a_{rj} + \Gamma^r_{jk} a_{ir},$$

relative à une carte quelconque y d'un s-atlas ρ de (M^n, ∇, A). En prenant $k = 1$ dans (4.4) et tenant compte de la première relation (2.1), on a :

$$(4.5)\qquad a_{ij} = e^{2y^1} a'_{ij},\ a'_{ij} = a'_{ij}(y^2, \ldots, y^n).$$

D'après (2.1) et (4.5), l'équation de Ricci (4.4) nous donne :

$$(4.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a'_{11}}{\partial y^\nu} = 2 a'_{1\nu},\ \dfrac{\partial a'_{1\mu}}{\partial y^\nu} = a'_{\mu\nu} - \varepsilon_\mu \delta_{\mu\nu} a'_{11}, \\ \dfrac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial y^\nu} = -\varepsilon_\nu \delta_{\lambda\nu} a'_{1\mu} - \varepsilon_\nu \delta_{\mu\nu} a'_{1\lambda}. \end{cases}$$

Tenant compte de la symétrie entre μ et ν des dérivées $\partial^2 a'_{1\lambda}/\partial y^\mu \partial y^\nu$, il résulte de (4.6) la relation suivante :

$$\delta_{\lambda\mu} a'_{1\mu} - \delta_{\lambda\nu} a'_{1\mu} = 0. \tag{4.7}$$

Si l'on choisit, pour ν fixé, $\lambda = \mu \neq \nu$ dans (4.7), on obtient $a'_{1\nu} = 0$. Alors les relations (4.6) conduisent à :

$$a'_{\lambda\mu} = \varepsilon_\lambda \delta_{\lambda\mu} a'_{11}, \; a'_{11} = \text{const.}, \; a'_{1\mu} = 0. \tag{4.8}$$

Associons, à chaque carte $y \in \rho$, $y : U_y \to \mathbf{R}^n$, la carte $x : U_x \to \mathbf{R}^n$, $U_x = U_y$, définie par :

$$x^1 = y^1 + \frac{1}{2} \ln |a'_{11}|, \; x^\lambda = y^\lambda . \tag{4.9}$$

Désignons par σ le s-atlas des cartes x. D'après (4.5), (4.8) et (4.9), la métrique a est de la forme (4.3) relative a chaque carte $x \in \sigma$, où $\varepsilon = \varepsilon_x = \pm 1$ et les ε_λ sont précisés dans (1.8). Si x, $x' \in \sigma$ avec U_x et $U_{x'}$ non disjoints, il résulte de (4.3) que $x'^1 = x^1$ et $\varepsilon'_x = \varepsilon_x$. La variété M^n étant connexe, il est facile a montrer que $\varepsilon_x = \varepsilon'_x$ quels que soient x, $x' \in \sigma$. On obtient ainsi les propriétés (4.1), (4.2).

Si $\tilde{a}$ est une autre métrique pseudoriemannienne sur M^n dont la connexion de Levi-Civita coincide avec ∇, les considérations faites plus haut montrent que $\tilde{a} = \tilde{\varepsilon}_x a$, $\tilde{\varepsilon}_x \in \mathbf{R}$, $\tilde{\varepsilon}_x \neq 0$, dans chaque carte $x \in \sigma$. On montre aussi que les $\tilde{\varepsilon}_x$ ne dépendent pas de x, donc $\tilde{a}$ et a sont homothétiques. Q.E.D.

Remarque. Si a est une métrique pseudoriemannienne quelconque sur M^n, dont la connexion de Levi-Civita coïncide avec ∇, on peut modifier le s-atlas σ tel qu'on ait (4.1) et (4.2) avec $\varepsilon = \pm 1$.

Dans [12] on établit une variante locale du théorème 4.1.

Définition 4.1. *Soit (M^n, a) un espace pseudoriemannien non plat et de classe C^2. On dit que (M^n, a) est un espace de Wagner si $\mathbf{R}^n$ a une métrique pseudoeuclidienne Q et M^n a un atlas β tels que chaque carte $x \in \beta$ vérifie les deux conditions suivantes :*
(4.10) *x est une application conforme relative aux métriques a et Q ;*
(4.11) *il existe les réels Γ^i_{jk}, qui dépendent de la carte x, tels que les symboles de Christoffel de la seconde espèce, relatifs à x, de la métrique a soient constants et coïncident avec les Γ^i_{jk}.*

Remarque. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique a. D'après le corollaire 2.5 de [8], la condition (4.11) ci-dessus induit une structure analytique réelle sur l'espace à connexion linéaire (M^n, ∇), d'atlas β. D'après (4.10), chaque espace de Wagner (M^n, a) est conformément plat.

Tenant compte de (4.10) et (4.11) dans l'équation de Ricci, la métrique a est de la forme :

$$a = a^{2c_i x^i} c_{jk} \, dx^j \, dx^k, \; c_i, c_{jk} = \text{const.}, \tag{4.12}$$

par rapport à chaque carte $x \in \beta$. Posons :

$$c = c^{ij} c_i c_j, \; c^{ij} c_{jk} = \delta^i_k . \tag{4.13}$$

Si $c \neq 0$, alors (4.12) se réduit à la forme canonique (4.3) avec $\varepsilon = \pm 1$. Si $c = 0$, on obtient de (4.12) les deux formes canoniques suivantes :

$$a = e^{2x^1} \left[2 \, dx^1 dx^2 + \sum_{\gamma=3}^{n} \varepsilon_\gamma (dx^\gamma)^2 \right], \; \varepsilon_\gamma = \pm 1 ; \tag{4.14}$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (dx^i)^2, \; \varepsilon_i = \pm 1. \tag{4.15}$$

D'après (4.13), la forme canonique (4.3) représente le cas „non isotrope", tandis que (4.14) représente le cas „isotrope", par rapport au vecteur c_i.

Remarquons que les symboles de Christoffel de la deuxième espèce Γ^i_{jk}, correspondant à la forme canonique (4.12), sont toujours constants, à savoir :

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j c_k + \delta^i_k c_j - c^i c_{jk}, \; c^i = c^{ij} c_j. \tag{4.16}$$

Le tenseur de courbure R de la métrique a a les composantes :

$$R^h_{ijk} = \delta^h_j c_i c_k + c^h c_j c_{ik} - \delta^h_k c_i c_j - c^h c_k c_{ij} - c(\delta^h_j c_{ik} - \delta^h_k c_{ij}), \tag{4.17}$$

d'où on obtient les composantes du tenseur de Ricci S associé à R :

$$S_{ij} = R^h_{ihj} = (n-1) . (c_i c_j - c . c_{ij}). \tag{4.18}$$

Dans le cas (4.3), les formules (4.16) et (4.17) se réduisent respectivement à (2.1) et (2.2), (2.3).

Si $n = 2$, toutes les composantes R^h_{ijk} de (4.17) sont nulles. Par suite, *chaque espace de Wagner (M^n, a) est de dimension $n > 2$.*

Proposition 4.2. *Un espace pseudoriemannien (M^n, a) de classe C^2 est un espace de Wagner si et seulement si $n > 2$ et (M^n, a) admet une structure analytique réelle, définie par un atlas α de M^n vérifiant l'une des conditions suivantes :*
(4.19) *il existe les constantes $\varepsilon_\lambda = \pm 1$ et $\varepsilon = \pm 1$, telles que la métrique a soit de la forme (4.3) par rapport à chaque carte $x \in \alpha$;*
(4.20) *il existe les constantes $\varepsilon_\gamma = \pm 1$, telles que la métrique a soit de la forme (4.14) par rapport à chaque carte $x \in \alpha$.*

Démonstration. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique a. Si M^n, $n > 2$, admet un atlas α vérifiant (4.19) ou (4.20), alors chaque carte $x \in \alpha$ satisfait aux conditions (4.10) et (4.11). D'autre part, dans le cas (4.3) ou (4.14) il existe des composantes non nulles R^h_{ijk} de la forme (4.17) pour $n > 2$. Par suite (M^n, a) est un espace de Wagner.

Si (M^n, a) est un espace de Wagner, alors $n > 2$ et l'atlas β de M^n vérifiant (4.10) et (4.11) induit sur (M^n, ∇) une structure analytique réelle (voir la remarque concernant la définition 4.1). À chaque carte de β correspond une carte x de M^n, telle que la métrique a soit de la forme (4.3), (4.14), ou (4.15) par rapport à x. D'après (4.18), le tenseur de Ricci S de la métrique a est de rang $n - 1$, 1, resp. 0. Par suite S est de rang localement constant, donc constant. Ainsi, les cartes x constituent un atlas α vérifiant (4.19) ou (4.20), car (M^n, a) est supposé non plat. L'expression de a étant analytique

relative à chaque carte $x \in \alpha$, il en résulte que α induit sur (M^n, a) une structure analytique réelle, qui coïncide avec celle définie par β. Q.E.D.

Le rang de S étant constant, la proposition 4.2 conduit à la décomposition suivante de la classe des espaces de Wagner, en deux sous-classes disjointes :

Définition 4.2. *Soit (M^n, a) un espace de Wagner muni de la structure analytique réelle donnée par la proposition 4.2. On dit que (M^n, a) est non isotrope ou isotrope selon qu'on a* (4.19) *resp.* (4.20).

Il est clair que la connexion de Levi-Civita d'un espace de Wagner quelconque (isotrope ou non) définit une structure d'espace à connexion constante. Dans [6] on indique d'autres détails concernant les espaces de Wagner.

Le théorème 4.1 et la proposition 4.2 conduisent au

Corollaire 4.3. *Il existe une surjection $\theta_w : (M^n, a) \to (M^n, \nabla, A)$ de la classe des espaces de Wagner non isotropes sur $\mathfrak{D}_w$, où ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique a. Deux espaces de Wagner non isotropes $(\tilde{M}^n, \tilde{a})$ et (M^n, a) ont la même image par θ_w si et seulement si $M^n = \tilde{M}^n$ et les métriques a et $\tilde{a}$ sont homothétiques.*

Remarque. Soit une base s de $A \approx D(m, n)$ vérifiant (1.8) et soit g la métrique réduite de (M^n, ∇, A). Un atlas σ de M^n satisfait à la condition (4.19) si et seulement si σ est un s-atlas de (M^n, ∇, A), tel qu'on ait (4.1) (4.2) avec $\varepsilon = \pm 1$.

On peut généraliser le théorème 8 de [6] sous la forme suivante :

Théorème 4.4. *Soit un espace quelconque à connexion constante $(M^n, \nabla, A) \in \mathfrak{D}_w$ de champ unité C, l'image par θ_w d'un espace de Wagner non isotrope (M^n, a). Si les feuilles tangentes à C sont séparées, alors ce sont des droites, des semi-droites et des segments et (M^n, ∇, A) est régulier. Si l'on considère le feuilletage M^{n-1} de C et la surjection canonique $\Pi : M^n \to M^{n-1}$, alors il existe une métrique pseudoriemannienne unique g' plate sur M^{n-1}, telle qu'on ait les deux propriétés suivantes :*

(4.21) *M^n s'identifie à un ouvert connnexe de $M^{n-1} \times \mathbf{R}$ et Π s'identifie a la restriction de la première projection $M^{n-1} \times \mathbf{R} \to M^{n-1}$ à M^n ;*

(4.22) *$a = \varepsilon e^{2t} (g' \circ d\Pi + dt^2)$, avec $\varepsilon = \pm 1$ et t la restriction de la deuxième projection $M^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a M^n, le champ C étant défini par $dt\ (C) = 1$ et $d\Pi\ (C) = 0$.*

Démonstration. Considérons une base s de $A \approx D(m, n)$ vérifiant (1.8) et un s-atlas σ de M^n, ∇, A), vérifiant (4.1) et tel que, pour chaque $x \in \sigma$, $x = (x^1, \ldots, x^n) : U_x \to \mathbf{R}^n$, l'ouvert $x(U_x)$ soit un cube, ayant les côtés parallèles aux axes de coordonnées. Soit I_x l'intervalle ouvert $x^1(U_x)$ de R. Désignons par $\xi : M^n \to \mathbf{R}$ la fonction analytique ouverte qui associe, à chaque point $u \in M^n$, le réel $x^1(u)$ pour chaque carte $x \in \sigma$ avec $u \in U_x$.

La restriction ξ_v de ξ à une feuille quelconque v tangente à C est aussi ouverte et donc v n'est pas un cercle. Alors ξ_v est une application monotone de la droite, ou de la semi-droite, ou du segment v dans R. Il résulte que l'image réciproque par ξ_v d'un intervalle I_x quelconque, $x \in \sigma$, avec $U_x \cap v \neq \varnothing$, est un intervalle ouvert J_x de v. D'autre part, ξ_v réalise une surjection de $U_x \cap v$ sur I_x et donc $U_x \cap v$ coïncide avec J_x. Ainsi, l'espace à connexion constante (M^n, ∇, A) est régulier.

Pour établir la propriété (4.21), on identifie M^n à son image par l'application suivante qui est analytique, injective et de rang n :

$$f : M^n \to M^{n-1} \times \mathbf{R}, f(u) = (\Pi(u), \xi(u)), d\xi(C) = 1. \tag{4.23}$$

Tenant compte du fait que l'image par f de la métrique réduite g de (M^n, ∇, A) est de la forme $g' \circ d\Pi + dt^2$, la propriété (4.22) est une conséquence immédiate du théorème 4.1. Q.E.D.

Remarque. Le feuilletage M^{n-1} n'est pas nécessairement séparé pour M^n séparé. En effet, l'intersection entre l'espace M^3, construit dans l'exemple du paragraphe 3 et le plan P', donné par (3.11), définit un espace séparé à connexion constante contenu dans $\mathfrak{D}_w$, dont le feuilletage n'est pas séparé.

Si les feuilles tangentes à C sont complètes relatives à la métrique réduite g, alors elles ne sont pas complètes relatives à la métrique a ; dans ce cas, (M^n, ∇, A) est défini par (3.9) et les feuilles sont des droites.

Dans [10] on identifie les classes $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_w$, mais cette identification a seulement un caractère local. En effet, d'après les théorèmes 3.3 et 4.4, *les classes $\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_w$ et $\mathfrak{D}_r \cap \mathfrak{D}_w$ sont non vides*, car elles contiennent les espaces définis par (3.8) resp. (3.9).

D'autre part, si l'on identifie, dans l'espace euclidien E^3, chaque point (x^1, x^2, x^3), avec $x^1 > 0$ et $x^2 > 0$, au point $(x^1, -x^2, x^3)$, on obtient un espace à connexion constante de $\mathfrak{D}_w$, dont le champ unité $C(1, 0, 0)$ est non régulier et les feuilles tangentes à C sont ou bien séparées, ou non séparées Par suite, *la classe $\mathfrak{D}_w - \mathfrak{D}_r$ est non vide.* L'exemple suivant nous montre que *$\mathfrak{D}_r$ et $\mathfrak{D}_w$ sont des sous-classes propres de $\mathfrak{D}$.*

Exemple. Considérons les deux sous-ensembles suivants de E^3 :

$$\begin{cases} F = \{(x^1, x^2, x^3) \in E^3 : 0 < x^1 < 1\}, \\ F' = \{(x^1, x^2, x^3) \in E^3 : 1 < x^1 < 3,\ x^2 < 0\}. \end{cases} \tag{4.24}$$

Si l'on identifie, dans $F \cap F'$, chaque point $(x^1, x^2, x^3) \in F'$, avec $x^1 < 2$ au point $(x^1 - 1, x^2, x^3) \in F$ et chaque point $(x^1 x^2, x^3) \in F'$, avec $x^1 > 2$, au point $(x^1 - 2, -x^2, x^3) \in F$, on obtient un espace séparé à connexion constante (M^3, ∇, A), $A \approx D(0, 3)$, dont le champ unité $C(1, 0, 0)$ n'est pas régulier. D'après le théorème 4.4, $(M^3, \nabla, A) \notin \mathfrak{D}_w$ et donc $(M^3, \nabla, A) \in \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_w$.

Soient $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}'_r$ et $\mathfrak{D}'_w$ les classes des espaces séparés contenus dans $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_r$ resp. $\mathfrak{D}_w$. D'après les considérations faites plus haut, *on a les inclusions strictes $\mathfrak{D}'_w \subset \mathfrak{D}'_r \subset \mathfrak{D}'$.*

Un problème ouvert est l'étude des espaces de Wagner isotropes, par analogie au cas non isotrope développé ici.

BIBLIOGRAPHIE

1. Jacobson F. D., Jacobson N. — *Classification and representation of semi-simple Jordan algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., 65 (1949), 141—169.
2. Jacobson N. — *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Providence — Rhode Island, 1968.
3. Kobayashi S., Nomizu K. — *Foundations of differential geometry.* I. John Wiley and Sons, New York — London, 1968.

4. Marathe K. B. — *A condition for paracompactness of a manifold.* J. Diff. Geom., 7 (1972), 571—573.
5. Palais R. S. — *A global formulation of the Lie theory of transformation groups.* Mem. Amer. Math. Soc., 22 (1957).
6. Popovici I. — *Espaces de Wagner du point de vue global.* Lucrările Colocviului Național de Geometrie și Topologie, Timișoara, 1977, 199—212.
7. Popovici I. — *Espaces pseudoriemanniens à connexion constante et algèbres de Jordan simples et centrales.* Actas del V Congreso de la Agrupacion de Matematicos de Expression Latina, Madrid, 1978, 357—360.
8. Popovici I. — *Contributions à l'étude des espaces à connexion constante.* Rev. Roum. Math. pures et appl., 23 (1978) 1211—1225.
9. Popovici I. — *Contributions à l'étude des espaces fibrés à métrique invariante.* Rev. Roum. Math. pures et appl., 24 (1979), 875—800.
10. Popovici I., Iordănescu R., Turtoi A. — *Gradudri simple Jordan și Lie considerate în geometria diferențială.* Editura Acad. R.S.R., București, 1971.
11. Tonnelat M. A. — *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation.* Gauthier — Villars, Paris, 1965.
12. Turtoi A. — *Espaces de Wagner et formes réelles de Jordan de type* D. Rev. Roum. Math. pures et appl., 15 (1971), 111—119.
13. Vrănceanu G. — *Leçons de géométrie différentielle.* II. Editura Acad. R.S.R., București, 1957.
14. Vrănceanu G. — *Spazi a connessione affine e le algebre di numeri ipercomplessi.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 12 (1958), 5—20.
15. Vrănceanu G. — *Propriétés globales des espaces à connexion affine.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., 2 (1958), 475—478.
16. Vrănceanu G. — *Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiune constantă.* Stud. Cerc. Math., 13 (1962), 209—224.
17. Wagner V. V. — *Riemannian spaces with constant Christoffel symbols.* Ucen. Zap. Saratov. Gos. Univ., Ser. Fiz. — Mat., 1 (14) (1938) 98—104.
18. Yano K., Ishihara S. — *Fibred spaces with invariant Riemannian metric.* Kodai Math. Sem. Rep., 1 (1967), 317—360.

Reçu le 26.XII.1978

Institut de Mathématiques
Str. Academiei 14, Bucarest
Roumanie

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

ON SOME ORBIT SPACES

BY

I. POP

Our aim is to study in this paper some topological spaces X, the covering space of which is a product $Y \times Y$.

We suppose all considered spaces connected, locally path connected and semi-locally 1-connected. Then, the problem can be reduced to the case of the universal covering spaces, according to:

Lemma. *Let X be a connected, locally path connected and semi-locally 1-connected space, such that there exists a covering projection $p : Y \times Y \to X$, with Y a connected, locally path connected and semilocally 1-connected space. Then, the universal covering space of the space X is in the shape $\tilde{X} \times \tilde{X}$, with $\tilde{X}$ a simply connected space.*

Moreover, the group $\pi_1(X, x_0)$ is isomorphic with the group of the covering transformations of the covering space $\tilde{X} \times \tilde{X}$ and $\pi_1(X, x_0)$ is a properly discontinuous group of homeomorphisms of the space $\tilde{X} \times \tilde{X}$. Since $\tilde{X} \times \tilde{X}$ is a regular covering space, X is homeomorphic with the orbit space $\tilde{X} \times \tilde{X}/\pi_1(X, x_0)$.

According to the above considerations, we consider a properly discontinuous group of homeomorphisms of a product $X \times X$, where X is a simply connected and locally compact space. Denote by $E = X \times X/G$ the orbit space.

We shall prove that under certain conditions, the space E is a locally trivial bundle, such that X is the universal covering space of the fiber and of the base space of this bundle.

Let X be as above, and let $x_0 \in X$. Denote:

$$G_{X \times x_0} = \{g \in G / g(X \times x_0) \subset X \times x_0\}, \; G_{x_0 \times X} = \{g \in G / g(x_0 \times X) \subset x_0 \times X\}.$$

Remark 1. $G_{X \times x_0} \cap G_{x_0 \times X} = \{1\}$, where 1 is the unity of the group G.

Theorem. *Let G be a properly discontinuous group of homeomorphisms of the space $X \times X$, where X is a simply connected and locally compact space. Suppose that, for a point $x_0 \in X$, the following conditions are satisfied:*

a) *There exists a homomorphism $\alpha : G \to G$, such that* $\operatorname{Im} \alpha = G_{x_0 \times X}$ *and the equality $g \cdot (x, y) = (x', y')$ implies $\alpha(g) \cdot (x_0, y) = (x_0, y')$; $g \in G$, $(x, y), (x', y') \in X \times X$;*