$$\| \tilde{h}^* \| = \| h^* \| . \tag{4.4}$$

The holomorphic sectional curvature of N^* is given by

$$H_{N^*} = 1 - \frac{1}{2} \| \tilde{h}^* \|^2 . \tag{4.5}$$

Next, using (4.4), (4.5) and the condition 2 of the theorem, we obtain

$$H_{N^*} > \frac{7}{10} . \tag{4.6}$$

Finally, the theorem follows from (4.6) and the Theorem 6.9 from [6].

REFERENCES

1. Bejancu A. — *CR submanifolds of a Kaehler manifold. I*, Proc. Amer. Math. Soc. 69 (1978), 135—142.
2. Bejancu A. — *CR submanifolds of a Kaehler manifold. II*, Trans. of Amer. Math. Soc. Vol. 250 (1979), 333—345.
3. Bejancu A. — *On integrability conditions on a CR submanifold*, An. şt. Univ. Al. I. Cuza Sect. I, tom. XXIV, (1978), 21—24.
4. Chen B. Y. — *On CR submanifolds of a Kaehler manifold*, to appear.
5. Chen B. Y. and Ogiue K. — *On totally real submanifols*, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 257—266.
6. Ogiue K. — *Differential geometry of Kaehler submanifolds*, Advances in Mathematics 13 (1974), 73—114.
7. Yano K. — *On a structure defined by a tensor field of type (1, 1), satisfying $f^3 + f = 0$*, Tensor 14 (1963), 99—109.

Received 10.XII.1978

University of Iaşi
Department of Mathematics
Iaşi, R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

COMPLEXES DE QUADRIQUES DANS P_3

PAR

D. RIMER

0. Introduction. Dans plusieurs Notes antérieures [4] — [7], nous avons étudié, dans l'espace projectif P_3, la géométrie différentielle des variétés à un ou deux paramètres, engendrées par une quadrique réelle, qui n'est pas un couple de plans.

Dans le même ordre d'idées, nous allons étudier, dans cette Note, toujours dans P_3, la géométrie différentielle des variétés à trois paramètres, de quadriques ponctuées, dont les équations ont tous les coefficients réels. Soulignons, donc, que nous considérons, comme quadrique génératrice, aussi une quadrique imaginaire ou un couple de plans.

Les variétés de quadriques qui dépendent de trois paramètres seront nommées *complexes de quadriques*. En notant par σ et n, l'espèce, respectivement la signature (l'indice négatif d'inertie) d'une quadrique [2], un complexe engendré par une quadrique (σ, n) sera noté par $V(3; (\sigma, n); P_3)$, le premier nombre 3 signifiant le nombre des paramètres dont dépend la quadrique génératrice. Il en résulte que nous allons distinguer huit types de complexes de quadriques dans P_3, selon la classification projective des quadriques.

Pour des raisons de commodité, nous étudions simmultanément les complexes dont les quadriques génératrices ont la même espèce.

En utilisant la méthode du repère mobile de Cartan, nous allons déterminer, pour chacun de ces complexes, en des conditions qui seront précisées, le système complet d'invariants, le repère Frenet, les formules Frenet, le théorème fondamental et les interprétations géométriques des éléments du repère et de certains invariants.

Comme dans l'étude des courbes ou des surfaces en P_3, il y a, — pour chaque type de quadrique génératrice — des complexes différents, ayant des formules Frenet distinctes. Dans cette Note, pour chaque type de quadrique génératrice (σ, n) fixée, nous allons étudier, un seul type de complexe, qui sera noté $V_1(3; (\sigma, n); P_3)$. L'étude d'autres complexes, ayant la même quadrique génératrice, sera fait dans un autre travail.

Dans ce qui suit, nous utilisons, plus fréquemment, les indices suivants :

$$h = 1, 2\,;\ i, j, m = 1, 2, 3\,;\ f, k = 0, 2, 3\,;\ \alpha, \beta, \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3\,;$$
$$l = \overline{1, 8}\,;\ r = \overline{1, 15}.$$

On a adopté la convention d'Einstein relativement aux indices muets

Par abus de language, nous allons nommer ellipsoïde et hyperboloïde, les quadriques irréductibles de type elliptique, respectivement de type hyperbolique.

1. Considérations générales. En rapportant l'espace P_3 à un repère fondamental

(1.1) $$R = \{B_\alpha\,;\ V\},\ [B_0, B_1, B_2, B_3] = 1,$$

avec les équations de mouvement $d\,B_\alpha = \omega_\alpha^\lambda\,B_\lambda,\ \sum_{\alpha=0}^{3} \omega_\alpha^\alpha = 0$, un point M et une quadrique Q de P_3 seront données, respectivement par :

(1.2) $$M = y^\alpha\,B_\alpha,\ Q = b_{\alpha\beta}\,y^\alpha\,y^\beta = 0,\ b_{\alpha\beta} \in R,\ b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha},\ \sum_{\alpha,\beta} |\,b_{\alpha\beta}\,| > 0.$$

Si l'on a

(1.2') $$b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\,(u_1, u_2, u_3),$$

où le point (u_1, u_2, u_3) appartient à un domaine D de P_3, alors Q, donnée par (1.2) et (1.2') est la quadrique génératrice d'un complexe de quadriques. Nous supposons que $b_{\alpha\beta}\,(u_j)$ sont des fonctions de classe $C^t (t \geqslant 1)$.

Si G_{15} est le groupe fondamental de l'espace P_3, par l'action des éléments de G_{15} sur le repère initial (1.1), on obtient la famille des repères relatifs R_{15} de P_3,

(1.3) $$R_{15} = \{A_\alpha, U\},$$

avec

(1.4) $$A_\alpha = p_\alpha^\lambda\,B_\lambda,\ \det\,(p_\alpha^\lambda) \neq 0,\ \frac{p_\alpha^i}{p_\alpha^0} \neq \text{const.},\ \frac{\sum_\alpha p_\alpha^i}{\sum_\alpha p_\alpha^0} \neq \text{const.},$$

les deux dernières conditions assurant que les quatre sommets A_α, de même que le point unitaire U dépendent chacun de trois paramètres essentiels. Notons ces 15 paramètres essentiels par t_r.

Un point M de P_3, rapporté à un repère (1.3), étant donné par

(1.5) $$M = x^\lambda\,A_\lambda,$$

de (1.5), (1.4) et (1.2), il résulte

(1.6) $$y^\beta = p_\lambda^\beta\,x^\lambda,\ x^\lambda = \tilde{p}_\alpha^\lambda\,y^\alpha,\ (p_\lambda^\beta \cdot \tilde{p}_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\beta).$$

De (1.2), (1.2') et (1.6), il résulte l'équation de la quadrique générique du complexe, rapportée à un repère (1.3).

(1.7) $$Q\,(u_j, t_r) = a_{\alpha\beta}x^\alpha\,x^\beta = 0,\ (a_{\alpha\beta} = p_\alpha^\lambda\,p_\beta^\mu\,b_{\lambda\mu}\,(u_j)\,;\ x^\alpha = \tilde{p}_\mu^\alpha\,y^\mu).$$

Alors, (1.7) est l'équation du complexe de quadriques, par rapport à un repère (1.3).

Comme dans [4], nous attachons à l'espace P_3, un espace à neuf dimensions, que nous notons S_9, un point de S_9 étant l'image d'une quadrique de P_3. Alors l'image du complexe de quadriques est une variété ponctuée à trois dimensions de S_9. En rapportant S_9 à un repère

(1.8) $$\overline{R} = \{B^{\alpha\beta}\,;\ E\},$$

un point $\overline{Q}$ de S_9 (l'image de la quadrique (1.2)), rapporté à ce repère, est $\overline{Q} = b_{\alpha\beta}\,B^{\alpha\beta}$, la notation étant déterminée par la correspondance biunivoqe : $\overline{Q} \in S_9 \leftrightarrow Q \subset P_3$. Si l'on attribuait à S_9, comme groupe fondamental le groupe G_{99} de l'espace projectif P_9, les calculs ultérieurs deviendraient trop laborieux. Il est préférable donc, d'attribuer à S_9, pour groupe fondamental, la réalisation du groupe G_{15} de P_3 comme groupe de transformations sur les quadriques. Nous notons ce groupe, par G. Les équations de G sont

(1.9) $$a_{\lambda\mu} = p_\lambda^\alpha\,p_\mu^\beta\,b_{\alpha\beta}\,(u_j),\ B^{\alpha\beta} = p_\lambda^\alpha\,p_\mu^\beta\,A^{\lambda\mu}.$$

La matrice d'une transformation (1.9_1) este d'ordre 10, de même que la matrice d'une transformation du groupe G_{99} ; mais, vu que ses éléments sont des produits de couples d'éléments de la matrice d'ordre 4 d'une transformation (1.6) du groupe G_{15} de P_3, les calculs ultérieurs se simplifient beaucoup.

Considérons le repère

(1.8') $$R_1 = \{A^{\alpha\beta}, E'\},$$

obtenu du repère (1.8), à l'aide d'une transformation (1.9). Rapportée à un repère (1.8'), l'image du complèxe (1.7) est donnée par $\overline{Q}\,(u_j\,;\,t_r) = a_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}$; $(a_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}\,(u_j\,;\,t_r)\,;\ A^{\alpha\beta} = \varphi^{\alpha\beta}\,(B^{\lambda\mu}\,;\,t_r))$. Dans le cas d'une transformation infinitésimale du repère (1.3) : $\overline{A}_\alpha \simeq A_\alpha + dA_\alpha = s_\alpha^\lambda\,A_\lambda$, on obtient : $s_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\lambda + \omega_\alpha^\lambda$ et, implicitement, $\tilde{s}_\mu^\alpha = \delta_\mu^\alpha - \omega_\mu^\alpha$, $(s_\alpha^\lambda \cdot \tilde{s}_\mu^\alpha = \delta_\mu^\lambda)$. Alors, (1.9_2) où l'on remplace $B^{\alpha\beta}, A^{\lambda\mu}, p_\alpha^\lambda$, respectivement par $A^{\alpha\beta}$, $\overline{A}^{\lambda\mu}$, s_λ^α, donne : $\overline{A}^{\lambda\mu} = \tilde{s}_\alpha^\lambda\,\tilde{s}_\beta^\mu\,A^{\alpha\beta} \simeq (\delta_\alpha^\lambda - \omega_\alpha^\lambda)\,(\delta_\beta^\mu - \omega_\beta^\mu)\,A^{\alpha\beta}$. Il résulte : $\overline{A}^{\lambda\mu} \simeq A^{\lambda\mu} - \omega_\alpha^\lambda\,A^{\alpha\mu} - \omega_\beta^\mu A^{\lambda\beta}$. En notant : $dA^{\lambda\mu} = \overline{A}^{\lambda\mu} - A^{\lambda\mu}$, on obtient les équations de mouvement du repère (1.8')

(1.10) $$dA^{\lambda\mu} = -\,\omega_\alpha^\lambda\,A^{\alpha\mu} - \omega_\beta^\mu\,A^{\lambda\beta}.$$

L'espace (S_9, G) est un espace de Klein. Il n'est pas homogène ; en effet, si deux quadriques en P_3 ne sont pas équivalentes par rapport au groupe projectif G_{15}, c'est la même chose pour les points images et le groupe G. Il faut considérer alors la partition de S_9 en concordance avec la classification des quadriques en P_3. Soient $S_{9,l}$ les huit classes que nous obtenons.

Remarque 1.1. Il y a des complexes de quadriques dont les images en S_9 sont des variétés ponctuées contenues dans un espace projectif P_q $(q < 9)$. Ces complexes ne feront pas l'objet de notre étude.

2. Les repères d'ordre zéro. Nous allons considérer pour repères d'ordre zéro d'un complexe de quadriques, les repères $\{\overline{A}_\alpha, \overline{U}\}$ qui satisfont aux conditions :

a) Le 4-point $\{\overline{A}_\alpha\}$ est autopolaire par rapport à la quadrique générique ;

b) si $\sigma = 1, 2$ ou 3 (quadriques dégénérées), alors $\overline{A}_0$, ou $(\overline{A}_0, \overline{A}_3)$, ou $(\overline{A}_0, \overline{A}_2, \overline{A}_3)$ appartiennent à l'espace projectif $S_{\sigma-1}$ déterminé par les points doubles de la quadrique ;

c) le point unitaire $\overline{U}$ est choisi de manière que, en rapportant la quadrique générique au repère $\{\overline{A}_\alpha, \overline{U}\}$, les coefficients non nuls de l'équation de la quadrique soient $+1$ ou -1.

Dans ces conditions, l'équation de la quadrique générique du complexe est

$$Q = \varepsilon_0 (\overline{x}^0)^2 + \varepsilon_1 (\overline{x}^1)^2 + \varepsilon_2 (\overline{x}^2)^2 + \varepsilon_3 (\overline{x}^3)^2 = 0, \tag{2.1}$$

où $\varepsilon_1 = +1$ et les valeurs de ε_k sont données par le tableau

(2.2)

σ	0			1		2		3
n	0	1	2	0	1	0	1	0
ε_0	1	−1	−1	0	0	0	0	0
ε_2	1	1	1	1	1	1	−1	0
ε_3	1	1	−1	1	−1	0	0	0

Vu que la quadrique générique de chacun des complexes $V(3\,;(\sigma, n)\,;P_3)$ peut être déterminée par v conditions indépendantes ($v=9$, 8, 6 ou 3 selon que $\sigma = 0$, 1, 2 ou 3), il résulte que le sousgroupe de stabilité g_w d'une quadrique générique est d'ordre $w = 15 - v$; alors, les repères d'ordre zéro, attachés à ce sousgroupe sont

$$\overline{R}_w = \{\overline{A}_\alpha, \overline{U}\}, \tag{2.3}$$

où $w = 6$, 7, 9 ou 12, selon que $\sigma = 0$, 1, 2 ou 3.

À ces repères $\overline{R}_w$ de P_3, correspondent en S_9, des repères d'ordre zéro $R_w = \{\widetilde{A}^{\alpha\beta}, \widetilde{E}\}$, attachés au sousgroupe de stabilité d'un point

$$\overline{Q} = \varepsilon_0 \widetilde{A}^{00} + \varepsilon_1 \widetilde{A}^{11} + \varepsilon_2 \widetilde{A}^{22} + \varepsilon_3 \widetilde{A}^{33} \tag{2.4}$$

de $S_{9,l}$ où $\varepsilon_1 = 1$ et ε_k sont données par (2.2). Les repères $\overline{R}_w$ (2.3) sont obtenus des repères R_{15} (1.3), en fixant un nombre de v paramètres du groupe G_{15}. Ceci implique une transformation de coordonnées

$$\overline{x}^\mu = \tilde{s}^\mu_\lambda x^\lambda,\ \tilde{s}^\mu_\lambda = f^\mu_\lambda (a_{\alpha\beta}(u_j)\,;t_1, \ldots, t_w),\ \det(\tilde{s}^\mu_\lambda) \neq 0, \tag{2.5}$$

par laquelle l'équation (1.7) est amenée à la forme (2.1). Alors l'équation (2.1) est complétée avec les conditions (2.5).

Déterminons maintenant les pfaffiens principaux d'ordre zéro. Avec les conditions de fixité d'un point $M = \overline{x}^\lambda A_\lambda$ en P_3 : $d\overline{x}^\lambda + \omega^\lambda_\mu \overline{x}^\mu = \tilde{\omega}\overline{x}^\lambda$,

[1] et la notation $\pi^\beta_\alpha = \omega^\beta_\alpha(\delta)$, la condition de fixité de la quadrique générique (2.1), $dQ = 2\rho Q$ (ρ et $\tilde{\omega}$ étant des formes de Pfaff et δ étant un élément générique de g_w) donne :

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \varepsilon_\alpha (\tilde{\omega} - \rho - \pi^\alpha_\alpha)(\overline{x}^\alpha)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\varepsilon_0 \pi^0_i + \varepsilon_i \pi^i_0)\, \overline{x}^0 \overline{x}^i - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} (\varepsilon_i \pi^i_j + \varepsilon_j \pi^j_i)\, \overline{x}^i \overline{x}^j = 0.$$

Vu l'indépendance linéaire des formes quadratiques $(\overline{x}^\alpha \overline{x}^\beta)$, $\alpha \leqslant \beta$, dans l'espace linéaire des polynômes homogènes du IIème degré en $(\overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)$, il résulte dix relations

$$\varepsilon_\alpha(\tilde{\omega} - \rho - \pi^\alpha_\alpha) = 0,\ \varepsilon_0 \pi^0_i + \varepsilon_i \pi^i_0 = 0,\ \varepsilon_i \pi^i_j + \varepsilon_j \pi^j_i = 0,\ i < j, \tag{2.6}$$

où α, i et j sont des indices libres. (2.6) donnent les pfaffiens principaux d'ordre zéro pour tous les complexes $V(3\,;(\sigma\,;n)\,;P_3)$, selon les valeurs de σ :

(2.7) $\sigma = 0$; ω^i_i, $\varepsilon_0 \omega^0_i + \varepsilon_i \omega_0$, $\varepsilon_i \omega^i_j + \varepsilon_j \omega^j_i$, $i < j$; i, j — indices libres ;

(2.8) $\sigma = 1$; ω^i_0, $\varepsilon_i \omega^i_j + \varepsilon_j \omega^j_i$, $\omega^2_2 - \omega^1_1$, $\omega^3_3 - \omega^1_1$; i, j — indices libres ;

(2.9) $\sigma = 2$; $\omega^2_2 - \omega^1_1$, $\omega^2_1 + \omega^1_2$, ω^h_0, ω^h_3 ; h — indice libre ;

(2.10) $\sigma = 3$; ω^1_0, ω^1_2, ω^1_3.

Remarque 2.1. On peut obtenir les mêmes pfaffiens principaux d'ordre zéro, en considérant la condition de fixité du point image (2.4), de S_9 : $d\overline{Q} = 2\rho\overline{Q}$, où $d\widetilde{A}^{\alpha\alpha}$ est calculé l'aide de (1.10). En effet on obtient

$$d\overline{Q} = \sum_{\alpha=0}^{3} \varepsilon_\alpha \omega^\alpha_\alpha \widetilde{A}^{\alpha\alpha} + \sum_{i=1}^{3} (\varepsilon_0 \omega^0_i + \varepsilon_i \omega^i_0)\, \widetilde{A}^{0i} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} (\varepsilon_i \omega^i_j + \varepsilon_j \omega^j_i)\, \widetilde{A}^{ij}. \tag{2.11}$$

Pour $\varepsilon_0 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \neq 0$ et donc $\sigma = 0$, si aucune de ces 10 coordonnées de $d\overline{Q}$ n'est pas nulle, $d\overline{Q}$ et donc $\overline{Q}$ appartient à un espace projectif ayant exactement 9 dimensions.

Mais si p de ces coordonnées ($1 \leqslant p \leqslant 6$) sont nulles, alors $d\overline{Q}$, et aussi $\overline{Q}$ appartiennent à un espace projectif ayant $(9-p)$ dimensions et donc l'image du complexe respectif de quadriques est située dans un espace projectif ayant moins de neuf dimensions, cas excepté de notre étude (Remarque 1.1). On pourrait considérer ainsi les complexes $V(3\,;(0\,;n)\,;P_3)$, ($n = 0$, 1, 2) dont les images sont situées dans un espace projectif ayant 8, 7, 6 ,..., 3 dimensions, ce qui impliquerait que 1, 2 ,..., 6 des coordonnées de dQ, (2.11), (et donc des pfaffiens (2.7) soient nulles ; ceci peut être réalisé analytiquement en $\sum_{t=1}^{6} C^t_9 = 465$ manières. La même remarque pour les autres complexes ($\sigma = 1, 2, 3$). Mais tous ces cas sont exceptés de notre étude.

Remarque 2.2. Le nombre des pfaffiens principaux d'ordre zéro des relations (2.7) et (2.8) coïncide avec celui obtenu dans nos Notes [4]—[7] où nous avons étudié les variétés à un ou deux paramètres de quadriques réelles (non dégénérées ou cônes quadratiques).

3. Les formules Frenet et les théorèmes fondamentaux. A) *Complexes de quadriques non dégénérées* $V_1(3;(0;n);P_3)$, $(n = 0, 1, 2)$. Les repères d'ordre zéro dépendent encore de six paramètres secondaires $(w = 6)$. Afin de les fixer, choisissons trois des 9 pfaffiens principaux d'ordre zéro de (2.7), comme pfaffiens principaux de la variété. Soient $\omega_1^1, \omega_2^2, \omega_3^3$ ces pfaffiens. Ceci implique que nous exceptons de l'étude les complexes de quadriques pour lesquels $[\omega_1^1, \omega_2^2, \omega_3^3] = 0$, où $\omega_3^3 = \lambda\omega_1^1 + \mu\omega_2^2 (\lambda^2 + \mu^2 > 0)$, ce qui signifie que pour les complexes exceptés, $d\bar{Q}$ donné par (2.11), et donc $\bar{Q}$, est situé dans un espace projectif à 8 dimensions, déterminé par les 9 points : $\varepsilon_1 \tilde{A}^{11} + \lambda\varepsilon_3 \tilde{A}^{33}$, $\varepsilon_2 \tilde{A}^{22} + \mu\varepsilon_3 \tilde{A}^{33}$, $\tilde{A}^{00}$ et $\tilde{A}^{\alpha\beta}$, $\lambda, \mu \neq 0$, $\alpha < \beta$. Nous notons les pfaffiens principaux de la variété, par $\theta^1 = \omega_1^1$; $\theta^2 = \omega_2^2$, $\theta^3 = \omega_3^3$ et nous exprimons les autres 6 pfaffiens principaux de (2.7) comme fonctions de θ^j : $\varepsilon_0\omega_1^0 + \varepsilon_1\omega_0^1 = \lambda_j\theta^j$; $\varepsilon_0\omega_2^0 + \varepsilon_2\omega_0^2 = \lambda_{3+j}\theta^j$, $\varepsilon_0\omega_3^0 + \varepsilon_3\omega_0^3 = \lambda_{6+j}\theta^j$; $\varepsilon_2\omega_3^2 + \varepsilon_3\omega_2^3 = \lambda_{9+j}\theta^j$; $\varepsilon_1\omega_3^1 + \varepsilon_3\omega_1^3 = \lambda_{12+j}\theta^j$; $\varepsilon_1\omega_2^1 + \varepsilon_2\omega_1^2 = \lambda_{15+j}\theta^j$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{18}$ sont fonctions de $t_1, \ldots, t_6$ et de u_1, u_2, u_3. Par différentiation extérieure, on obtient 18 équations. Pour $\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_9 = \lambda_{12} = \lambda_{15} = 0$, $\lambda_{18} = 1$, avec la restriction $\lambda_{16} - \lambda_{17} \neq 0$, on obtient les 6 pfaffiens principaux d'ordre 1 : $\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$. Tous les paramètres secondaires étant fixés, on a le repère Frenet de chacun des trois complexes de quadriques. Il en résulte 12 invariants du Ier ordre, $p_1, \ldots, p_{12}$ $(p_{11} \neq p_{12})$ et 18 du IIème ordre $(p_{13}, \ldots, p_{30})$.

Tous les invariants sont des fonctions regulières des trois variables u_j. Les formules Frenet sont

$$
\begin{aligned}
dA_0 &= -\sum_{i=1}^{3} \theta^i A_0 + p_{12+i}\theta^i A_1 + p_{15+i}\theta^i A_2 + p_{18+i}\theta^i A_3,\\
dA_1 &= \varepsilon_0(p_h\theta^h - p_{12+i}\theta^i) A_0 + \theta^1 A_1 + p_{21+i}\theta^i A_2 + p_{24+i}\theta^i A_3,\\
dA_2 &= \varepsilon_0(p_{2+h}\theta^h - p_{15+i}\theta^i) A_0 + (p_{10+h}\theta^h + \theta^3 - p_{21+i}\theta^i) A_1 +\\
&\quad + \theta^2 A_2 + p_{27+i}\theta^i A_3,\\
dA_3 &= \varepsilon_0(p_{4+h}\theta^h - \varepsilon_3 p_{18+i}\theta^i) A_0 + (p_{8+h}\theta^h - \varepsilon_3 p_{24+i}\theta^i) A_1 +\\
&\quad + (p_{6+h}\theta^h - \varepsilon_3 p_{27+i}\theta^i) A_2 + \theta^3 A_3.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Par différentiation extérieure de θ^j et des expressions de ω_α^β, $(\alpha \neq \beta)$ données par (3.1), on obtient 36 conditions d'intégrabilité. Aucune d'elles n'est pas finie, ce qui implique que les 30 invariants sont indépendants.

Théorème 3.1. *Dans l'espace projectif P_3 rapporté au repère fondamental $R = \{B_\lambda, V\}$, on considère sur un domaine $D \subset P_3$:*

a) *trois formes de Pfaff indépendantes, $\theta^i(u_1, u_2, u_3)$;*

b) *30 fonctions regulières indépendantes $p_s(u_1, u_2, u_3)$, $s = \overline{1, 30}$, $p_7 \neq p_8$, qui satisfont aux conditions d'intégrabilité ;*

c) *un repère d'orientation positive $R^0 = \{A_\alpha(u_j^0), U(u_j^0)\} = \{A_\alpha^0, U^0\}$; $(u_1^0, u_2^0, u_3^0) \in D$.*

Dans ces conditions il y a un complexe unique d'ellipsoïdes imaginaires, un autre d'ellipsoïdes réels et un troisième de hyperboloïdes, dont les formes invariantes et les invariants sont justement les formes et les fonctions données.

Démonstration (pour les complexes d'ellipsoïdes réels). Considérons les formules (3.1) avec $\varepsilon_3 = -\varepsilon_0 = 1$, comme un système d'équations différentielles totales, avec les fonctions inconnues $A_\alpha(u_1, u_2, u_3)$. Les coefficients de ce système, les fonctions $p_s(u_j)$, étant, par hypothèse, régulières, (3.1) a une solution unique $A_\alpha(u_j) = m_\alpha^\lambda(u_j) B_\lambda$, $(\det(m_\alpha^\lambda) = 1)$, qui, pour $u_j = u_j^0$, prend les valeurs A_α^0 données. Les fonctions obtenues, $A_\alpha(u_j)$ étant dérivables, sont continues. Parceque pour $(u_j) = (u_j^0)$, R^0 a l'orientation positive, il s'ensuit que pour chaque point $(u_j) \in D$, suffisament rapproché de (u_j^0), $R(u_j) = \{A_\alpha(u_j), U(u_j)\}$ a l'orientation positive. Nous avons obtenu ainsi, comme solution du système (3.1), la famille unique de repères d'orientation positive, $R(u_j)$. Les formules (3.1), avec $\varepsilon_3 = -\varepsilon_0 = 1$, ont été établies en utilisant l'algorithme de la méthode du repère mobile de Cartan, appliqué à un complexe d'ellipsoïdes réels. L'équation de ce complexe, rapporté à un repère R_6 est (2.1), avec (2.5), c'est-à-dire

$$
Q(u_j; t_1, \ldots, t_7) = -(\bar{x}^0)^2 + (\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^3)^2 = 0, \quad \bar{x}^\mu = \tilde{s}_\lambda^\mu x^\lambda,
$$

$$
\tilde{s}_\lambda^\mu = f_\lambda^\mu(a_{\alpha\beta}(u_j); t_1, \ldots, t_6): \det(\tilde{s}_\lambda^\mu) \neq 0.
$$

Il s'ensuit que, après avoir fixé les derniers 6 paramètres secondaires $t_1, \ldots, t_6$, l'équation du complexe d'ellipsoïdes réels, rapporté au repère Frenet, $R(u_j)$ est

$$
Q(u_j) = -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 0, \tag{3.2}
$$

$$
(X^\alpha = \tilde{m}_\lambda^\alpha(u_j) y^\lambda; \; m_\alpha^\lambda \tilde{m}_\mu^\alpha = \delta_\mu^\lambda).
$$

D'ici on obtient l'équation du complexe, rapporté au repère fondamental

$$
Q(u_j) = -(\tilde{m}_\alpha^0(u_j) y^\alpha)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\tilde{m}_\alpha^i(u_j) y^\alpha)^2 = 0. \tag{3.2'}
$$

Les fonctions $p_s(u_j)$, par l'intermède desquelles on exprime un déplacement infinitésimal des sommets du repère Frenet, sont les invariants du complexe.

D'une manière analogue on fait la démonstration pour les autres complexes de quadriques irréductibles.

B) *Complexes de cônes quadratiques* $V_1(3;(1;n);P_3)$, $(n = 0, 1)$. Les pfaffiens principaux d'ordre zéro étant donnés par (2.8), nous excluons de notre étude les complexes pour lesquels on a $[\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3] = 0$, c'est-à-dire pour lesquels on a : $\omega_0^3 = \lambda\omega_0^1 + \mu\omega_0^2$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$; les images en S_9 des complexes exceptés sont des variétés ponctuées situées dans l'espace projectif $S_8 \subset S_9$, déterminé par les points : $A^{01} + \varepsilon_3\lambda A^{03}$, $A^{02} + \varepsilon_3\mu A^{03}$, A^{33} et $A^{ij} (i < j)$. En notant $\theta^i = \omega_0^i$, $\omega_2^2 - \omega_1^1 = \lambda_i\theta^i$, $\omega_3^3 - \omega_1^1 = \lambda_{3+i}\theta^i$, $\omega_3^3 + \omega_2^2 = \lambda_{6+i}\theta^i$, $\omega_3^1 + \varepsilon_3\omega_1^3 = \lambda_{9+i}\theta^i$, $\omega_3^2 + \varepsilon_3\omega_2^3 = \lambda_{12+i}\theta^i$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{15}$ sont des fonctions régulières de $u_1, \ldots, u_3, t_1, \ldots, t_7$, on obtient, par différentiation extérieure, 15 équations. Celles-ci, pour $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_9 = \lambda_{12} = \lambda_{15} = 0$,

$\lambda_2 = 1$ avec $0 \neq \lambda_7 \neq 1/2$, donnent le repère Frenet (du premier ordre) de chacun des deux complexes de cônes quadratiques ($n = 0$ ou 1). Il résulte 8 invariants finis du Ier ordre ($p_1, \ldots, p_8$; $p_3 \neq 0$; 1/2) et 21 du IIème ordre ($p_9, \ldots, p_{29}$). On obient aussi 36 conditions d'intégrabilité, aucune d'elles n'étant pas finie. Les formules Frenet sont

$$
\begin{aligned}
dA_0 &= (-3p_{17+i}\theta^i - p_h\theta^h - \theta^2)\,A_0 + \theta^i A_i,\\
dA_1 &= p_{8+i}\theta^i A_0 + p_{17+i}\,\theta^i A_1 + p_{20+i}\,\theta^i A_2 + p_{23+i}\theta^i A_3,\\
dA_2 &= p_{11+i}\theta^i A_0 + (p_{2+h}\theta^h - p_{20+i}\theta^i)\,A_1 + (\theta^2 + p_{17+i}\,\theta^i)\,A_2 +\\
&\qquad + p_{26+i}\theta^i A_3,\ (p_3 \neq 0;\ 1/2),\\
dA_3 &= p_{14+i}\theta^i A_0 + (p_{4+h}\theta^h - \varepsilon_3 p_{23+i}\theta^i)\,A_1 + (p_{6+h}\theta^h -\\
&\qquad - \varepsilon_3 p_{26+i}\,\theta^i)\,A_2 + (p_h\,\theta^h + p_{17+i}\,\theta^i)\,A_3.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

On a immédiatement le théorème fondamental, analogue au théorème 3.1. Dans la démonstration on tient compte que l'équation du complexe rapporté à un repère d'ordre zéro, R_7, est

$$Q(u_j\,;\,t_1, \ldots, t_7) = (\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 + \varepsilon_3(\bar{x}^3)^2 = 0,\ \bar{x}^\mu = \bar{s}^\mu_\lambda\, x^\lambda, \ldots,$$

et l'on aboutit à l'équation du complexe, rapporté au repère Frenet

$$Q\,(u_j) = (X^1)^2 + (X^2)^2 + \varepsilon_3(X^3)^2 = 0\,;\ X^\mu = \tilde{m}^\mu_\alpha\, y^\alpha, \tag{3.4}$$

d'où l'on obtient l'équation du complexe, rapporté au repère fondamental

$$Q(u_j) = \sum_{i=1}^{3} (\varepsilon_i\,.\,\tilde{m}^i_\lambda\,(u_j)\,y^\lambda)^2 = 0,\ (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1). \tag{3.4'}$$

C) *Complexes de couples de plans distincts* $V_1\,(3\,;\,(2\,;\,n)\,;\,P_3)$, $(n = 0,1)$. Les pfaffiens principaux d'ordre zéro sont donnés par (2.9). En supposant $[\omega^1_0, \omega^2_0, \omega^1_3] \neq 0$, — l'interprétation des couples de plans exceptés étant analogue à celle donnée pour les complexes de quadriques irréductibles ou de cônes quadratiques exceptés — nous considérons ces trois pfaffiens comme pfaffiens principaux du complexe. En notant $\theta^1 = \omega^1_0$, $\theta^2 = \omega^2_0$, $\theta^3 = \omega^1_3$ et $\omega^2_3 = \lambda_i\theta^i$, $\omega^2_2 - \omega^1_1 = \lambda_{3+i}\theta^i$, $\varepsilon_2\omega^1_1 + \omega^1_2 = \lambda_{6+i}\theta^i$ et en continuant l'application de la méthode, on obtient 9 équations qui, pour $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_9 = 1$, donnent $\pi^3_0 = \pi^0_1 = \pi^1_1 = \pi^2_1 = \pi^3_1 = \pi^0_2 = \pi^3_2 = \pi^0_3 = \pi^3_3 = 0$. Tous les 9 paramètres secondaires étant fixés, on a le repère Frenet de chacun de ces complexes ; c'est un repère du Ier ordre. Il y a 27 invariants, tous du IIème ordre. Trois des conditions d'intégrabilité étant finies :

$$
\begin{aligned}
&2p_8 + \varepsilon_2 p_{10} - p_{22} + 2p_{26} = 0,\ p_2 + p_{11} - \varepsilon_2 p_{12} + 1 = 0,\\
&p_1 + 4p_9 + 2p_{27} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

il en restent 24 invariants finis indépendants. Toutefois, pour des raisons de commodité, nous donnons les formules Frenet en utilisant tous les 27 invariants, mais, en diverses applications il faudra tenir compte des relations (3.5). En voici les formules Frenet

$$
\begin{aligned}
dA_0 &= (-2p_{6+i} - p_{21+i})\theta^i A_0 + \theta^h A_h + p_i\theta^i A_3,\\
dA_1 &= p_{3+i}\theta^i A_0 + p_{6+i}\theta^i A_1 + p_{9+i}\theta^i A_2 + p_{12+i}\theta^i A_3,\\
dA_2 &= p_{15+i}\theta^i A_0 + [-\varepsilon_2 p_{9+h}\theta^h + (1 - \varepsilon_2 p_{12})\theta^3]\,A_1 +\\
&\qquad + p_{6+i}\theta^i A_2 + p_{18+i}\theta^i A_3,\\
dA_3 &= p_{21+i}\theta^i A_0 + \theta^3 A_1 + \theta^1 A_2 + p_{24+i}\theta^i A_3,\\
&\qquad (\varepsilon_2 = \pm 1).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Le théorème fondamental est immédiat. De même, sa démonstration.

D) *Complexes de couples de plans coïncidents* $V_1\,(3\,;(3\,;0)\,;P_3)$. Les pfaffiens principaux d'ordre zéro donnés par (2.10), étant en nombre de trois, donc en nombre égal à celui des arguments, l'algorithme de la méthode du repère mobile de Cartan ne peut pas être continué. Il résulte qu'afin d'obtenir le repère canonique d'une famille de plans dépendant de trois paramètres, la méthode suivie ici n'est pas convenable. Mais ce problème a reçu déjà une solution, en considérant une famille non holonome de plans [3].

4. Interprétations géométriques. A) *Complexes de quadriques non dégénérées* $V_1(3\,;\,(0\,;\,n)\,;\,P_3)$, $(n = 0, 1, 2)$. Avec (2.1), où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_0\varepsilon_3 = \pm 1$ et (3.1), on calcule dQ. On obtient

$$
\begin{aligned}
dQ &= 2T_i\theta^i \quad \text{où} \quad T_h = -\varepsilon_0\,(x^0)^2 + p_h x^0 x^1 + p_{2+h}x^0x^2 +\\
&\qquad + p_{4+h}x^0x^3 + (x^h)^2 + p_{10+h}x^1x^2 + p_{8+h}x^1x^3 + p_{6+h}x^2x^3\,;\\
T_3 &= -\varepsilon_0\,(x^0)^2 + \varepsilon_3\,(x^3)^2 - x^1x^2\,;
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Les équations $T_i = 0$ représentent trois quadriques ; $T_3 = 0$ est un ellipsoïde si $\varepsilon_0\varepsilon_3 = -1$ et un hyperboloïde, si $\varepsilon_0\varepsilon_3 = +1$.

Considérons le fascicule de quadriques $F_3 = \lambda_0 Q + \lambda_3 T_3 = 0$. Puisque $T_3 = \partial Q/\theta^3$ nous allons nommer F_3 — „fascicule tangent" au complexe Q, l'élement de „contact" étant la quadrique Q. Les quatre quadriques dégénérées du fascicule F_3, obtenus pour $\lambda_3 = \pm\,\varepsilon_0\varepsilon_3\lambda_0$, $\lambda_3 = \pm\,2\lambda_0$, ont pour équations

$$
\begin{aligned}
Q_{1,2} &= (\varepsilon_0 \mp \varepsilon_3)\,(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (\varepsilon_3 \pm \varepsilon_0)\,(x^3)^2 \mp \varepsilon_0\varepsilon_3 x^1x^2 = 0,\\
Q_3 &= -\varepsilon_0(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + 3\varepsilon_3(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,\\
Q_4 &= 3\varepsilon_0(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - \varepsilon_3(x^3)^2 + 2x^1x^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Ce sont des cônes quadratiques. Leurs sommets sont, respectivement, les points : A_0, A_3, $A_1 + A_2$, $A_1 - A_2$. La droite A_1A_2, déterminée par les deux derniers sommets, coupe la quadrique $T_3 = 0$, aux points A_1 et A_2. Notons encore que A_3 est situé sur chacune des quadriques $T_h = 0$ (4.1) tandis que A_0 n'est pas situé sur aucune de ces deux quadriques, A_1 et A_2 sont situés sur la quadrique ($T_2 = 0$), respectivement ($T_1 = 0$). En voici des interprétations pour le point unité :

a) L'ellipsoïde réel Q ($-\varepsilon_0 = \varepsilon_3 = 1$) est coupé par les arêtes A_0A_j aux points $U_{0j} = A_0 + A_j$ et $A_0 - A_j$. Le pôle du plan (U_{01}, U_{02}, U_{03}), par rapport à Q, est le point unité U.

b) Le hyperboloïde générique Q est coupé par les arêtes A_0A_1, A_0A_2, A_2A_3, respectivement aux points $A_0 \pm A_1$, $A_0 \pm A_2$, $A_2 + A_3$. Le point unité U est le pôle du plan $(A_0 + A_1, A_0 + A_2, A_2 + A_3)$ par rapport à l'hyperboloïde Q.

c) Au cas $\varepsilon_0 = \varepsilon_3 = 1$ (Q est un ellipsoïde imaginaire), si l'on coupe la quadrique $T_3 = 0$ par A_0A_3 et le cône $Q_3 = 0$, par A_0A_1 et A_0A_2, on obtient les points $A_0 \pm A_3$, $A_0 \pm A_1$, $A_0 \pm A_2$. Le point unité U est le pôle du plan $(A_0 - A_1, A_0 - A_2, A_0 - A_3)$ par rapport à Q.

Voici des interprétations pour les formes invariantes θ^i et certains invariants finis. Considérons un point $A_1' \simeq A_1 + dA_1$ situé dans un voisinage de A_1, de manière que dans l'expression de dA_1 : $\theta^2 = \theta^3 = 0$. Considérons aussi la quaterne de plans déterminés par A_2, A_3 et, respectivement, par A_1, A_0, U_{10}, A_1'. On obtient avec (3.1) le birapport

$$(A_2, A_3)\,[A_1, A_0\,;\ U_{10}, A_1'] = \frac{1}{p_1 - p_{13}}\left(\frac{1}{\theta^1} + 1\right). \tag{4.3}$$

D'une manière analogue on obtient :

$$\begin{aligned} &(A_3, A_0)\,[A_2, A_1\,;\ U_{21}, A_2'] = \frac{1}{p_8 - p_{23}}\left(\frac{1}{\theta^2} + 1\right), \\ &(A_0, A_1)\,[A_3, A_2\,;\ U_{23}, A_3'] = \frac{1}{\varepsilon_3 p_{30}}\left(\frac{1}{\theta^3} + 1\right). \end{aligned} \tag{4.3'}$$

Pour les variétés caracterisées par les invariants $p_1, \ldots, p_{30}$ satisfaisant aux conditions : $p_1 \neq p_{13}$, $p_8 \neq p_{23}$, $p_{30} \neq 0$, on a ici des interprétations pour les formes θ^i.

Les plans (π_{ih}), tangents à la quadrique (T_h) au point A_i, ont pour équations : $(\pi_{12}) = p_2x^0 + p_{12}x^2 + p_{10}x^3 = 0$, $(\pi_{21}) = p_3x^0 + p_{11}x^1 + p_7x^3 = 0$, $(\pi_{3h}) = p_{4+h}x^0 + p_{8+h}x^1 + p_{6+h}x^2 = 0$.
En coupant chacun de ces plans par l'un des plans $x^\alpha = 0$, on obtient une droite qui donne des interprétations à deux invariants.

Soit le réseau de quadriques $R = \lambda_0 Q + \lambda_1 T_1 + \lambda_3 T_3 = 0$, où Q est la quadrique générique (2.1) de chacun des complexes et T_1, T_3 sont donnés par (4.1). Les quadriques de R sont coupées par A_0A_2 aux points $(x^0, 0, x^2, 0)$ où x^0, x^2 sont donnés par l'équation $\varepsilon_0(\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_3)(x^0)^2 + \lambda_1 p_3 x^0 x^2 + \lambda_0 (x^2)^2 = 0$.

Dans le réseau R, nous déterminons les fascicules de quadriques tangentes à A_0A_2. Ils sont obtenus pour $\lambda_3 = \lambda_0 - \lambda_1 - \dfrac{\varepsilon_0 \lambda_1^2 p_3^2}{4\lambda_0}$, $(\lambda_0 \neq 0)$; les points doubles sont :

$$(2\lambda_0, 0, -\lambda_1 p_3, 0). \tag{4.4}$$

Il en résulte que, pour chaque fascicule de R tangent à A_0A_2, fascicule déterminé par $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3 = \lambda_0 - \lambda_1 - \varepsilon_0\lambda_1^2 p_3^2/4\lambda_0)$, ($\lambda_0 \neq 0$ et λ_1 étant arbitraires), il y a sur A_0A_2 le point de contact (4.7). On a ici une interprétation pour l'invariant p_3. D'une manière analogue on peut obtenir des interprétations en considérant au lieu de A_0A_2, les autres arêtes du repère.

Considérons dans le domaine $D \subset P_3$, les courbes (Γ_i), d'équations

$$(\Gamma_i) = \theta^j = \theta^k = 0 \quad (i \neq j \neq k \neq i) \tag{4.5}$$

et soit (d_{0i}) la droite caractéristique du plan $x^0 = 0$, à un déplacement de A_0 le long d'une courbe (Γ_i) ;

$$(d_{0i}) : \left(\sum_{h=1}^{2} \delta_i^h p_i - p_{12+i}\right) x^1 + \left(\sum_{h=1}^{2} \delta_i^h p_{2+i} - p_{15+i}\right) x^2 + \left(\sum_{h=1}^{2} \delta^h p_{4+i} - \varepsilon_3 p_{18+i}\right) x^3 = 0\,;\ x^0 = 0.$$

En notant par P_{0i}^β, le point où (d_{0i}) coupe le plan $x^\beta = 0$, $(\beta \neq 0)$ et par $\tau_{(\gamma\delta\beta)i} = [A_\gamma, A_\delta\,;\ U_{\gamma\delta}, P_{0i}^\beta]$, $(\gamma \neq 0, \beta\,;\ \delta \neq 0, \beta)$, on obtient les valeurs des birapports :

$$\tau(_{123})_i = \frac{\sum_{h=1}^{2} \delta_i^h p_{2+i} - p_{15+i}}{p_{12+i} - \sum_{h=1}^{2} \delta_i^h p_i}, \quad \tau(_{231})_i = \frac{\varepsilon_3 p_{18+i} - \sum_h \delta_i^h p_{4+i}}{\sum_{h=1}^{2} \delta_i^h p_{2+i} - p_{15+i}}\,;$$

$$\tau(_{312})_i = \frac{\sum_h \delta_i^h p_i - p_{12+i}}{\varepsilon_3 p_{18+i} - \sum_h \delta_i^h p_{4+i}}\,;\quad \tau(_{123})_i = \tau(_{231})_i = \tau(_{312})_i = -1.$$

Ces birapports offrent des interprétations à un grand nombre d'invariants.

B) *Complexes de cônes quadratiques* $V_1(3\,;(1\,;n)\,;P_3)$, $(n = 0, 1)$. Avec (3.6), on obtient dQ, où Q donné par (2.1), avec $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$:

$$dQ = p_{17+i}Q + \tilde{T}_h\theta^h + \varepsilon_3\tilde{T}_3\theta^3, \tag{4.6}$$

$$\tilde{T}_1 = \varepsilon_3 p_1 (x^3)^2 + x^0x^1 + p_3x^1x^2 + p_5x^1x^3 + p_7x^2x^3\,; \tag{4.6'}$$

$$\tilde{T}_2 = (x^2)^2 + \varepsilon_3 p_2^2 (x^3)^2 + x^0x^2 + p_4x^1x^2 + p_6x^1x^3 + p_8x^2x^3\,;\ \tilde{T}_3 = x^0x^3.$$

$\tilde{T}_i = 0$ sont trois quadriques. C'est elles et le cône générique $Q = 0$, qui donnent l'interprétation géométrique du repère. A_0 est le sommet du cône générique Q, A_1A_2 est le centre de la quadrique $\tilde{T}_3 = 0$ et $(x^3 = 0)$ est le plan déterminé par A_0 et A_1A_2. A_0 est situé aussi sur la quadrique $\tilde{T}_1 = 0$; le plan $(x^1 = 0)$ est tangent en A_0 à la quadrique $\tilde{T}_1 = 0$, A_0A_2 est l'intersection des plans $x^1 = 0$, $x^3 = 0$ et A_2 est l'intersection de A_1A_2 et A_0A_2. Le plan polaire de $A_2 (A_2 \notin Q)$, par rapport au cône $Q = 0$, est $x^2 = 0$. A_0A_1 et A_0A_3 sont les intersections du plan $x^2 = 0$, avec $x^3 = 0$, respectivement $x^1 = 0$. Le sommet A_1 est l'un des deux points où A_0A_1 coupe la quadrique $\tilde{T}_1 = 0$. Des interprétations pour les invariants peuvent être données d'une manière analogue à celles obtenues pour les complexes de quadriques irréductibles.

C) *Complexes de couples de plans distincts* $V_1(3; (2; n); P_3)$, $(n = 0,1)$. Avec (3.6), on obtient

$$(4.7) \qquad dQ = p_{6+i}Q + T_1\theta^1 + \varepsilon_2 T_2\theta^2 + T_3\theta^3, \quad T_1 = x^0x^1 + \varepsilon_2 x^2x^3, \quad T_2 = x^0x^2, \quad T_3 = x^1(x^2 + x^3).$$

La quadrique $T_1 = 0$ est un hyperboloïde, $T_2 = 0$ et $T_3 = 0$ sont des couples de plans distincts. Voici l'interprétation du repère. A_0A_3 et A_1A_3 sont les centres des couples de plans, $Q = 0$, respectivement $T_2 = 0$. A_3 est l'intersection de A_0A_3 et A_1A_3. A_0 est l'intersection de A_0A_3 avec le centre du couple de plans $T_3 = 0$. A_0 est situé sur $T_1 = 0$. Le plan $x^1 = 0$ est tangent à $T_1 = 0$, au point A_0. Le plan $x^1 = 0$ coupe la quadrique $T_1 = 0$, suivant A_0A_2 et A_0A_3. Le plan $x^2 = 0$, déterminé par A_0A_3 et A_1A_3 est l'un des plans du couple $T_2 = 0$; on a ainsi l'autre plan de ce couple, $x^0 = 0$. A_0A_2 coupe le plan $(x^0 = 0)$ au point A_2. A_1 est le pôle du plan $(x^0 = 0)$ par rapport à $T_1 = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Gheorghiev, Gh., Miron, R., Papuc, I. Dan — *Geometrie analitică și diferențială*. București, E.D.P., 1969.
2. Mayer, O. — *Geometrie proiectivă*, București, Ed. Acad. R.S.R., 1970.
3. Mihăilescu Tiberiu — *Geometrie diferențială proiectivă*, București, Ed. Acad. R.P.R. 1958.
4. Rimer, D. — *La géométrie différentielle des variétés uniparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace projectif à trois dimensions*. An. șt. Univ. Iași, XII (1966), 377—403.
5. „ *Variétés biparamétriques de cônes quadratiques*. An. șt. Univ. Iași, XIII (1967), 349—365.
6. „ *La géométrie différentielle des variétés unidimensionnelles de quadriques en P_3, A_3, E_3*. Math. Nachr. Berlin, 51 (1971), 59—82.
7. „ *Congruences de quadriques en P_3 et A_3*. Math. Nachr. Berlin, 53 (1972), 345—359.

Reçue le 27.XI.1978

Université „Al. I. Cuza" Iași
Séminaire Mathématique „A. Myller"

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

CONVEX FUNCTIONS WITH RESPECT TO A DISTRIBUTION ON A RIEMANNIAN MANIFOLD

BY

FULGA POP

In this Note we define the notion of *convex function with respect to a distribution* on a Riemannian manifold. Some examples and basic properties are given. Particularly, we investigate the *vertical* and *horizontal convexity* of the vertical lift of a function defined on a Riemannian manifold.

In a next paper we shall study the convexity of the complete lift of a function and of Pfaff forms.

§ 1. D-convex functions. Let M be a Riemannian manifold with respect to the metric g and the Levi-Civita connection ∇, having the local expressions g_{ij} and Γ^k_{ij} respectively.

Let $D = D(M)$ be a distribution on the manifold M (a subbundle of the tangent bundle TM).

Definition. *A smooth function $f : M \to R$ is called a D-convex function if for every point $x \in M$ and for every vector field $X \in D$, we have:*

$$(1) \qquad < \nabla_X df, X >_x \geqslant 0.$$

If the function f is a TM-convex function, then it is a convex function, [1] (In [1] the function f is called a convex function if $-f$ fulfills the condition (1) for every vector field X on the manifold M. Moreover, in [1] there are defined convex functions which are not smooth).

According to [2], [3], we denote:
$< \nabla_X df, Y > = \mathrm{Hess}\,(f)\,(X, Y)$, *for* X, Y two vector fields on M.

Examples. 1. Let $f, g : R \to R$ be the functions $f(x) = x^2 + bx + c$ and $g(x) = \sin x$. We consider the function $h : R^2 \to R$ defined by $h(x, y) = f(x) + g(y)$. Then, for a vector field $X = (X^1, X^2) \in T(R^2)$, we have:

$$\mathrm{Hess}\,(h)\,(X, X) = 2\,(X^1)^2 - (X^2)^2 \sin y.$$

It is obvious that the function h is not convex, but if we consider the 1-dimensional distribution D on R^2, generated by a vector field $X_0 = (X^1_0, X^2_0)$, with $X^2_0 = u(x, y)\,X^1_0$, such that $|u(x, y)| \leqslant \sqrt{2}$, then h is a D-convex function. In fact, if $X \in D$, then, for every point $z = (x, y) \in R^2$ we have:

$$\mathrm{Hess}\,(h)_z\,(X, X) = (X^1)^2\,(2 - u^2 \sin y) \geqslant 0.$$

(We can take for example $u(x, y) = (2 + x^2 + y^2)/(1 + x^2 + y^2)$.