where $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_3 \geqslant 0$ *and* $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$, *for all distinct* $x, y \in X$, *then* T *has a unique fixed point.*

The theorem 1′ may be considered as an extension of theorem 1. Similarly other particular cases like theorem 1′ can be deduced from theorem 3 by putting $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$ or $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Finally we return to the proof of theorem 5. Let us put $k_n = n/[5(n+1)]$ $n=1, 2, \ldots$, so that $k_n \to 1/5$. Also let $T_n : S \to S$ be defined by $T_n x = f_{Tx}(k_n)$ for all $x \in S$. Since $T(S) \subset S$ and $0 < k_n < 1/5$, each T_n is well defined and maps S into S. Now for each n, we have for all distinct $x, y \in S$:

$$\|T_n x - T_n y\| = \|f_{Tx}(k_n) - f_{Ty}(k_n)\| < \Phi(k_n)\{\|x - y\| + \|x - f_{Tx}(k_n)\| + \|y - f + y(k_n)\| + \|x - f_{Ty}(k_n)\| + \|y - f_{Tx}(k_n)\| = 1/5\{\|x - y\| + \|x - T_n(x)\| + \|y - T_n(y)\| + \|x - T_n(y)\| + \|y - T_n(x)\|\}.$$

Thus T_n is a contractive mapping on S in the sense of theorem 3 for $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$. So each T_n has a unique fixed point $x_n \in S$. Since S is compact, there is a subsequence $\{x_{nj}\}$ of $\{x_n\}$ such that $\{x_{nj}\} \to$ some $x \in S$. Now $T_{nj} x_{nj} = x_{nj} \to x \in S$. On the other hand T is continuous and consequently $Tx_{nj} \to Tx$. Now by (iii) and (i) we have

$$T_{nj} x_{nj} = f_{Txnj}(k_n) \to f_{Tx}(1/5) = Tx,$$

so that $Tx = x$.

3. Concluding remark. Theorem 2 and theorem 3 are established for a compact metric space, whereas theorem 5 is established for a compact subset of a Banach space. The object of discussing theorem 5 is to extend contractive mappings on compact star-shaped subsets (which include compact convex subsets as a proper subclass) of a linear space with the help of theorem 3, i.e to discuss contractive mapping on a certain class of non-convex sets, just as we did in [6] for extending contraction mapping on compact star-shaped subsets of a linear space (vide theorem 4 of the present paper).

The author thanks the referee for his valuable comments.

REFERENCES

1. Kannan R. — *Some results on fixed points*, Bull. Cal. Math. Soc. 60 (1968), 71—76.
2. Chatterjea S. K. — *Fixed-point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 25 (1972), 727—730.
3. Hardy G. E. and Rogers T. D. — *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. 16 (1973), 201—206.
4. Rhoades B. E. — *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 257—290.
5. Fisher B. — *A fixed point mapping*, Bull. Cal. Math. Soc. 68 (1976), 265—266.
6. Chatterjea S. K. and Ghosh K. M. — *Some fixed point theorems*, to appear in Bull. Cal. Math. Soc.

Received 9.VI.1978

Department of Pure Mathematics
Calcutta University
Calcutta — 700 019, India

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE DU TYPE VOLTERRA NON-LINÉAIRE

PAR

STIG-OLOF LONDEN

1. Introduction. Dans ce travail on considère le comportement qualitatif des solutions de l'équation du type Volterra,

$$x'(t) + \int_0^t g(x(t-\tau))\, da(\tau) = f(t), \quad t \geqq 0, \tag{1.1}$$

où g, a, f sont des fonctions réelles données et x signifie la solution.

En particulier on démontrera le résultat suivant :

Théorème. *Supposons que*

(1.2) $g \in C(R)$,

(1.3) $a \in NBV(R^+)$,

(1.4) $\int_t^\infty |da(\tau)| \in L^1(R^+)$,

(1.5) $\operatorname{Re} \hat{a}(\omega) \geqq 0, \quad \omega \in R$,

(1.6) $\hat{a}(\omega) = 0, \ \omega \in S^{\text{df}} \{\omega | \operatorname{Re} \hat{a}(\omega) = 0\}$,

(1.7) $0 \in S$,

(1.8) $x \in L^\infty \cap LAC(R^+)$, *$x$ vérifie* (1.1) *p.p. sur* R^+ *et soit la fonction* f *telle que*

$$(F_\infty)\ f \in L^\infty(R^+),\ f(t) \to 0, \int_0^t f(s)\, ds \to F, \text{ pour } t \to \infty, \text{ où } |F| < \infty.$$

Alors ou i) ou bien ii) ci-dessous est vérifié.

(1.9) i) $\lim_{t\to\infty} [x(t) + Ag(x(t))] = x(0) + F$,

(1.10) $\lim_{t\to\infty} \sup_{|s| \leqq T} |x(s+t) - x(t)| = 0$, *pour tout* T *positif.*

ii) Il existent des fonctions $\tilde{f}$, $\tilde{x}$ vérifiant

(1.11) $\tilde{f} \in L^1(R^+)$, (1.13) $\lim_{t\to\infty} t^{-1} V_{\tilde{x}}[0, t] = 0$,

(1.12) $\tilde{x} \in L^\infty \cap LAC(R^+)$, (1.14) $\lim_{t\to\infty} [x(t) + Ag(x(t))]$ *n'existe pas,*

(1.15) $\lim_{t\to\infty} \sup_{|s|\leq T} |x(s+t) - x(t)|$ *n'existe pas pour* $T > 0$ *quelconque et telles que*

$$\tilde{x}'(t) + \int_0^t g(\tilde{x}(t-\tau))\, da(\tau) = \tilde{f}(t), \quad t \in R^+. \tag{1.16}$$

De plus $\hat{a}(\omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^\infty e^{i\tau\omega}\, da(\tau)$, $A \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^\infty a(s)\, ds$. Remarquons que (1.4), (1.7) nous donnent

$$a \in L^1(R^+). \tag{1.17}$$

Les hypothèses qu'on vient d'imposer au noyau $a(t)$ impliquent que $A > 0$. On peut trouver une preuve simple de ce fait dans [4 Remarque 2.1]. Il faut cependant observer que la preuve du §2 ne fait pas explicitement usage du fait que A est nonzéro. (Lemme 3, dont la preuve contient A^{-1}, est superflu si $A = 0$).

Dans un article récent on vient de considérer (1.1) sous des conditions proches de celles de plus haut, les seules différences étant que (1.7) et (F_∞) étaient remplacés par

$$0 \notin S,$$

$$f \in L^\infty(R^+), \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0,$$

respectivement. Alors les conclusions étaient que $\lim_{t\to\infty} g(x(t)) = 0$ ou bien qu'il existe $\tilde{f}$, $\tilde{x}$, vérifiant (1.11) — (1.13). (1.16) et tels que $\lim_{t\to\infty} g(\tilde{x}(t))$ n'existe pas.

Donc, ce résultat-ci montre que „la réduction du cas où $f \in L^\infty(R^+)$ au cas où $f \in L^1(R)$", sous la condition que le premier moment du noyau soit intégrable, peut être effectuée même si $\hat{a}(0) = a(\infty) = 0$. Mais nous sommes obligés d'imposer la condition additionelle que $\int_0^t f(s)\, ds$ converge vers une limite finie pour $t \to \infty$.

C'est évident par (1.9), et aussi par le fait que l'équation de la limite correspondante à (1.1), c'est-à-dire

$$y(t) + \int_0^\infty g(y(t-\tau))\, da(\tau) = x(0) + F, \tag{1.18}$$

entre d'une façon décisive dans la preuve du Théorème, que cette condition additionelle est assez naturelle.

Ce travail est motivé non seulement par la nécesité de continuer ce qu'on a commencé dans [2], mais aussi par les résultats de [1] et [4]. Donc, la preuve du [1, Théorème 2] a fourni le stimulant pour la formulation du Lemme 2 et un pas très important dans la preuve de ce Lemme fait usage d'une identité dérivée dans [4].

Dans [4], Staffans établit que (1.2) — (1.8), (F_∞) et l'hypothèse que S est dénombrable implique que i) est vérifié. Tenant compte du Théorème donné plus haut, la question suivante se présente : Quelles sont les conséquences si (1.2) — (1.8) et $f \in L^1(R^+)$ sont vérifiés et si S est grand, c'est-à-dire S n'est pas dénombrable. A présent nous n'avons pas de réponse à cette question.

2. Plan de la preuve du théorème. On rémarque d'abord qu'afin de simplifier l'exposé on suppose

$$x(0) + F = 0. \tag{2.1}$$

Un argument simple montre que ceci peut être fait sans restreindre la généralité.

La preuve du Théorème est assez semblable à celle de [2] et par conséquent on donne ici seulement les modifications nécessaires. La première partie de la preuve dans [2] consistait en cinq Lemmes. Le premier Lemme ne dépendait pas du fait que $0 \notin S$ par conséquent on peut le transmettre au cas présent sans changements. Puisque ce Lemme est assez important pour le traitement suivant on le cite sans preuve.

Lemme 1. *Supposons les hypothèses* (1.2) — (1.6) *et soit* $y(t)$ *une solution quelconque de*

$$y'(t) + \int_0^\infty g(y(t-\tau))\, da(\tau) = 0, \quad t \in R, \tag{2.2}$$

telle que

$$y \in L^\infty \cap LAC(R). \tag{2.3}$$

Alors

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t |y'(\tau)|\, d\tau = 0. \tag{2.4}$$

Les Lemmes 2 et 3 dans [2] s'appuyaient d'une façon essentielle sur $\hat{a}(0) > 0$ et c'est pourquoi ils doivent être modifiés. Voici les Lemmes modifiés ; les démonstrations sont données dans les Sections 3 et 4.

Lemme 2. *Supposons les hypothèses* (1.2) — (1.8) *et* (F_∞). *On définit* $\Gamma_c(x)$, H, a, b *par*

(2.5) $\Gamma_c(x) = \{y \in R \mid$ *il existe* $r_n \to \infty$ *tels que* $x(t + r_n) \to y$ uniformément sur des ensembles compacts$\}$.

$$(2.6)\qquad \begin{cases} H(y) = \int_0^y g(u)\,du - yg(y) - \dfrac{A}{2} g^2(y), \\ a = \lim\limits_{t\to\infty} \inf x(t), \quad b = \lim\limits_{t\to\infty} \sup x(t). \end{cases}$$

Alors

$$(2.7)\qquad H(\Gamma_C(x)) = \sup_{a\leqq y\leqq b} H(y).$$

Donc, la fonction H atteint un maximum local sur l'ensemble des fonctions à limites fixes. On doit observer que le Lemme 1 garantit que $\Gamma_C(x)$ n'est pas vide et que les relations (1.18), (2.1) impliquent $y + Ag(y) = 0$, $y \in \Gamma_C(x)$.

Le pas suivant, qui a une correspondance évidente dans [2], consiste à définir des ensembles $D(\alpha, \beta)$ par

$$(2.8)\qquad D(\alpha, \beta) = \{y \mid \alpha \leqq y \leqq \beta,\ y + Ag(y) = 0,\ \ H(y) = \sup_{a\leqq y\leqq \beta} H(y)\}.$$

Nous prenons a, b comme dans Lemme 2 et considérons $D(a, b)$. Le degré de difficulté du reste de la preuve dépend du fait que $m(D(a, b)) > 0$ ou $=0$. Le Lemme 3 qui suit est nécessaire pour le premier cas. Bien que ce Lemme soit valable si $m(D(a, b)) = 0$, il ne joue aucun rôle dans ce cas.

Lemme 3. *Supposons les hypothèses* (1.2) — (1.7) *vérifiées et soit* $y(t)$ *tel qu'on ait* (2.3) *et*

$$(2.9)\qquad y(t) + \int_0^\infty g(y(t-\tau))\,da(\tau) = 0, \quad t \in R.$$

On définit α, β *par* $\alpha = \inf\limits_{t\in R} y(t) \leqslant \sup\limits_{t\in R} y(t) = \beta$. *Alors*

$$(2.10)\qquad y'(t) = 0, \quad t \in \{s \mid y(s) \in D(\alpha, \beta)\}.$$

Dès ce point, la preuve du Théorème peut être prise presque *verbatim* de la partie correspondante de [2] et par conséquent on l'omet ici.

3. Preuve du lemme 2. Par intégration on déduit de (1.1)

$$(3.1)\qquad x(t) - x(0) + \int_0^t g(x(t-\tau))\,a(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(s)\,ds.$$

En vertu de (F_∞), (1.17), (2.1), (2.5), (3.1) et puisque

$$(3.2)\qquad \sup_{t\in R^+} |g(x(t))| < \infty,$$

on a

$$(3.3)\qquad y + Ag(y) = 0, \quad y \in \Gamma_C(x).$$

On définit $H_m = \inf\limits_{y\in\Gamma_C(x)} H(y)$ et suppose $H_m < H_M \overset{df}{=} \sup\limits_{a\leqq y\leqq b} H(y)$. Prenons $p \in \Gamma_C(x)$ et $r_n \to \infty$ tels que $H(p) = H_m$, $x(t + r_n) \to p$ uniformément sur des ensembles compacts. Soit q un nombre quelconque tel que

$$(3.4)\qquad H_m < q < H_M; \quad q \notin \{H(y) \mid a \leqq y \leqq b,\ \ y + Ag(y) = 0\}.$$

Les arguments dans [1, p. 857] peuvent être utilisés pour montrer que de tels nombres existent. On définit s_n par $s_n = \sup\{s \in R \mid H(x(t)) < q,\ r_n \leqq t < s\}$. Alors on aura

$$(3.5)\qquad H(x(s_n)) = q, \quad H(x(t)) \leqq q, \quad r_n - T_n \leqq t \leqq s_n,$$

pour $T_n \to \infty$. En appliquant le Lemme 1 à $x(t)$ et en utilisant (F_∞) on déduit l'existence de $[\tilde\lambda_n, \mu_n] \subset [r_n - T_n, s_n]$ et de $y_0 \in \Gamma_C(x)$ tels que $\tilde\lambda_n \to \infty$, $(\mu_n - \tilde\lambda_n) \to \infty$, pour $n \to \infty$,

$$(3.6)\qquad x(t) \to y_0 \text{ uniformément sur } [\tilde\lambda_n, \mu_n],$$

$$(3.7)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\lambda_n}^{s_n} |f(s)|\,ds = 0, \quad 2\lambda_n \overset{df}{=} \tilde\lambda_n + \mu_n.$$

De (3.3) — (3.6), il résulte

$$(3.8)\qquad H(y_0) < q.$$

Si l'on multiplie (1.1) par $g(x(t))$ et intègre sur $[\lambda_n, s_n]$ on obtient,

$$G(u) \overset{df}{=} \int_0^u g(v)\,dv,$$

$$(3.9)\qquad G(x(s_n)) - G(x(\lambda_n)) + \int_{\lambda_n}^{s_n} g(x(\tau)) \left[\int_{\tau-\lambda_n}^{\tau} + \int_0^{\tau-\lambda_n} \{g(x(\tau - s))\,da(s)\} \right] d\tau = \int_{\lambda_n}^{s_n} g(x(\tau))\,f(\tau)\,d\tau.$$

Les relations (3.2), (3.7) impliquent que le second membre de (3.9) converge vers zéro pour $n \to \infty$. De (1.2), (1.4), (3.2), (3.6), on déduit

$$(3.10)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\lambda_n}^{s_n} g(x(\tau)) \int_{\tau-\lambda_n}^{\tau} g(x(\tau - s))\,da(s)\,d\tau = -Ag^2(y_0).$$

Pour manier le terme $\int_{\lambda_n}^{s_n} g(x(\tau)) \int_0^{\tau-\lambda_n} g(x(\tau - s))\,da(s)\,d\tau$ on utilise une identité

dérivée par Staffans, [4]. On suppose pour le moment que $g(x(t)) \in C^1(R^+)$. Alors on peut montrer par intégration par parties que

$$\int_{\lambda_n}^{s_n} g(x(\tau)) \int_0^{\tau-\lambda_n} g(x(\tau - s))\, da(s)\, d\tau =$$

$$(3.11) \qquad = \int_{\lambda_n}^{s_n} \left\{\frac{d}{d\tau} g(x(\tau))\right\} \int_0^{\tau-\lambda_n} \left(\frac{d}{ds} g(x(s))\Big|_{s=\tau-v}\right) b(v)\, dv d\tau +$$

$$+ g(x(\lambda_n)) \int_0^{s_n-\lambda_n} g(x(s+\lambda_n))\, a(s)\, ds + g(x(s_n)) \int_0^{s_n-\lambda_n} g(x(s_n - v))\, a(v)\, dv -$$

$$- \frac{A}{2}\left[g^2(x(s_n)) + g^2(x(\lambda_n))\right] + b(s_n - \lambda_n)\, g(x(\lambda_n))\, g(x(s_n)),$$

où $b(v) = \int_v^\infty a(s)\, ds$, $v \geqq 0$. On se rappelle la condition (1.5). Une application du Lemme 1.1 dans [3] où l'on prend $\alpha = 0$, $\beta([0, t]) = b(t)$ prouvera alors que le premier terme du membre droit de (3.11) est non-négatif. Puisque $s_n - \lambda_n \to \infty$, nous déduisons de (1.2), (1.17), (3.2), (3.6) la relation

$$(3.12) \qquad \lim_{n\to\infty} g(x(\lambda_n)) \int_0^{s_n-\lambda_n} g(x(s+\lambda_n))\, a(s)\, ds = Ag^2(y_0).$$

En utilisant (1.17), (2.1), (3.1), (3.2) il vient

$$(3.13) \qquad \lim_{n\to\infty}\left[x(s_n) + \int_0^{s_n-\lambda_n} g(x(s_n - v))\, a(v)\, dv\right] = 0.$$

On note finalement, et ceci concerne le dernier terme du membre droit de (3.11), que

$$(3.14) \qquad \lim_{n\to\infty} b(s_n - \lambda_n)\, g(x(s_n))\, g(x(\lambda_n)) = 0.$$

Une combinaison de (3.10) — (3.14) va donc donner

$$(3.15) \qquad \liminf_{n\to\infty}\left[\int_{\lambda_n}^{s_n} g(x(\tau)) \int_0^{\tau} g(x(\tau - s))\, da(s)\, d\tau + x(s_n)\, g(x(s_n)) + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{2} g^2(x(s_n)) + \frac{A}{2} g^2(y_0)\right] \geqq 0.$$

De la relation (3.9), de la phrase qui lui suit et de (3.15), on obtient

$$(3.16) \qquad \begin{cases} \liminf\limits_{n\to\infty}\left[H(y_0) - G(x(s_n)) + x(s_n)\, g(x(s_n)) + \dfrac{A}{2} g^2(x(s_n))\right] = \\ = \liminf\limits_{n\to\infty}\left[H(y_0) - H(x(s_n))\right] \geqslant 0. \end{cases}$$

Mais par la première partie de (3.5) et par (3.8) ceci est impossible. Finalement il faut observer que comme $H(x(t))$ est borné et uniformément continu sur R^+, il n'est pas difficile de voir que (3.16) est valable sans la condition $g(x(t)) \in C^1(R^+)$.

La preuve du Lemme 2 est par conséquent complète.

4. Preuve du lemme 3. On notera d'abord que $y(t)$ satisfait aussi à (2.2). On suppose que (2.10) n'est pas vérifié. Alors il existe $\hat{t}$ tel que

$$(4.1) \qquad |y'(\hat{t})| = \varepsilon > 0,$$

$$(4.2) \qquad H(y(\hat{t})) = H_M \overset{df}{=} \sup_{\alpha\leqq v\leqq\beta} H(y), \quad y(\hat{t}) + Ag(y(\hat{t})) = 0.$$

Sans restreindre la généralité, on suppose $\hat{t} = 0$. Par le Lemme 1 il y a d'intervalles $[\tau_n, t_n] \subset R^-$ tels que pour $n \to \infty$ on a

$$(4.3) \qquad y(t) \to \text{une constante } y_0 \text{ uniformément sur } [\tau_n, t_n];\ t_n - \tau_n \to \infty.$$

On prend de tels intervalles quelconques. Il résulte de la relation (2.9) que $g(y_0) + Ag(y_0) = 0$. Soit w tel que

$$(4.4) \qquad w(\tau, z) = \begin{cases} g(z), & -\infty < \tau \leqq 0, \\ g(y(0)) - (2A)^{-1}[z - y(0)], & 0 < \tau < \infty, \end{cases}$$

et soit $z(t)$ l'inconnue de l'équation

$$(4.5) \qquad z'(t) + \int_0^\infty w(t - \tau, z(t - \tau))\, da(\tau) = 0.$$

Choisissons une C^1-solution de (4.5) qui existe sur $(-\infty, \hat{\delta}]$ pour une constante $\hat{\delta} > 0$ et qui satisfait à la condition

$$(4.6) \qquad z(t) = y(t), \quad -\infty < t \leqslant 0.$$

Par (2.2) et (4.4) une telle solution peut être trouveé. Des relations (4.1), (4.5), (4.6) il résulte l'existence d'un δ tel que $0 < \delta \leqq \hat{\delta}$ et qui satisfait à

$$(4.7) \qquad |z'(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqq t \leqq \delta.$$

On prend un tel δ arbitraire, on multiplie (4.5) par $w(t, z(t))$ et on intègre sur $[\beta_n, \delta]$ où

$$(4.8) \qquad \beta_n \overset{df}{=} \frac{1}{2}(\tau_n + t_n).$$

Il suit

$$\int_{\beta_n}^{\delta} z'(\tau)\, w(\tau, z(\tau))\, d\tau + \tag{4.9}$$
$$\int_{\beta_n}^{\delta} w(\tau, z(\tau)) \int_0^{\infty} w(\tau - s, z(\tau - s))\, da(s)\, d\tau = 0.$$

Notre intention est maintenant d'estimer le second terme du membre gauche de (4.9). D'après (1.4), (4.3), (4.4), (4.8) on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\beta_n}^{\delta} w(\tau(z(\tau)) \int_{\tau-\beta_n}^{\infty} w(\tau - s,\ z(\tau - s))\, da(s)\, d\tau = -Ag^2(y_0). \tag{4.10}$$

Considérons $\int_{\beta_n}^{\delta} p(\tau) \int_0^{\tau-\beta_n} p(\tau - s,\ z(\tau - s))\, da(s)\, d\tau$, où $p(\tau) \overset{df}{=} w(\tau, z(\tau))$, et supposons pour le moment que $p \in C^1([\beta_n, \delta)$. On utilise de nouveau l'identité derivée dans [4] et on applique le lemme 1.1 dans [3], combiné avec (1.5). Cela impliquera

$$\int_{\beta_n}^{\delta} p(\tau) \int_0^{\tau-\beta_n} p(\tau - s)\, da(s)\, d\tau \geqq p(\beta_n) \int_0^{\delta-\beta_n} p(s + \beta_n)\, a(s)\, ds + \tag{4.11}$$
$$+ p(\delta) \int_0^{\delta-\beta_n} p(\delta - v)\, a(v)\, dv - \frac{A}{2}[p^2(\delta) + p^2(\beta_n)] + b(\delta - \beta_n)\, p(\delta)\, p(\beta_n).$$

Nous déduisons de (1.17) et (4.8) l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} p(\beta_n) \int_0^{\delta-\beta_n} p(s + \beta_n)\, a(s)\, ds = Ag^2(y_0). \tag{4.12}$$

Si l'on intègre (4.5) sur $[\beta_n, t]$ et si l'on fait usage de (1.17), (2.9), (4.3) et du fait que $y_0 + Ag(y_0) = 0$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta-\beta_n} p(\delta - v)\, a(v)\, dv = -z(\delta). \tag{4.13}$$

Le dernier terme dans (4.11) tend vers zéro pour $n \to \infty$. Ainsi on a, compte tenu de (4.10) — (4.13),

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\int_{\beta_n}^{\delta} p(\tau) \int_0^{\infty} p(\tau - s)\, da(s)\, d\tau \right] \geqslant - \tag{4.14}$$
$$- \frac{A}{2} g^2(y_0) - w(\delta, z(\delta))\, z(\delta) - \frac{A}{2} w^2(\delta, z(\delta)).$$

Des relations (4.3), (4.4), (4.9), (4.14), il résulte l'inégalité

$$G(y(0)) - G(y_0) - \frac{A}{2} g^2(y_0) + \int_0^{\delta} z'(\tau)\, w(\tau, z(\tau))\, d\tau - \tag{4.15}$$
$$- w(\delta, z(\delta))\, z(\delta) - \frac{A}{2} w^2(\delta, z(\delta)) \leqq 0.$$

De la dernière partie de (4.2) et de la deuxième ligne de (4.4) on déduit, après des calcul,

$$\int_0^{\delta} z'(\tau)\, w(\tau, z(\tau))\, d\tau - w(\delta, z(\delta))\, z(\delta) - \frac{A}{2} w^2(\delta, z(\delta)) = - \tag{4.16}$$
$$- y(0)\, g(y(0)) - \frac{A}{2} g^2(y(0)) + \frac{1}{8A}(z(\delta) - y(0))^2,$$

et pour cela on a (il faut utiliser (4.16) dans (4.15) et rappeler la définition de $H(y)$)

$$H(y(0)) - H(y_0) + \frac{1}{8A}(z(\delta) - y(0))^2 \leqslant 0. \tag{4.17}$$

Puisque $H(y(0)) = H(y_0)$, $A > 0$, et puisque $z(\delta) \neq y(0)$ ceci ne peut pas être valable.

Pour achever la preuve du Lemme 3 on observe que si la relation (4.7) est vérifiée pour une approximation quelconque assez lisse de $w(\tau, z(\tau))$ alors la relation est vérifiée pour $w(\tau, z(\tau))$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Londen S-O. — *On the asymptotic behavior of the bounded solutions of a nonlinear Volterra equation.* SIAM J. Math. Anal. 5 (1974), 849—875.
2. Londen S-O. — *On the asymptotics of a nonlinear scalar Volterra integrodifferential equation.* Proc. of the Helsinki Symposium on Integral Equations. Springer Lecture Notes, vol. 737, p. 149—172.
3. Staffans O. — *On the asymptotic spectra of the bounded solutions of a nonlinear Volterra equation.* J. Differential Equations, 24 (1977), 365—382.
4. Staffans O. — *On a nonlinear Volterra integral equation perturbed by a function with infinite total variation.* A parraître.

Reçu le 11.XI.1978

Institut Mathématique
L'école polytechnique d'Helsinki
02 150 Espoo 15 Finlande