Remark: Theorems 1 and 2 have extended the results of [4; pp. 335—336] to the case when $g(x')$ or $g_1(x)\,x'$ are not merely linear functions of x' but quasi-linear functions of x'. Exponential stability was established by both methods one via Liapunov function theory and the other by the frequency-domain method. The later has the added advantage of arriving at the result (and more results) of a larger class of equations through simplified inequalities.

REFERENCES

1. Barbalat I. and Halanay A. — *Applications of the frequency-method to forced non-linear oscillations*. Math. Nachrichten, 1970, 44, 165—179.
2. Barbalat I. — *Conditions pour a dans le comportement de certaines équations différentielles du troisième et du quatrième ordre. Equations différentielles et functionelles non-linéaries*, edited by P. Janssens, J. Mawhin and N. Rouche, Hermann Publishing, Paris, 1973, 80—91.
3. Popov V. M. — *Hyperstability of Control Systems*. Editura Academiei, Bucureşti and Springer-Verlag, Berlin, 1973.
4. Reissig R., Sansone G. and Conti R. — *Non-Linear Differential Equations of Higher Order*. Noordhoff International Publishing, 1974.

Received 1.III.1979

Department of Mathematics
University of Ife
Ile-Ife NIGERIA

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

EIN MAXIMALES PRINZIP FÜR STARK ELLIPTISCHE SYSTEME MIT EINER GERADEN ANZAHL VON PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

ANTON S. MUREŞAN und VIORICA MUREŞAN

Der Zweck dieser Arbeit ist algebraische Bedingungen für die Koeffizienten eines stark elliptischen Systems mit einer geraden Anzahl von partiellen Differentialgleichungen II Grades zu bringen, für die das maximale Prinzip gültig ist. Man bringt auch einen Satz über die Eindentigkeit der Lösung des Problems von Dirichlet für diese Art von Systemen.

Wir gehen von der Arbeit [3] aus und werden hier allgemeinere und vervollständigte Resultate in bezug auf die Arbeiten [1] und [2] geben.

1. Es sei ein begrenzter Bereich $D \subset R^n$, mit der Grenze Γ gegeben. $M_{nn}(R)$ sei die Menge der quadratischen Matrizen n-ter Ordnung mit reellen Elementen. Für n eine gerade Zahl, berichsichtigt man folgendes System mit partiellen Differentialgleichungen:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0(x)\, u = B(x), \tag{1}$$

wo

$$A_{ij},\quad A_i,\quad A_0 \in C(\bar{D}, M_{nn}(R)),\qquad B \in C(\bar{D}, R^n),\qquad x \in R^n. \tag{2}$$

Wir setzen voraus daß die Matrizen A_{ij} symmetrisch sind, also

$$A_{ij} = A_{ji},\quad i, j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit f die quadratische Form von $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$ Veränderlichen die durch

$$f = \langle e, Le \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle e, A_{ij}\, e''_{ij} \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e, A_i\, e'_i \rangle + \langle e, A_0\, e \rangle, \tag{4}$$

definiert ist, wo $\langle\, ,\, \rangle$ das Symbol für das skalare Produkt aus R^n ist und

$$e = (y_1, \ldots, y_n)^T \tag{5}$$

bzw.

$$e_1' = (y_{n+1}, \dots, y_{2n})^T, \dots, e_n' = (y_{n^2+1}, \dots, y_{n(n+1)})^T, \tag{6}$$

$$e_{11}'' = (y_{n(n+1)+1}, \dots, y_{n(n+2)})^T, \dots, e_{nn}'' = \left(y_{\frac{n^2(n+3)}{2}+1}, \dots, y_{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}}\right)^T.$$

Die Hochzahl „T" bezeichnet hier das Vertauschen des Zeilenvektors in einen Kollonnenvektor.

Wenn man die Glieder die in (4) erscheinen aufeinanderfolgend berechnet erhält man:

$$< e, A_0 e > = a_{11}^0 y_1^2 + (a_{12}^0 + a_{21}^0)\, y_1 y_2 + \dots + (a_{1n}^0 + a_{n1}^0)\, y_1 y_n + a_{22}^0 y_2^2 + \\ + \dots + (a_{2n}^0 + a_{n2}^0)\, y_2 y_n + \dots + (a_{n-1,n}^0 + a_{n,n-1}^0)\, y_{n-1} y_n + a_{nn}^0 y_n^2,$$

$$< e, A_1 e_1' > = a_{11}^1 y_1 y_{n+1} + \dots + a_{1n}^1 y_1 y_{2n} + a_{21}^1 y_2 y_{n+1} + \dots + a_{2n}^1 y_2 y_{2n} + \\ + \dots + a_{n1}^1\, y_n y_{n+1} + \dots + a_{nn}^1\, y_n\, y_{2n},$$

$$\vdots$$

$$< e, A_{nn} e_{nn}'' > = a_{11}^{nn}\, y_1\, y_{\frac{n^2(n+3)}{2}+1} + \dots + a_{1n}^{nn}\, y_1\, y_{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}} + \\ + a_{21}^{nn}\, y_2\, y_{\frac{n^2(n+3)}{2}+1} + \dots + a_{2n}^{nn}\, y_2\, y_{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}} + \dots + \\ + a_{n1}^{nn}\, y_n\, y_{\frac{n^2(n+3)}{2}+1} + \dots + a_{nn}^{nn}\, y_n\, y_{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in (4) einsetzt und ordnet erhält man:

$$f = Y F Y^T, \tag{7}$$

wo

$$Y = \left(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}, \dots, y_{\frac{n^2(n+3)}{2}+1}, \dots, y_{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}}\right) \in R^{\frac{n(n+1)(n+2)}{2}}, \tag{8}$$

und

$$F = \begin{bmatrix} A_0^* & \frac{A_1}{2} & \dots & \frac{A_n}{2} & \dots & \frac{A_{nn}}{2} \\ \frac{A_1}{2} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \frac{A_n}{2} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \frac{A_{nn}}{2} & & & & & \end{bmatrix} \tag{9}$$

wo

$$A_0^* = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & \frac{a_{12}^0 + a_{21}^0}{2} & \dots & \frac{a_{1n}^0 + a_{n1}^0}{2} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{a_{1n}^0 + a_{n1}^0}{2} & \frac{a_{2n}^0 + a_{n2}^0}{2} & \dots & a_{nn}^0 \end{bmatrix} = \frac{A_0 + A_0^T}{2} \tag{10}$$

und der nichtgeschriebene Teil aus der Matrix F die Nullmatrix der Ordnung $n^2(n+3)/2$ ist.

Man setzt voraus, daß die Elemente der Matrizen A_0^* und A_1 folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_{11}^0 < 0, \quad 4a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0 + a_{21}^0)^2 > 0, \dots, \det(A_0) > 0, \dots \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} A_0^* & \frac{A_1}{2} \\ \frac{A_1}{2} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{[\det(A_1)]^2}{2^{2n}} > 0.$$

Man stellt fest, daß die letzte Bedingung aus (11) erfüllt ist, da n gerade ist. Es gilt:

Satz 1. *Wenn die Bedingungen* (11) *erfüllt sind, und die Vektoren* (5) *und* (6) *folgende Beziehungen erfüllen*

$$< e, e > = 1, \quad < e, e_i' > = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{12}$$

$$< e, e_{ij}'' > + < e_i', e_j' > = 0, \quad e_{ij}'' = e_{ji}'', \quad i, j = \overline{1, n}$$

dann gibt es $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, *so daß*

$$f_{\max} = f^* < -\alpha^2. \tag{13}$$

Beweis. In diesem Fall haben wir eine Aufgabe mit gebundenem Extremum für die Funktion f deren Variablen noch die Bedingungen (12) erfüllen. Die Beziehungen (11) versichern, daß die quadratische Form f negativ definiert ist, und die erste Bedingung (12) zeigt, daß der Ursprung des Raumes $R^{n(n+1)(n+2)/2}$ ausgeschlossen ist aus dem Bereich in dem man das Maximum von f sucht. Daraus folgt, daß $f^* \equiv f_{\max}$ streng negativ ist, also die Schlußfolgerung des Satzes bewiesen ist.

Von Satz 1 aus [3] ausgehend, stellt man fest, daß folgender Satz gültig ist:

Satz 2. (Maximales Prinzip). *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 1 *folgt daß jede Lösung* $u \in C^2(D, R^n) \cap C(\bar{D}, R^n)$ *des stark elliptischen Systems* (1) *folgende Ungleichung erfüllt:*

$$|u(x)| \leq \max\left\{\max_{x \in \Gamma} |u(x)|, \frac{1}{\alpha^2} \max_{x \in \bar{D}} |B(x)|\right\}. \tag{14}$$

Beweis. Weil $< e, Le > \leqslant f^*$, für jedes $e \in C^2(D, R^n)$ mit $|e| = 1$, gilt auch $< e, Le > \leqslant -\alpha^2$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ und man verwendet Satz 1 von [3].

Bemerkungen: 1) Satz 2 ist eine Verallgemeinerung des Satzes 1 aus [2] für den Fall von Systemen mit zwei partiellen Differentialgleichungen.

2) Die Voraussetzungen des Satzes 2 sind stärker als die des Satzes 1 aus [3], aber sie werden nur den Koeffizienten des Systems (1) auferlegt, während der Einheitsvektor e ausgeschaltet wird.

3) Satz 2 ist eine Verbesserung des Satzes 1.1. aus [1] in Falle der stark elliptischen Systeme von Differentialgleichungen, wenn die Koeffizienten der Glieder die Ableitungen zweiter Ordnung enthalten nichtdiagonale, symmetrische Matrizen A_{ij} sind.

2. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß das Grenzproblem (Dirichlet)

$$(15) \qquad \begin{cases} L\,u = B, \\ u \in C^2(D, R^n), \\ u\,|_\Gamma = b, \end{cases}$$

wo $b \in C(\Gamma, R^n)$ ein Functionvektor ist, eine einzige Lösung hat.

Satz 3. *In den Bedingungen des Satzes 2 ist die Lösung des Grenzproblems* (15) *einzig.*

Beweis. Wir zeigen, daß die homogene Grenzaufgabe

$$(16) \qquad \begin{cases} L\,u = 0 \\ u \in C^2(D, R^n) \\ u\,|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

nur die Lösung $u \equiv 0$ hat.

In den Bedingungen in denen wir arbeiten, kann man das Prinzip des Maximums (Satz 2) für die Lösung des Systems (16) anwenden. (11) zeigt, daß $|u| \leqslant 0$, also $|u| \equiv 0$ oder $u \equiv 0$.

Es seien u_1 und u_2 zwei Lösungen für das Grenzproblem (15). Dann ist die Differenz $u = u_1 - u_2$ eine Lösung der homogenen Grenzaufgabe (16), also $u \equiv 0$, oder $u_1 \equiv u_2$.

Somit ist die Eindentigkeit festgesetzt und der Satz bewiesen.

BIBLIOGRAPHIE

1. Miranda, C. — *Sul teorema del massimo modulo per una classe di sistemi ellittici di equazioni del secondo ordine e per le equazioni a coefficienti complessi*, Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 104, 4 (1970), 736—745.
2. Mureşan, A. — *On the uniqueness of the solution of Dirichlet's problem relative to a strong elliptic system of second order partial differential equations*, Revue d'Analyse Numérique et de la Théorie d'approximation (to appear).
3. Rus, A. I. — *A maximum principle for an ellipti system of partial differential equations*, Proceedings of the Conference on Differential Equations and Their Applications, Iaşi, October, 1973, 77—80.

Eingegangen 5.VI.1979

Facultatea de Ştiinţe economice
Universitatea din Cluj-Napoca
3 400 Cluj-Napoca
R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 2

APPROXIMATE STABILITY OF GENERALIZED DYNAMICAL SYSTEMS

BY

C. IGNAT

The notion of stability of sets with respect to a preorder relation has been introduced by Bushaw in [1] in uniform spaces. This work has suggested us a generalization of the same notion in topological spaces [5]. In the present paper we will propose another generalization in spaces endowed with a preorder relation and an approximation structure, defined by us in [6].

We recall the definition of an approximation structure [6].

Let X and A be two sets and $\mathcal{R}(A, X)$ the collection of all relations $\alpha \subset A \times X$.

Definition 1. *An approximation relation of X directed by A is a subset $a \subset X \times \mathcal{R}(A, X)$ such that*

$$(1) \qquad \forall\, x \in X \quad \exists\, \alpha \in \mathcal{R}(A, X) : (x, \alpha) \in a.$$

We shall say that $\{X, a, A\}$ is an approximation structure space.

We denote

$$(2) \qquad r(\alpha, a) = \{z \in X : (a, z) \in \alpha\},\ \alpha \in \mathcal{R}(A, X),\ a \in A;$$

$$(3) \qquad a^*[\gamma] = \{z \in X : (z, \gamma) \in a\},\ \gamma \in \mathcal{R}(A, X);$$

$$(4) \qquad a[x] = \{\alpha \in \mathcal{R}(A, X) : (x, \alpha) \in a\},\ x \in X;$$

$$(5) \qquad \mathcal{S}[\alpha] = \{y \in X : \exists\, a \in A,\ (a, y) \in \alpha\},\ \alpha \in \mathcal{R}(A, X).$$

1. We introduce now the notion of approximative generalized metric (a.g.m.).

Definition 2. *Let X, G, A be three nonempty sets, $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}(A, G)$ and let ρ be a mapping of $X \times X$ in the set of functions G^A; denote*

$$\lambda[a] = \{\rho \in G : (a, \rho) \in \lambda\},\ \lambda \in \mathcal{X},\ a \in A,$$

and

$$(6) \qquad \mathcal{D}(\lambda) = \{a \in A : \lambda[a] \neq \varnothing\}\ \lambda \in \mathcal{X}.$$

The relation

$$(7) \qquad B(x, \varkappa) = \{(a, y) \in \mathcal{D}(\varkappa) \times X : \rho(x, y) \in \varkappa[a]\}$$